УДК 530.1(075.8)
Л22
ББК 22.31

Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. **Теоретическая физика**: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VIII. **Электродинамика сплошных сред**. — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 656 с. — ISBN 5-9221-0123-4 (Т. VIII).

Восьмой том «Теоретической физики» посвящен теории электромагнитных полей в материальных средах и теории макроскопических электрических и магнитных свойств вещества.

3-е изд., исправленное, вышло в 1992 г.

Для студентов старших курсов физических специальностей вузов, а также аспирантов и научных работников, специализирующихся в области теоретической физики.

Ил. 65

Ответственный редактор курса «Теоретическая физика» академик РАН, доктор физико-математических наук *Л. П. Питаевский*

ISBN 5-9221-0123-4 (Т. VIII)
ISBN 5-9221-0053-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании «Электродинамики сплошных сред» исправлены замеченные опечатки и сделан ряд поясняющих дополнений. Кроме того, добавлена задача к § 126.

Я благодарен А.Ф. Андрееву, И.Е. Дзялошинскому и М.И. Каганову за обсуждение вопросов, возникших при подготовке книги к печати.

Июль 1990 *Л.П. Питаевский*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Для первого издания этот том был написан 25 лет назад. Естественно, что такой большой срок привел к необходимости довольно значительной переработки и дополнения книги для настоящего, второго, издания.

Отбор материала был произведен в свое время таким образом, что фактически он (за весьма незначительными исключениями) не устарел и к настоящему времени. В этой части произведены лишь сравнительно небольшие дополнения и улучшения.

Потребовалось, однако, существенное дополнение книги новым материалом. Особенно это относится к теории магнитных свойств вещества и теории оптических явлений; добавлены новые главы о пространственной дисперсии и о нелинейной оптике.

Глава об электромагнитных флуктуациях исключена, поскольку этот материал изложен теперь, в измененном виде, в другом томе этого курса — томе IX.

Неоценимую помощь при работе по переработке этого, как и других, томов оказали замечания наших товарищей по науке — слишком многих, чтобы всех здесь перечислить; всем им мы искренне благодарны. Особенно много замечаний было сделано В.Л. Гинзбургом, Б.Я. Зельдовичем и В.П. Крайновым. Очень ценна для нас была возможность постоянного обсуждения возникавших вопросов с А.Ф. Андреевым, И.Е. Дзялошинским

и И.М. Лифшицем. Особую благодарность мы хотим выразить С.И. Вайнштейну и Р.В. Половину за большую помощь, оказанную ими при переработке главы о магнитной гидродинамике.

Наконец, мы благодарны А.С. Боровику-Романову, В.И. Григорьеву и М.И. Каганову, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд полезных замечаний.

Июль 1981 *Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый том «Теоретической физики» посвящен теории электромагнитных полей в материальных средах и теории макроскопических электрических и магнитных свойств вещества. Сюда относится, как это можно видеть из оглавления, весьма широкий круг вопросов.

При написании этой книги мы встретились со значительными трудностями, связанными с необходимостью какого-то отбора из имеющегося огромного материала, а также с тем, что обычное изложение многих относящихся сюда вопросов не обладает должной степенью физической ясности, а зачастую даже содержит ошибки. Мы отдаем себе отчет в том, что и в предлагаемом изложении имеется еще много дефектов, которые мы рассчитываем исправить в дальнейшем, в следующих изданиях книги.

Мы багодарны проф. В.Л. Гинзбургу, прочитавшему книгу в рукописи и сделавшему ряд полезных замечаний. Мы благодарны также И.Е. Дзялошинскому и Л.П. Питаевскому за большую помощь, оказанную ими при чтении корректуры.

Москва, октябрь 1956 г. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Напряженность и индукция электрического поля: $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$.
Напряженность и индукция магнитного поля: $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$.
Напряженность внешнего электрического и магнитного поля: векторы $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$; абсолютные значения $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{H}$.
Диэлектрическая поляризация: $\mathbf{P}$.
Намагниченность: $\mathbf{M}$.
Полные электрический и магнитный моменты тела: $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ и $\boldsymbol{\mathscr{M}}$.
Диэлектрическая проницаемость: ε.
Диэлектрическая восприимчивость: $\varkappa$.
Магнитная проницаемость: μ.
Магнитная восприимчивость: χ.
Плотность тока: $\mathbf{j}$.
Проводимость: σ.
Абсолютная температура (в энергетических единицах): T.
Давление: P.
Объем: V.
Термодинамические величины, отнесенные к единице объема:

энтропия S,
внутренняя энергия U,
свободная энергия F,
термодинамический потенциал Φ.

Те же величины для тела в целом: $\mathscr{S}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$, $\varPhi$.
Химический потенциал: ζ.
Комплексный периодический (по времени) множитель берется везде в виде $e^{-i\omega t}$.
Элементы объема: dV или d^3x; элемент поверхности: $d\mathbf{f}$.

Везде принято правило суммирования по дважды повторяющимся векторным и тензорным трехмерным (латинские буквы) и двумерным (греческие буквы) индексам.

Ссылки на параграфы и формулы других томов этого курса снабжены римскими цифрами: I — «Механика», 1989; II — «Теория поля», 1988; III — «Квантовая механика», 1989; IV — «Квантовая электродинамика», 1989; V — «Статистическая физика, часть 1», 1995; VI — «Гидродинамика», 1988; VII — «Теория упругости», 1987; IX — «Статистическая физика, часть 2», 2000; X — «Физическая кинетика», 1979.

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ

§ 1. Электростатическое поле проводников

Предмет макроскопической электродинамики составляет изучение электромагнитных полей в пространстве, заполненном веществом. Как и всякая макроскопическая теория, электродинамика оперирует физическими величинами, усредненными по «физически бесконечно малым» элементам объема, не интересуясь микроскопическими колебаниями этих величин, связанными с молекулярным строением вещества. Так, вместо истинного «микроскопического» значения напряженности электрического поля $\mathbf{e}$ мы будем рассматривать ее усредненное значение, обозначив его как

$$\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{E}. \tag{1.1}$$

Основные уравнения электродинамики сплошных сред получаются путем усреднения уравнений электромагнитного поля в пустоте. Такой переход от микро- к макроскопическим уравнениям был впервые произведен *Лоренцем* (*H.A. Lorentz*, 1902).

Вид уравнений макроскопической электродинамики и смысл входящих в них величин существенно зависят от физической природы материальной среды, а также от характера изменения поля со временем. Поэтому представляется рациональным производить вывод и исследование этих уравнений для каждой категории физических объектов в отдельности.

Как известно, в отношении электрических свойств все тела делятся на две категории — *проводники* и *диэлектрики*, причем первые отличаются от вторых тем, что всякое электрическое поле вызывает в них движение зарядов — электрический ток [1]).

Мы начнем с изучения постоянных электрических полей, создаваемых заряженными проводниками (*электростатика* проводников). Из основного свойства проводников, прежде всего, следует, что в электростатическом случае напряженность электрического поля внутри них должна быть равной нулю. Действительно, отличная от нуля напряженность $\mathbf{E}$ привела бы к воз-

[1]) Проводник предполагается здесь однородным (по своему составу, температуре и т. п.). В неоднородном проводнике, как мы увидим в дальнейшем, могут существовать поля, не вызывающие движения зарядов.

никновению тока; между тем распространение тока в проводнике связано с диссипацией энергии и потому не может само по себе (без внешних источников энергии) поддерживаться в стационарном состоянии.

Отсюда в свою очередь следует, что все заряды в проводнике должны быть распределены по его поверхности: наличие зарядов в объеме проводника непременно привело бы к возникновению электрического поля в нем [1]); распределение же зарядов по поверхности может быть осуществлено таким образом, чтобы создаваемые ими внутри проводника поля взаимно компенсировались.

Тем самым задача электростатики проводников сводится к определению электрического поля в пустоте, вне проводников, и к определению распределения зарядов по поверхности проводников.

В точках, не слишком близких к поверхности тела, среднее поле $\mathbf{E}$ в пустоте фактически совпадает с истинным полем $\mathbf{e}$. Эти две величины отличаются друг от друга лишь в непосредственной близости к телу, где еще сказывается влияние нерегулярных молекулярных полей. Последнее обстоятельство, однако, не отражается на виде усредненных уравнений поля. Точные микроскопические уравнения Максвелла в пустоте имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \tag{1.3}$$

($\mathbf{h}$ — микроскопическая напряженность магнитного поля). Поскольку среднее магнитное поле предполагается отсутствующим, то и производная $\partial \mathbf{h}/\partial t$ обращается в результате усреднения в нуль, и мы находим, что постоянное электрическое поле в пустоте удовлетворяет обычным уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{1.4}$$

т. е. является потенциальным полем с потенциалом φ, связанным с напряженностью соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{1.5}$$

и удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1.6}$$

Граничные условия для поля $\mathbf{E}$ на поверхности проводника следуют из самого уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, справедливого (как и исходное уравнение (1.3)) и вне, и внутри тела. Выберем ось z по

[1]) Это ясно видно из приведенного ниже уравнения (1.8).

направлению нормали **n** к поверхности проводника в некоторой его точке. Компонента E_z поля в непосредственной близости к поверхности тела достигает очень больших значений (ввиду наличия здесь конечной разности потенциалов на очень малых расстояниях — см. ниже, § 23). Это большое поле является свойством самой поверхности и зависит от ее физических свойств, но не имеет отношения к рассматриваемой нами электростатической задаче, так как быстро спадает уже на расстояниях, сравнимых с атомными. Существенно, однако, что если поверхность однородна, производные $\partial E_z/\partial x$, $\partial E_z/\partial y$ вдоль поверхности остаются конечными, несмотря на обращение самого E_z в бесконечность. Поэтому из

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

следует, что $\partial E_y/\partial z$ конечно. Это значит, что E_y непрерывно на поверхности (так как скачок E_y означал бы обращение производной $\partial E_y/\partial z$ в бесконечность). То же самое относится и к E_x, а поскольку внутри проводника вообще $\mathbf{E} = 0$, то мы приходим к выводу, что касательные компоненты внешнего поля на его поверхности должны обращаться в нуль:

$$\mathbf{E}_t = 0. \tag{1.7}$$

Таким образом, электростатическое поле должно быть нормальным к поверхности проводника в каждой ее точке. Поскольку $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, то это значит, что потенциал поля должен быть постоянным вдоль всей поверхности каждого данного проводника. Другими словами, поверхность однородного проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность электростатического поля.

Нормальная же к поверхности компонента поля весьма просто связана с плотностью распределенного по поверхности заряда. Эта связь получается из общего электродинамического уравнения $\operatorname{div}\mathbf{e} = 4\pi\rho$, которое после усреднения принимает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\overline{\rho}, \tag{1.8}$$

где $\overline{\rho}$ — средняя плотность заряда. В интегральном виде это уравнение означает, как известно, что поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в ограниченном этой поверхностью объеме (умноженному на 4π). Применив эту теорему к элементу объема, заключенному между двумя бесконечно близкими единичными площадками, примыкающими с обеих сторон к поверхности проводника, и учитывая, что на внутренней площадке $\mathbf{E} = 0$, найдем, что $E_n = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность заряда, т. е. заряд на единице площади поверхности проводника. Таким образом,

распределение зарядов по поверхности проводника дается формулой

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \tag{1.9}$$

(производная от потенциала берется в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к поверхности). Полный заряд проводника

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, df, \tag{1.10}$$

где интеграл берется по всей его поверхности.

Распределение потенциала во всяком электростатическом поле обладает следующим замечательным свойством: функция $\varphi(x, y, z)$ может достигать максимального или минимального значения лишь на границах области поля. Эту теорему можно сформулировать и как утверждение о невозможности устойчивого равновесия внесенного в поле пробного заряда e, так как нет такой точки, в которой бы его потенциальная энергия $e\varphi$ имела минимум.

Доказательство теоремы весьма просто. Допустим, например, что в некоторой точке A (не находящейся на границе поля) потенциал имеет максимум. Тогда можно окружить точку A такой малой замкнутой поверхностью, на которой везде производная по нормали $\partial \varphi / \partial n < 0$. Следовательно, и интеграл по этой поверхности $\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, df < 0$. Но в силу уравнения Лапласа

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, df = \int \Delta \varphi \, dV = 0,$$

в противоречии с предположением.

§ 2. Энергия электростатического поля проводников

Вычислим полную энергию $\mathscr{U}$ электростатического поля заряженных проводников [1]):

$$\mathscr{U} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 \, dV, \tag{2.1}$$

где интеграл берется по всему объему пространства вне проводников. Преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \operatorname{grad} \varphi \, dV = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div} (\varphi \mathbf{E}) \, dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV.$$

---

[1]) Квадрат $\mathbf{E}^2$ не совпадает со средним квадратом $\overline{\mathbf{e}^2}$ истинного поля вблизи поверхности проводника, а также и в объеме последнего (где $\mathbf{E} = 0$, но, разумеется, $\overline{\mathbf{e}^2} \neq 0$). Вычисляя интеграл (2.1), мы тем самым отвлекаемся от не интересующей нас здесь внутренней энергии проводника как такового и от энергии сродства зарядов к его поверхности.

Второй интеграл обращается в нуль в силу (1.4), а первый преобразуется в интеграл по ограничивающим поле поверхностям проводников и по бесконечно удаленной поверхности. Но последний интеграл обращается в нуль в силу достаточно быстрого убывания поля на бесконечности (предполагается, что произвольная постоянная в φ выбрана таким образом, что $\varphi = 0$ на бесконечности). Нумеруя проводники индексом a и обозначая постоянные значения потенциала вдоль каждого из них через φ_a, получим [1])

$$\mathscr{U} = \frac{1}{8\pi}\sum_a \oint \varphi E_n\, df = \frac{1}{8\pi}\sum_a \varphi_a \oint E_n\, df.$$

Наконец, вводя полные заряды проводников e_a согласно (1.10), получим окончательно выражение

$$\mathscr{U} = \frac{1}{2}\sum_a e_a \varphi_a, \tag{2.2}$$

аналогичное выражению для энергии системы точечных зарядов.

Заряды и потенциалы проводников не могут быть заданы одновременно произвольным образом; между ними существует определенная связь. В силу линейности и однородности уравнений поля в пустоте эта связь тоже должна быть линейной, т. е. выражаться соотношениями вида

$$e_a = \sum_b C_{ab}\varphi_b, \tag{2.3}$$

где величины C_{aa}, C_{ab} имеют размерность длины и зависят от формы и взаимного расположения проводников. Величины C_{aa} называют *коэффициентами емкости*, а величины C_{ab} $(a \neq b)$ — *коэффициентами электростатической индукции*. В частности, если имеется всего один проводник, то $e = C\varphi$, где C — емкость; порядок величины емкости совпадает с линейными размерами тела. Обратные выражения для потенциалов через заряды:

$$\varphi_a = \sum_b C^{-1}_{ab} e_b, \tag{2.4}$$

где коэффициенты C^{-1}_{ab} составляют матрицу, обратную матрице коэффициентов C_{ab}.

---

[1]) При преобразовании объемного интеграла в поверхностный здесь и ниже надо иметь в виду, что E_n есть составляющая поля по направлению нормали, внешней по отношению к проводнику; это направление противоположно направлению нормали, внешней по отношению к области объемного интегрирования, т. е. пространства вне проводников. В связи с этим при преобразовании изменен знак интеграла.

Вычислим изменение энергии системы проводников при бесконечно малом изменении их зарядов или потенциалов. Варьируя исходное выражение (2.1), имеем

$$\delta\mathscr{U} = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\,\delta\mathbf{E}\,dV.$$

Это выражение можно преобразовать далее двумя эквивалентными способами. Подставив $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ и имея в виду, что варьированное поле, как и исходное, удовлетворяет уравнениям (1.4) (так что $\operatorname{div}\,\delta\mathbf{E} = 0$), пишем

$$\delta\mathscr{U} = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\varphi\cdot\delta\mathbf{E}\,dV = \\ = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\,\delta\mathbf{E})\,dV = \frac{1}{4\pi}\sum_a \varphi_a \oint \delta E_n\,df,$$

или окончательно

$$\delta\mathscr{U} = \sum_a \varphi_a\delta e_a, \tag{2.5}$$

т. е. получаем изменение энергии, выраженное через изменения зарядов. Этот результат, впрочем, заранее очевиден как работа, которую необходимо произвести над бесконечно малыми зарядами δe_a, чтобы перенести их к заданным проводникам из бесконечности, где потенциал поля равен нулю.

С другой стороны, можно написать

$$\delta\mathscr{U} = -\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\operatorname{grad}\delta\varphi\,dV = \\ = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{E}\,\delta\varphi)\,dV = \frac{1}{4\pi}\sum_a \delta\varphi_a \oint E_n\,df,$$

или

$$\delta\mathscr{U} = \sum_a e_a\delta\varphi_a, \tag{2.6}$$

т. е. изменение энергии выражено через изменения потенциалов проводников.

Формулы (2.5), (2.6) показывают, что, дифференцируя энергию $\mathscr{U}$ по величинам зарядов, мы получаем потенциалы проводников, а производные от $\mathscr{U}$ по потенциалам дают значения зарядов:

$$\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial e_a} = \varphi_a, \qquad \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\varphi_a} = e_a. \tag{2.7}$$

С другой стороны, потенциалы и заряды являются линейными функциями друг друга. С помощью (2.3) имеем

$$\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b} = \frac{\partial e_b}{\partial\varphi_a} = C_{ba},$$

а изменив порядок дифференцирования, мы получили бы C_{ab}. Отсюда видно, что

$$C_{ab} = C_{ba} \tag{2.8}$$

(и, аналогично, $C^{-1}_{ab} = C^{-1}_{ba}$). Энергия $\mathscr{U}$ может быть представлена в виде квадратичной формы потенциалов или зарядов:

$$\mathscr{U} = \frac{1}{2}\sum_{a,b} C_{ab}\varphi_a\varphi_b = \frac{1}{2}\sum_{a,b} C^{-1}_{ab} e_a e_b. \tag{2.9}$$

Эта квадратичная форма, как и исходное выражение (2.1), должна быть существенно положительной. Из этого условия возникают определенные неравенства, которым удовлетворяют коэффициенты C_{ab}. В частности, все коэффициенты емкости положительны:

$$C_{aa} > 0 \tag{2.10}$$

(а также и $C^{-1}_{aa} > 0$) [1]).

Напротив, все коэффициенты электростатической индукции отрицательны:

$$C_{ab} < 0 \quad (a \neq b). \tag{2.11}$$

Это обстоятельство очевидно уже из следующих простых соображений. Представим себе, что все проводники, за исключением лишь одного (a-го), заземлены, т. е. их потенциалы равны нулю. Тогда заряд, индуцированный заряженным (a-м) проводником на каком-либо проводнике b, равен $e_b = C_{ba}\varphi_a$. Знак индуцированного заряда противоположен знаку индуцирующего потенциала, а потому $C_{ab} < 0$. В этом можно убедиться, исходя из того, что потенциал электростатического поля не может достигать максимального и минимального значений вне проводников. Пусть, например, потенциал единственного незаземленного проводника $\varphi_a > 0$. Тогда потенциал будет положителен и во всем пространстве, так чтобы его наименьшее значение (нуль) достигалось только на заземленных проводниках. Отсюда следует, что на поверхности последних нормальная производная потенциала $\partial\varphi/\partial n$ будет положительной, а их заряд согласно (1.10) — отрицательным.

С помощью аналогичных рассуждений можно убедиться в том, что $C^{-1}_{ab} > 0$.

Энергия электростатического поля проводников обладает свойством экстремальности, имеющим, правда, не столько физический, сколько формальный характер. Для вывода этого свойства представим себе, что распределение зарядов в проводни-

---

[1]) Укажем также, что среди условий положительности формы (2.9) фигурируют и неравенства

$$C_{aa}C_{bb} > C^2_{ab}.$$

ках подвергается бесконечно малому изменению (при неизменном полном заряде каждого проводника), в результате которого заряды могут попасть и внутрь проводников; при этом мы отвлекаемся от того, что в действительности такое распределение зарядов не может быть стационарным. Рассмотрим соответствующее изменение интеграла

$$\mathscr{U} = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV,$$

который надо представлять себе теперь распространенным по всему пространству, включая объем самих проводников (так как после смещения зарядов поле $\mathbf{E}$ будет, вообще говоря, отличным от нуля и внутри проводников). Пишем

$$\delta\mathscr{U} = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\varphi\cdot\delta\mathbf{E}\,dV = \\ = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\,\delta\mathbf{E})\,dV + \frac{1}{4\pi}\int \varphi\operatorname{div}\delta\mathbf{E}\,dV.$$

Первый интеграл, будучи преобразован в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, исчезает. Во втором в силу уравнения (1.8) имеем $\operatorname{div}\delta\mathbf{E} = 4\pi\delta\overline{\rho}$, так что

$$\delta\mathscr{U} = \int \varphi\delta\overline{\rho}\,dV.$$

Но этот интеграл обращается в нуль, если φ соответствует истинному электростатическому полю: в этом случае внутри каждого проводника $\varphi = \mathrm{const}$, а интегралы $\int\delta\overline{\rho}\,dV$ по их объемам равны нулю, поскольку полные заряды проводников остаются неизменными.

Таким образом, энергия истинного электростатического поля минимальна[1]) по сравнению с энергией полей, которые были бы созданы всяким другим распределением зарядов по объему проводников (*теорема Томсона*).

Из этой теоремы вытекает, в частности, такое следствие: введение незаряженного проводника в поле заданных зарядов (заряженных проводников) уменьшает полную энергию поля. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить энергию истинного поля, которое установится после введения проводника, с энергией фиктивного поля, соответствующего отсутствию индуцированных зарядов на введенном проводнике. Первая, будучи минимально возможной, меньше второй, которая в то же время совпадает с энергией первоначального поля (так как при отсутствии индуцированных зарядов поле «проникло» бы внутрь

[1]) Мы не будем приводить здесь простых рассуждений, показывающих, что речь идет именно о минимуме, а не об экстремуме вообще.

проводника, не изменившись). Этот результат можно сформулировать и другим образом: незаряженный проводник, расположенный вдали от системы заданных зарядов, притягивается к ним.

Наконец, можно показать, что проводник (заряженный или незаряженный), внесенный в электростатическое поле, вообще не может находиться в устойчивом равновесии под влиянием одних только электрических сил. Это утверждение обобщает указанную в конце предыдущего параграфа аналогичную теорему для точечного заряда и может быть получено путем совместного применения последней и теоремы Томсона; мы не станем приводить здесь соответствующих рассуждений.

Формула (2.9) удобна для вычисления энергии системы проводников, находящихся на конечных расстояниях друг от друга. Особого рассмотрения, однако, требует энергия незаряженного проводника, находящегося в однородном внешнем поле $\mathfrak{E}$, которое можно представлять себе созданным зарядами, находящимися на бесконечности. Согласно (2.2) эта энергия равна $\mathscr{U} = e\varphi/2$, где e — удаленный заряд, создающий поле, а φ — потенциал поля, создаваемого рассматриваемым проводником в точке нахождения заряда e (из $\mathscr{U}$ исключена энергия заряда e в его собственном поле, как не имеющая отношения к интересующей нас энергии проводника). Заряд проводника равен нулю, но под влиянием внешнего поля проводник приобретает дипольный электрический момент, который мы обозначим через $\mathscr{P}$. Потенциал поля электрического диполя на большом расстоянии $\mathbf{r}$ от него есть, как известно, $\varphi = \mathscr{P}\mathbf{r}/r^3$. Поэтому

$$\mathscr{U} = \frac{e}{2r^3}\mathscr{P}\mathbf{r}.$$

Но $-e\mathbf{r}/r^3$ является в то же время напряженностью $\mathfrak{E}$ поля, создаваемого зарядом e. Таким образом,

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{2}\mathscr{P}\mathfrak{E}. \tag{2.12}$$

В силу линейности всех уравнений поля очевидно, что компоненты дипольного момента $\mathscr{P}$ являются линейными функциями компонент напряженности $\mathfrak{E}$. Коэффициенты пропорциональности между $\mathscr{P}$ и $\mathfrak{E}$ имеют размерность куба длины и поэтому пропорциональны объему проводника:

$$\mathscr{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k, \tag{2.13}$$

где коэффициенты α_{ik} зависят только от формы тела. Совокупность величин $V\alpha_{ik}$ составляет *тензор поляризуемости* тела. Этот тензор симметричен: $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ (доказательство этого утверждения дано в § 11). Соответственно, энергия (2.12) представится в виде

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \tag{2.14}$$

Задачи

1. Выразить взаимную емкость C системы из двух проводников (с зарядами $\pm e$) через коэффициенты C_{ab}.

Решение. Взаимная емкость двух проводников определяется как коэффициент в соотношении $e = C(\varphi_2 - \varphi_1)$, а энергия системы выражается через C через $\mathscr{U} = e^2/2C$. Сравнив с (2.9), получим

$$\frac{1}{C} = C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1} = \frac{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}.$$

2. Точечный заряд e расположен в точке O вблизи системы заземленных проводников и индуцирует на них заряды e_a. Если бы заряд e отсутствовал, а один из проводников (a-й) имел потенциал φ'_a (остальные по-прежнему заземлены), то потенциал поля в точке O был бы φ'_0. Выразить заряды e_a через φ'_a и φ'_0.

Решение. Если заряды e_a на проводниках сообщают им потенциалы φ_a, а заряды e'_a — потенциалы φ'_a, то из (2.3) следует, что

$$\sum_a \varphi_a e'_a = \sum_{a,b} \varphi_a C_{ab} \varphi'_b = \sum_a \varphi'_a e_a.$$

Применим это соотношение к двум состояниям системы, составленной из всех проводников и точечного заряда e (рассматривая последний как предельный случай проводника малого размера). В одном состоянии имеется заряд e, проводники имеют заряды e_a и потенциалы $\varphi_a = 0$. В другом состоянии заряд $e = 0$, а один из проводников имеет потенциал $\varphi'_a \neq 0$. Тогда получим $e\varphi'_0 + e_a\varphi'_a = 0$, откуда

$$e_a = -\frac{e\varphi'_0}{\varphi'_a}.$$

Так, если заряд e находится на расстоянии r от центра заземленного проводящего шара радиуса a ($r > a$), то $\varphi'_0 = \varphi'_a a/r$ и заряд, индуцированный на шаре,

$$e_a = -\frac{ea}{r}.$$

В качестве другого примера рассмотрим заряд e, находящийся между двумя заземленными концентрическими сферами радиусов a и b на расстоянии r от центра ($a < r < b$). Если наружная сфера заземлена, а внутренняя заряжена до потенциала φ'_a, то потенциал на расстоянии r равен

$$\varphi'_0 = \varphi'_a \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b}.$$

Поэтому заряд, индуцированный на внутренней сфере зарядом e, равен

$$e_a = -e\frac{a(b-r)}{r(b-a)}.$$

Аналогично, заряд, индуцированный на внешней сфере,

$$e_b = -e\frac{b(r-a)}{r(b-a)}.$$

3. Два проводника с емкостями C_1 и C_2 помещены на расстоянии r друг от друга, большом по сравнению с их собственными размерами. Определить коэффициенты C_{ab}.

Р е ш е н и е. Если проводник *1* несет заряд e_1, а проводник *2* не заряжен, то в первом приближении $\varphi_1 = e_1/C$, $\varphi_2 = e_1/r$; при этом мы пренебрегаем изменением поля вдоль проводника *2* и его поляризацией. Таким образом, $C_{11}^{-1} = 1/C_1$, $C_{12}^{-1} = 1/r$ и, аналогично, $C_{22}^{-1} = 1/C_2$. Отсюда находим для коэффициентов C_{ab} [1]):

$$C_{11} = C_1\left(1 + \frac{C_1C_2}{r^2}\right), \quad C_{12} = -\frac{C_1C_2}{r}, \quad C_{22} = C_2\left(1 + \frac{C_1C_2}{r^2}\right).$$

4. Определить емкость C кольца из тонкого провода кругового сечения (радиус кольца b, радиус сечения провода a; $b \gg a$).

Р е ш е н и е. Ввиду тонкости кольца поле вблизи его поверхности совпадает с полем, которое создавалось бы тем же зарядом, распределенным по осевой линии кольца (это было бы точным для прямого цилиндра). Поэтому потенциал самого кольца

$$\varphi_a = \frac{e}{2\pi b}\oint\frac{dl}{r},$$

где r — расстояние от данной точки поверхности кольца до элемента dl его осевой линии, по которой производится интегрирование. Разобьем интеграл на две части по областям $r < \Delta$ и $r > \Delta$, где Δ — некоторое расстояние, такое, что $a \ll \Delta \ll b$. Тогда при $r < \Delta$ можно считать участок кольца прямым и потому

$$\int\limits_{\Delta > r}\frac{dl}{r} = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\frac{dl}{\sqrt{l^2 + a^2}} \approx 2\ln\frac{2\Delta}{a}.$$

В области же $r > \Delta$ можно пренебречь толщиной провода, т. е. считать r просто расстоянием между двумя точками осевой линии кольца. Тогда

$$\int\limits_{r > \Delta}\frac{dl}{r} = 2\int\limits_{\varphi_0}^{\pi}\frac{b\,d\varphi}{2b\sin(\varphi/2)} = -2\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{4},$$

где φ — центральный угол, на который опирается хорда r, а нижний предел интегрирования определяется из $2b\sin(\varphi_0/2) = \Delta$, откуда $\varphi_0 \approx \Delta/b$. При сложении обеих частей интеграла величина Δ выпадает, и окончательно получаем для емкости кольца $C = e/\varphi_a$ следующее выражение:

$$C = \frac{\pi b}{\ln(8b/a)}.$$

§ 3. Методы решения электростатических задач

Общие методы решения уравнения Лапласа при заданных граничных условиях на тех или иных поверхностях изучаются в соответствующем разделе математической физики, и полное их изложение не является нашей целью. Мы ограничимся здесь

[1]) Следующие члены разложения имеют в общем случае порядок (по $1/r$) на 1 более высокий, чем выписанные. Если, однако, отсчитывать r как расстояние между «центрами зарядов» обоих тел (для сфер — между их геометричесхими центрами), то порядок следующих членов будет выше на 2.

лишь указанием некоторых более простых приемов и решением ряда типичных задач, имеющих самостоятельный интерес [1]).

Метод изображений. Определение поля, создаваемого точечным зарядом e, расположенным вне проводящей среды, заполняющей полупространство, является простейшим примером применения так называемого метода изображений. Идея этого метода состоит в подборе таких дополнительных фиктивных точечных зарядов, которые вместе с данными зарядами создавали бы поле, для которого поверхность заданного проводника совпадала бы с одной из эквипотенциальных поверхностей поля. В данном случае это достигается введением фиктивного заряда $e' = -e$, расположенного в точке, представляющей собой зеркальное отражение точки e в граничной плоскости проводящей среды. Потенциал поля заряда e и его «изображения» e' равен

$$\varphi = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right), \tag{3.1}$$

где r и r' — расстояния точки наблюдения от зарядов e и e'. На граничной плоскости $r = r'$ и потенциал имеет постоянное значение $\varphi = 0$, так что необходимое граничное условие действительно выполняется и (3.1) дает решение поставленной задачи. Отметим, что заряд e притягивается к проводнику с силой $e^2/(2a)^2$ (*сила изображения*), а энергия взаимодействия равна $-e^2/(4a)$.

Распределение на граничной плоскости поверхностных зарядов, индуцированных точечным зарядом e, дается формулой

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{r=r'} = -\frac{e}{2\pi}\frac{a}{r^3}, \tag{3.2}$$

где a — расстояние от заряда до плоскости. Легко убедиться в том, что полный заряд на этой плоскости равен

$$\int \sigma\, df = -e,$$

как и должно быть.

Общий заряд, индуцированный посторонними зарядами на первоначально не заряженном изолированном проводнике, разумеется, остается равным нулю. Поэтому, если в данном случае проводящая среда (в действительности — проводник больших размеров) изолирована, то надо представлять себе, что одновременно с зарядом $-e$ индуцируется заряд $+e$, который, однако,

[1]) Решение значительного числа более сложных задач можно найти в книгах: *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. — М.: ИЛ, 1954. (*Smythe W.R.* Static and dynamic electricity. — N.Y.: McGraw-Hill, 1950); *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Изд. АН СССР, 1948.

будучи распределен по поверхности большого тела, имеет исчезающую плотность.

Далее, рассмотрим более сложную задачу о поле, создаваемом точечным зарядом e, находящимся вблизи шарового проводника. Для решения этой задачи воспользуемся следующим результатом, который легко проверить непосредственными вычислениями. Потенциал поля, создаваемого двумя точечными зарядами e и $-e'$,

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'}$$

обращается в нуль на сферической поверхности радиуса R, центр которой лежит на продолжении прямой, соединяющей точки e и e', на расстоянии l и l' от этих точек, причем l, l', R удовлетворяют равенствам $l/l' = (e/e')^2$, $R^2 = ll'$.

Предположим сначала, что шаровой проводник поддерживается при постоянном потенциале $\varphi = 0$ (шар заземлен). Тогда поле, создаваемое вне шара точечным зарядом e, находящимся на расстоянии l от центра шара (в точке A на рис. 1), будет совпадать с полем, создаваемым системой двух зарядов — данным зарядом e и фиктивным зарядом $-e'$, помещенным внутри шара (точка A') на расстоянии l' от его центра, причем

$$l' = \frac{R^2}{l}, \quad e' = \frac{eR}{l}. \tag{3.3}$$

Потенциал этого поля

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{eR}{lr'} \tag{3.4}$$

(см. рис. 1). На поверхности шара индуцируется при этом отличный от нуля полный заряд, равный $-e'$. Энергия взаимодействия заряда с шаром равна

$$\mathscr{U} = -\frac{ee'}{2(l - l')} = -\frac{e^2R}{2(l^2 - R^2)}, \tag{3.5}$$

и заряд притягивается к шару с силой

$$F = -\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial l} = -\frac{e^2lR}{(l^2 - R^2)^2}.$$

Если же проводящая сфера поддерживается при равном нулю полном заряде (изолированный незаряженный шар), то надо ввести еще один фиктивный заряд таким образом, чтобы полный индуцированный на поверхности шара заряд оказался равным нулю, причем не должно нарушаться постоянство потенциала на этой поверхности. Это достигается помещением заряда $+e'$ в центр шара. Потенциал искомого поля определится тогда формулой

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} + \frac{e'}{r_0}. \tag{3.6}$$

Энергия взаимодействия в этом случае будет

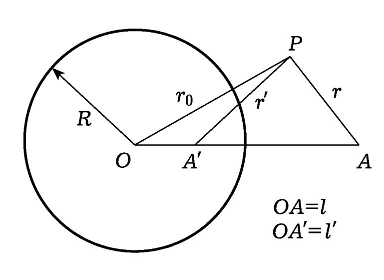


Рис. 1

$$\mathscr{U} = \frac{ee'}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l-l'}\right) = -\frac{e^2R^3}{2l^2(l^2-R^2)}. \tag{3.7}$$

Наконец, если заряд e находится в сферической полости в проводящей среде (в точке A', рис. 1), то поле внутри полости совпадает с полем, которое создавалось бы зарядом e и его «изображением» в точке A вне сферы (независимо от того, заземлен проводник или изолирован):

$$\varphi = \frac{e}{r'} - \frac{eR}{l'r}. \tag{3.8}$$

Метод инверсии. Существует простой метод, который в ряде случаев позволяет по известному решению одной электростатической задачи находить решение другой задачи. Основанием этого метода является инвариантность уравнения Лапласа по отношении к определенному преобразованию переменных.

В сферических координатах уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega\varphi = 0,$$

где посредством Δ_Ω обозначена угловая часть оператора Лапласа. Легко убедиться в том, что это уравнение сохраняет свою форму, если вместо переменной r ввести новую переменную r' согласно

$$r = \frac{R^2}{r'} \tag{3.9}$$

(*преобразование инверсии*) и одновременно заменить неизвестную функцию φ согласно

$$\varphi = \frac{r'}{R}\varphi'. \tag{3.10}$$

Здесь R — некоторая постоянная с размерностью длины (*радиус инверсии*). Таким образом, если функция $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция

$$\varphi'(\mathbf{r}') = \frac{R}{r'}\varphi\left(\frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}'\right) \tag{3.11}$$

тоже есть решение этого уравнения.

Предположим, что нам известно решение задачи об электростатическом поле, создаваемом некоторой системой проводников, которые находятся при одном и том же потенциале φ_0, и системой точечных зарядов. Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ обычно определяют так, чтобы он обращался в нуль на бесконечности. Здесь, однако, мы

определим $\varphi(\mathbf{r})$ так, чтобы на бесконечности эта функция стремилась к $-\varphi_0$; тогда на проводниках $\varphi = 0$.

Выясним теперь, какая электростатическая задача будет решаться преобразованной функцией (3.11). Прежде всего, меняются фигуры всех протяженных проводников и их взаимное расположение. Граничное условие постоянства потенциала на поверхности проводников автоматически выполняется, так как при $\varphi = 0$ будет и $\varphi' = 0$. Далее, меняются расположение и величины всех точечных зарядов. Заряд, находящийся в точке $\mathbf{r}_0$, переходит в точку $\mathbf{r}'_0 = (R^2/r_0^2)\mathbf{r}_0$ и приобретает величину e', которую можно определить следующим образом. При $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$ потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ обращается в бесконечность по закону $\varphi = e/|\delta\mathbf{r}|$, где $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. С другой стороны, дифференцируя соотношение $\mathbf{r} = (R^2/r'^2)\mathbf{r}'$, найдем, что абсолютные значения малых разностей $\delta\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0$ связаны друг с другом соотношением

$$(\delta\mathbf{r})^2 = \frac{R^4}{r_0'^4}(\delta\mathbf{r}')^2.$$

Поэтому при $\mathbf{r}' \to \mathbf{r}'_0$ функция φ' стремится к бесконечности по закону

$$\varphi' = \frac{R}{r'_0}\frac{e}{|\delta\mathbf{r}|} = \frac{er'_0}{R|\delta\mathbf{r}'|},$$

соответствующему заряду

$$e = \frac{er'_0}{R} = \frac{eR}{r_0}. \tag{3.12}$$

Наконец, рассмотрим поведение функции $\varphi'(\mathbf{r}')$ вблизи начала координат. Точке $\mathbf{r}' = 0$ соответствует $\mathbf{r} \to \infty$. Но при $\mathbf{r} \to \infty$ функция $\varphi(\mathbf{r})$ стремится к $-\varphi_0$. Поэтому при $\mathbf{r}' \to 0$ функция φ' обращается в бесконечность по закону

$$\varphi' = -\frac{R\varphi_0}{r'}.$$

Это значит, что в точке $r' = 0$ находится заряд $e_0 = -R\varphi_0$.

Укажем, как преобразуются при инверсии некоторые геометрические фигуры. Сферическая поверхность радиуса a с центром в точке $\mathbf{r}_0$ дается уравнением

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 = a^2.$$

Произведя инверсию, получим уравнение

$$\left(\frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\right)^2 = a^2,$$

которое после умножения на r'^2 и перегруппировки членов может быть приведено к виду $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)^2 = a'^2$, где

$$\mathbf{r}'_0 = -\frac{R^2\mathbf{r}_0}{a^2 - r_0^2}, \quad a' = \frac{aR^2}{|a^2 - r_0^2|}. \tag{3.13}$$

Таким образом, мы снова получаем сферу другого радиуса a' и с центром в точке $\mathbf{r}'_0$. Если первоначальная сфера проходила через начало координат ($a = r_0$), то $a' = \infty$; в этом случае сфера преобразуется в плоскость, перпендикулярную к направлению $\mathbf{r}_0$ и проходящую на расстоянии

$$r'_0 - a' = \frac{R^2}{a + r_0} = \frac{R^2}{2a}$$

от начала координат.

Метод конформного отображения. Поле, зависящее только от двух декартовых координат (x, y), называют *плоским*. Мощным средством для решения плоских задач электростатики является теория функций комплексного переменного. Основания для применения этой теории заключаются в следующем.

Электростатическое поле в пустоте удовлетворяет двум уравнениям: $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Первое из них позволяет ввести потенциал поля согласно $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Второе же уравнение показывает, что наряду с φ можно ввести также и «векторный потенциал» поля $\mathbf{A}$ согласно $\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. В плоском случае вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости xy и зависит только от этих двух координат. Соответственно, вектор $\mathbf{A}$ можно выбрать так, чтобы он был везде направлен перпендикулярно к плоскости xy. Тогда компоненты напряженности выражаются в виде производных от φ или $\mathbf{A}$ согласно

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{3.14}$$

Но такие соотношения между производными функций φ и A с математической точки зрения совпадают с известными условиями Коши–Римана, выражающими тот факт, что комплексное выражение

$$w = \varphi - iA \tag{3.15}$$

является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$. Это значит, что функция $w(z)$ имеет в каждой точке определенную производную, не зависящую от направления, в котором она берется. Так, дифференцируя в направлении оси x, найдем, что

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial A}{\partial x},$$

или

$$\frac{dw}{dz} = -E_x + iE_y. \tag{3.16}$$

Функция w называется *комплексным потенциалом.*

Силовые линии поля определяются уравнением

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}.$$

Выражая E_x и E_y через производные от A, перепишем это уравнение в виде

$$dx\frac{\partial A}{\partial x} + dy\frac{\partial A}{\partial y} = dA = 0,$$

откуда $A(x, y) = \text{const}$. Таким образом, линии постоянных значений мнимой части функции $w(z)$ представляют собой силовые линии поля. Линии же постоянных значений ее вещественной части являются эквипотенциальными линиями. Взаимная ортогональность этих двух семейств линий обеспечивается уже исходными соотношениями (3.14), согласно которым

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Как вещественная, так и мнимая части аналитической функции $w(z)$ в равной степени удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому с тем же успехом можно принять $\operatorname{Im} w$ в качестве потенциала поля. Соответственно силовые линии будут тогда даваться уравнениями $\operatorname{Re} w = \text{const}$. Вместо (3.15) будем при этом иметь $w = A + i\varphi$.

Поток напряженности электрического поля через какой-либо отрезок эквипотенциальной линии дается интегралом

$$\int E_n\, dl = -\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dl,$$

где dl есть элемент эквипотенциальной линии, а $\mathbf{n}$ — направление нормали к ней. Согласно соотношениям (3.14) имеем $\partial\varphi/\partial n = -\partial A/\partial l$, причем выбор знака предполагает, что если смотреть в направлении $\mathbf{n}$, то положительное направление l — влево. Поэтому

$$\int E_n\, dl = \int \frac{\partial A}{\partial l}\, dl = A_2 - A_1,$$

где A_2 и A_1 — значения A на обоих концах отрезка. В частности, поток электрического поля через замкнутый контур равен $4\pi e$, где e — полный заряд, охватываемый этим контуром (отнесенный к единице длины проводников вдоль оси z). Поэтому

$$e = \frac{1}{4\pi}\Delta A, \tag{3.17}$$

где ΔA — изменение A при обходе замкнутой эквипотенциальной линии в направлении против часовой стрелки.

Простейшим примером комплексного потенциала является потенциал поля заряженной прямой нити (совпадающей с осью z). Напряженность этого поля дается формулами

$$E_r = \frac{2e}{r}, \quad E_\theta = 0,$$

где r, θ — полярные координаты в плоскости xy, а e — заряд единицы длины нити. Соответствующий комплексный потенциал

$$w = -2e\ln z = -2e\ln r - 2ie\theta. \tag{3.18}$$

Если же заряженная нить проходит не через начало координат, а через точку (x_0, y_0), то комплексный потенциал

$$w = -2e\ln(z - z_0), \tag{3.19}$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$.

С математической точки зрения функциональное соотношение $w = w(z)$ осуществляет *конформное отображение* плоскости комплексного переменного z на плоскость комплексного переменного w. Пусть C есть контур сечения проводника в плоскости xy, а φ_0 — потенциал этого проводника. Из всего сказанного выше ясно, что задача об определении поля, создаваемого этим проводником, сводится к нахождению такой функции $w(z)$, которая отображала бы контур C в плоскости z на линию $w = \varphi_0$, параллельную оси ординат в плоскости w; тогда вещественная часть $\operatorname{Re} w$ даст потенциал рассматриваемого поля (если же функция $w(z)$ отображает контур C на линию, параллельную оси абсцисс, то потенциал дается функцией $\operatorname{Im} w$).

Задача о клине. Приведем здесь для справок формулы, определяющие поле, создаваемое точечным зарядом e, расположенным в пространстве между двумя пересекающимися проводящими полуплоскостями. Пусть ось z цилиндрической системы координат r, θ, z совпадает с линией края угла, причем угол θ отсчитывается от одной из его сторон; заряд e пусть находится в точке a, γ, 0 (рис. 2). Угол раствора α между плоскостями может быть как меньше, так и больше π; в последнем случае мы имеем дело с зарядом, расположенным вне проводящего клина.

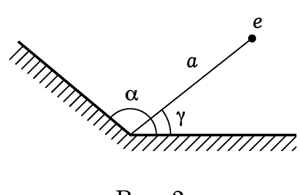


Рис. 2

Потенциал поля дается формулой

$$\varphi = \frac{e}{\alpha\sqrt{2ar}} \int_{\eta}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\zeta}{\alpha}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\alpha} - \cos\frac{\pi(\theta-\gamma)}{\alpha}} - \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\zeta}{\alpha}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\alpha} - \cos\frac{\pi(\theta+\gamma)}{\alpha}} \right] \times \\ \times \frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch}\eta}}, \tag{3.20}$$

$$\operatorname{ch}\eta = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar}, \quad \eta > 0;$$

на поверхности проводника, т. е. при $\theta = 0$, α, потенциал $\varphi = 0$ (*H.M. Macdonald*, 1895) [1]).

В частности, при $\alpha = 2\pi$ получается проводящая полуплоскость в поле точечного заряда. В этом случае интеграл (3.20) вычисляется в конечном виде и дает

$$\varphi\,|_{\alpha=2\pi} = \frac{e}{\pi}\left[\frac{1}{R}\arccos\left(-\frac{\cos\dfrac{\theta-\gamma}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{\eta}{2}}\right) - \frac{1}{R'}\arccos\left(-\frac{\cos\dfrac{\theta+\gamma}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{\eta}{2}}\right)\right], \tag{3.21}$$

$$R = [a^2 + r^2 + z^2 - 2ar\cos(\gamma - \theta)]^{1/2},$$
$$R' = [a^2 + r^2 + z^2 - 2ar\cos(\gamma + \theta)]^{1/2}.$$

В пределе, когда точка наблюдения поля стремится к точке нахождения заряда e, потенциал (3.21) принимает вид

$$\varphi = \frac{e}{R} + \varphi', \quad \varphi' = -\frac{e}{2\pi a}\left(1 + \frac{\pi - \gamma}{\sin\gamma}\right). \tag{3.22}$$

Первый член есть чисто кулоновский потенциал, обращающийся в бесконечность при $R \to 0$, а φ' — изменение потенциала в точке нахождения заряда под влиянием проводника. Энергия взаимодействия заряда с проводящей полуплоскостью есть

$$\mathscr{U} = \frac{e\varphi'}{2} = -\frac{e^2}{4\pi a}\left(1 + \frac{\pi - \gamma}{\sin\gamma}\right). \tag{3.23}$$

Задачи

1. Определить поле вокруг проводящего незаряженного шара (радиуса R), находящегося во внешнем однородном электрическом поле $\mathfrak{E}$.

Решение. Пишем потенциал в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где $\varphi_0 = -\mathfrak{E}\mathbf{r}$ — потенциал внешнего поля, а φ_1 — искомое изменение потенциала, вызываемое шаром. Ввиду симметрии шара функция φ_1 может зависеть лишь от одного постоянного вектора $\mathfrak{E}$. Единственное такое решение уравнения Лапласа, обращающееся в нуль на бесконечности, есть

$$\varphi_1 = -\mathrm{const}\cdot\mathfrak{E}\nabla\frac{1}{r} = \mathrm{const}\cdot\frac{\mathfrak{E}\mathbf{r}}{r^3}$$

(начало координат выбираем в центре шара). На поверхности шара φ должно быть постоянным; отсюда находим $\mathrm{const} = R^3$, так что

$$\varphi = -\mathfrak{E}r\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

---

[1]) Вывод этой формулы можно найти в книгах: *Батыгин В.В.*, *Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. — М.: Наука, 1970 (задачи 205, 206); *Macdonald H.M.* Electromagnetism. — L.: Bell, 1934.

(θ — угол между векторами $\mathfrak{E}$ и $\mathbf{r}$). Распределение зарядов по поверхности шара дается формулой

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{3\mathfrak{E}}{4\pi}\cos\theta;$$

полный заряд $e = 0$.

Дипольный момент шара проще всего найти путем сравнения φ_1 с потенциалом $\mathscr{P}\mathbf{r}/r^3$ поля электрического диполя; найдем

$$\mathscr{P} = R^3\mathfrak{E}.$$

2. То же для бесконечного цилиндра в поперечном однородном поле.

Р е ш е н и е. Вводим полярные координаты в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. Решение двумерного уравнения Лапласа, зависящее только от одного постоянного вектора, есть

$$\varphi_1 = \mathrm{const}\cdot\mathfrak{E}\nabla\ln r = \mathrm{const}\cdot\frac{\mathfrak{E}\mathbf{r}}{r^2}.$$

Складывая с $\varphi_0 = -\mathbf{r}\mathfrak{E}$ и положив $\mathrm{const} = R^2$, получим

$$\varphi = -\mathfrak{E}r\cos\theta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right).$$

Поверхностная плотность зарядов

$$\sigma = \frac{\mathfrak{E}}{2\pi}\cos\theta.$$

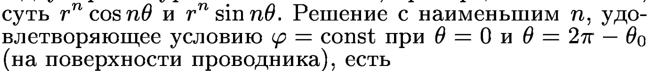
Дипольный момент $\mathscr{P}$ единицы длины цилиндра можно найти путем сравнения φ с потенциалом двумерного дипольного поля. Последний имеет вид

$$2\mathscr{P}\nabla\ln r = \frac{2\mathscr{P}\mathbf{r}}{r^2},$$

так что $\mathscr{P} = \mathfrak{E}R^2/2$.

3. Определить поле вблизи клиновидного края на проводнике.

Р е ш е н и е. Выбираем полярные координаты r, θ в плоскости, перпендикулярной к краю клина, и с началом в вершине образуемого им угла θ_0 (рис. 3). Угол θ пусть отсчитывается от одной из сторон клина; области вне проводника соответствуют значения $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \theta_0$. Вблизи края угла потенциал можно разложить по степеням r, причем нас интересует первый (после постоянного) член этого разложения, содержащий наиболее низкую степень r. Решения двумерного уравнения Лапласа, пропорциональные r^n, суть $r^n\cos n\theta$ и $r^n\sin n\theta$. Решение с наименьшим n, удовлетворяющее условию $\varphi = \mathrm{const}$ при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi - \theta_0$ (на поверхности проводника), есть



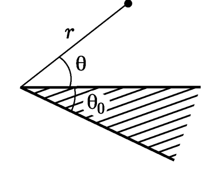


Рис. 3

$$\varphi = \mathrm{const}\cdot r^n\sin n\theta, \quad n = \frac{\pi}{2\pi - \theta_0}.$$

Напряженность поля, соответственно, зависит от r как r^{n-1}. При $\theta_0 < \pi$ ($n < 1$), следовательно, напряженность обращается вблизи края угла в бесконечность. В частности, для очень тонкого клина ($\theta_0 \ll 1$, $n \approx 1/2$) E растет при уменьшении r как $r^{-1/2}$. Вблизи же края клиновидной вогнутости на поверхности проводника ($\theta_0 > \pi$, $n > 1$) поле стремится к нулю.

Значение const может быть определено только из решения задачи для всего поля в целом. Так, для очень тонкого клина в поле точечного заряда e

предельный переход к малым r в (3.21) подтверждает закон

$$\varphi = \text{const} \cdot \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2},$$

причем

$$\text{const} = \frac{4e\sqrt{a}}{\pi(a^2+z^2)} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Слова «вблизи клиновидного края» означают в этом случае условие $r \ll a$, при выполнении которого можно пренебречь членом $\partial^2\varphi/\partial z^2$ в уравнении Лапласа.

4. Определить поле вблизи конца тонкого конического острия на поверхности проводника.

Решение. Выбираем сферические координаты с началом в вершине и с полярной осью вдоль оси конического острия. Угол раствора конуса пусть будет $2\theta_0 \ll 1$, так что области вне проводника соответствуют значения полярного угла $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Аналогично тому, как это делалось в предыдущей задаче, ищем решение (для переменной части потенциала), симметричное относительно оси конуса, в виде

$$\varphi = r^n f(\theta) \tag{1}$$

с наименьшим возможным n. Уравнение Лапласа

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0$$

после подстановки этого выражения дает

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df}{d\theta}\right) + n(n+1)f = 0. \tag{2}$$

Условие постоянства потенциала на поверхности острия означает, что должно быть $f(\theta_0) = 0$.

При малом θ_0 ищем решение, сделав предположение, что $n \ll 1$, а $f(\theta)$ имеет вид $f = \text{const}\cdot[1+\psi(\theta)]$, где $\psi \ll 1$ (при $\theta_0 \to 0$, т. е. для бесконечно тонкого острия, естественно ожидать, что φ стремится к постоянной почти во всей области вокруг острия). Для ψ получаем уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta}\right) = -n. \tag{3}$$

Решение, в котором ψ не имеет особенностей в области вне острия (в частности, при $\theta = \pi$), есть

$$\psi(\theta) = 2n \ln \sin \frac{\theta}{2}.$$

При $\theta \sim \theta_0 \ll 1$ функция $\psi(\theta)$ перестает быть малой. Тем не менее полученное выражение остается применимым, так как в этой области в силу малости θ можно вообще пренебречь вторым членом уравнения (2). Для определения постоянной n в первом приближении надо потребовать обращения в нуль найденной выше функции $f = 1+\psi$ при $\theta = \theta_0$. Таким образом, найдем [1])

$$n = -\frac{1}{2\ln\theta_0}.$$

[1]) Более точная формула, $n = 1/[2\ln(2/\theta_0)]$, содержащая коэффициент в большом логарифме, в действительности не может быть получена указанным простым методом. Более точное вычисление, однако, по случайным причинам приводит именно к этой формуле.

Напряженность поля неограниченно возрастает при приближении к концу острия как $r^{-(1-n)}$, т. е. в основном как $1/r$.

5. То же для тонкого конического углубления на поверхности проводника.

Р е ш е н и е. Области вне проводника теперь соответствуют значения $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$. Как и в предыдущей задаче, ищем φ в виде (1), но теперь будет $n \gg 1$. Поскольку по всей области поля теперь $\theta \ll 1$, то уравнение (2) можно написать в виде

$$\frac{1}{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\theta\frac{df}{d\theta}\right) + n^2 f = 0.$$

Это — уравнение Бесселя, и его решение, не имеющее особенностей в области поля, есть $J_0(n\theta)$. Значение n определяется как наименьший корень уравнения $J_0(n\theta_0) = 0$, откуда

$$n = 2{,}4/\theta_0.$$

6. Определить энергию притяжения электрического диполя к плоской поверхности проводника.

Р е ш е н и е. Выбираем ось x перпендикулярной к поверхности проводника и проходящей через точку нахождения диполя; вектор дипольного момента $\mathscr{P}$ пусть лежит в плоскости xy. «Изображение» диполя находится в точке $-x$ и имеет дипольный момент $\mathscr{P}'_x = \mathscr{P}_x$, $\mathscr{P}'_y = -\mathscr{P}_y$. Искомая энергия притяжения вычисляется как энергия взаимодействия диполя с его «изображением» и равна

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{8x^3}(2\mathscr{P}_x^2 + \mathscr{P}_y^2).$$

7. Определить взаимную емкость единицы длины двух параллельных бесконечных цилиндрических проводников (радиусов a и b, расстояние между осями c) [1]).

Р е ш е н и е. Поле, создаваемое обоими цилиндрами, совпадает с полем, которое создавалось бы (в пространстве вне цилиндров) двумя заряженными нитями, проходящими через соответствующим образом подобранные точки A и A' (рис. 4). Нити несут (на единице длины) заряды $\pm e$, равные зарядам цилиндров, а точки A и A' должны быть расположены на линии OO' так, чтобы поверхности цилиндров совпадали с эквипотенциальными поверхностями. Для этого расстояния OA и $O'A'$ должны удовлетворять соотношениям

$$OA \cdot OA' = a^2, \quad O'A' \cdot O'A = b^2,$$

т. е.

$$d_1(c - d_2) = a^2, \quad d_2(c - d_1) = b^2.$$

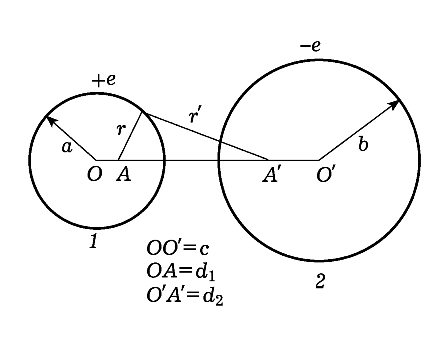


Рис. 4

[1]) Аналогичная задача для двух сфер не решается в конечном виде. Разница связана с тем, что в поле двух заряженных (равными и противоположными зарядами) параллельных нитей все эквипотенциальные поверхности являются круговыми цилиндрами, а в поле двух точечных зарядов $\pm e$ эквипотенциальные поверхности не являются сферами.

Тогда на каждой из окружностей отношение r'/r расстояний от точек A и A' постоянно: на окружности *1*

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{OA'} = \frac{a}{c-d_2} = \frac{d_1}{a},$$

а на окружности *2* $r'/r = d_2/b$. Соответственно, потенциалы цилиндров:

$$\varphi_1 = -2e\ln\frac{r}{r'} = -2e\ln\frac{d_1}{a}, \quad \varphi_2 = 2e\ln\frac{d_2}{b}, \quad \varphi_2-\varphi_1 = 2e\ln\frac{d_1 d_2}{ab}.$$

Отсюда находим для искомой взаимной емкости $C = e/(\varphi_2-\varphi_1)$:

$$\frac{1}{C} = 2\ln\frac{d_1 d_2}{ab} = 2\,\mathrm{Arch}\,\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}.$$

В частности, для цилиндра радиуса a, находящегося на расстоянии $h > a$ от проводящей плоскости, надо положить $c = b + h$ и перейти к пределу $b \to \infty$; это дает

$$\frac{1}{C} = 2\,\mathrm{Arch}\,\frac{h}{a}.$$

Если два полых цилиндра находятся один внутри другого ($c < b - a$), то поле снаружи отсутствует, а поле в пространстве между цилиндрами совпадает с полем, которое создавалось бы двумя нитями с зарядами $+e$ и $-e$, проходящими через точки A и A' (рис. 5). Тем же способом получим результат:

$$\frac{1}{C} = 2\,\mathrm{Arch}\,\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

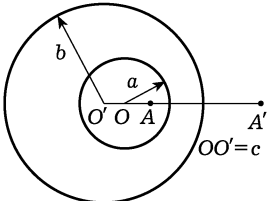


Рис. 5

8. Граница проводника представляет собой неограниченную плоскость с выступом в виде полушария. Найти распределение зарядов на поверхности.

Р е ш е н и е. В найденном в задаче 1 поле с потенциалом вида

$$\varphi = \mathrm{const}\cdot z\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)$$

плоскость $z = 0$ с выступом $r = R$ является эквипотенциальной поверхностью (на которой $\varphi = 0$). Поэтому она может быть и поверхностью проводника, а написанная формула определяет поле вне проводника. Распределение зарядов на плоской части поверхности дается формулой

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \sigma_0\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)$$

(мы положили $\mathrm{const} = -4\pi\sigma_0$, где σ_0 — плотность зарядов вдали от выступа). На поверхности же выступа

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 3\sigma_0\frac{z}{R}.$$

9. Определить дипольный момент тонкого проводящего цилиндрического стержня (длины $2l$, радиуса a; $a \ll l$) в электрическом поле $\mathfrak{E}$, параллельном его оси.

Р е ш е н и е. Пусть $\tau(z)$ — индуцированный на поверхности стержня заряд, отнесенный к единице длины; z — координата вдоль оси цилиндра, которую будем отсчитывать от его середины. Условие постоянства потенциала на поверхности проводника имеет вид:

$$-\mathfrak{E}z + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-l}^{l} \frac{\tau(z')\,dz'\,d\varphi}{R} = 0, \quad R = \left[(z'-z)^2 + 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{1/2}$$

(φ — угол между плоскостями, проходящими через ось цилиндра и через точки на его поверхности, расстояние между которыми равно R). Разобьем интеграл на две части, написав в нем тождественно $\tau(z') = \tau(z) + [\tau(z') - - \tau(z)]$. Учитывая, что $l \gg a$, и рассматривая точки, не слишком близкие к концам стержня, имеем

$$\frac{\tau(z)}{2\pi}\iint \frac{dz'\,d\varphi}{R} \approx \frac{\tau(z)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\frac{l^2 - z^2}{a^2\sin^2(\varphi/2)}\,d\varphi = \tau(z)\ln\frac{4(l^2 - z^2)}{a^2}$$

$\left(\text{использовано известное значение } \int\limits_0^{\pi} \ln\sin\varphi\,d\varphi = -\pi\ln 2\right)$. В интеграле, содержащем разность $\tau(z') - \tau(z)$, можно пренебречь членом с a^2 в R, так как это не повлечет за собой расходимости интеграла. Таким образом,

$$\mathfrak{E}z = \tau(z)\ln\frac{4(l^2 - z^2)}{a^2} + \int\limits_{-l}^{l} \frac{\tau(z') - \tau(z)}{|z' - z|}\,dz'.$$

Зависимость τ от z в основном сводится к пропорциональности z; в этом приближении стоящий здесь интеграл дает $-2\tau(z)$, и в результате получаем

$$\tau(z) = \frac{\mathfrak{E}z}{\ln\left[4(l^2 - z^2)/a^2\right] - 2}.$$

Это выражение непригодно вблизи концов стержня, но для вычисления искомого дипольного момента эта область значений z несущественна. С принятой нами здесь точностью имеем

$$\mathscr{P} = \int\limits_{-l}^{l} \tau(z)z\,dz = \frac{\mathfrak{E}}{L}\int\limits_0^{l}\left[z^2 - \frac{z^2}{2L}\ln\left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)\right]dz = \\ = \mathfrak{E}\frac{l^3}{3L}\left[1 + \frac{1}{L}\left(\frac{4}{3} - \ln 2\right)\right]$$

(где $L = \ln(2l/a) - 1$ — большое число), или, с той же точностью,

$$\mathscr{P} = \frac{\mathfrak{E}l^3}{3[\ln(4l/a) - 7/3]}.$$

10. Определить емкость полого сферического проводящего сегмента.

Р е ш е н и е. Выберем начало координат O в какой-либо точке края сегмента (рис. 6) и произведем преобразование инверсии $r = l^2/r'$ (l — длина хорды в главном сечении сегмента). При этом сегмент переходит в полуплоскость (штриховая прямая на рис. 6), перпендикулярную к радиусу AO

сегмента и проходящую через точку B его края; угол $\gamma = \pi - \theta$, где 2θ — угол раствора сегмента.

Если потенциал сегмента, несущего на себе заряд e, принять за нуль, то при $r \to \infty$ потенциал поля стремится к

$$\varphi \approx -\varphi_0 + \frac{e}{r}.$$

Соответственно, в преобразованной задаче при $r' \to 0$ потенциал стремится к

$$\varphi' = \frac{l\varphi}{r'} \approx -\frac{l\varphi_0}{r'} + \frac{e}{l}$$

(первый член соответствует заряду $e' = -l\varphi_0$ в начале координат).

С другой стороны, согласно (3.22) имеем

$$\varphi' = \frac{e'}{r'} - \frac{e'}{2\pi l}\left(1 + \frac{\theta}{\sin\theta}\right)$$

(потенциал вблизи заряда e', находящегося на расстоянии l от края проводящей полуплоскости с потенциалом нуль). Сравнив оба выражения, получим для искомой емкости $C = e/\varphi_0$ следующую формулу:

$$C = \frac{l}{2\pi}\left(1 + \frac{\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{R}{\pi}(\sin\theta + \theta)$$

(R — радиус сегмента).

Рис. 6

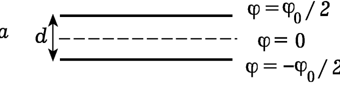
11. Определить связанную с краевыми эффектами поправку к значению $C = S/(4\pi d)$ для емкости плоского конденсатора (S — площадь поверхности обкладки, d — расстояние между обкладками; $d \ll \sqrt{S}$).

Р е ш е н и е. Наличие у обкладок свободных краев нарушает равномерность распределения зарядов на них. Для определения искомой поправки в первом приближении рассматриваем точки обкладок, удаленные от края на расстояния x такие, что $d \ll x \ll \sqrt{S}$. Рассматривая, например, верхнюю обкладку (с потенциалом $\varphi = \varphi_0/2$; рис. 7 *а*) и пренебрегая ее расстоянием $d/2$ до средней плоскости (эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$), мы получаем задачу о поле вблизи границы двух частей плоскости, имеющих различные потенциалы (рис. 7 *б*). Эта задача решается элементарно [1]), и в результате для избыточной (по сравнению с σ вдали от края) плотности зарядов получается выражение

$$\Delta\sigma = \frac{E_n}{4\pi} = \frac{\varphi_0}{8\pi^2 x},$$

так что полный избыточный заряд

$$L\int \Delta\sigma\, dx = \frac{\varphi_0 L}{8\pi^2} \ln\frac{\sqrt{S}}{d}$$



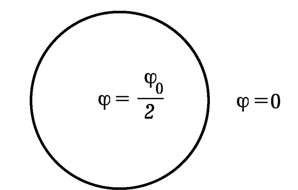


Рис. 7

[1]) См. § 23; в формуле (23.2) для потенциала надо положить в данном случае $\varphi_{ab} = \varphi_0/2$, $\alpha = \pi$.

(L — длина периметра обкладки); при вычислении логарифмически расходящегося интеграла в качестве верхнего и нижнего пределов подставляем границы области $d \ll x \ll \sqrt{S}$.

Отсюда находим емкость:

$$C = \frac{S}{4\pi d} + \frac{L}{8\pi^2} \ln \frac{\sqrt{S}}{d}.$$

Более точное вычисление (определение коэффициента в аргументе логарифма) требует применения значительно более сложных методов, причем результат зависит от формы обкладок. Для круговых (радиуса R) обкладок получается

$$C = \frac{R^2}{4d} + \frac{R}{4\pi}\left(\ln \frac{16\pi R}{d} - 1\right)$$

(*формула Кирхгофа*).

§ 4. Проводящий эллипсоид

Задача об определении поля заряженного проводящего эллипсоида и задача об эллипсоиде во внешнем однородном поле решаются с помощью так называемых *эллипсоидальных* координат.

Связь эллипсоидальных координат с декартовыми дается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1 \quad (a > b > c). \tag{4.1}$$

Это уравнение, кубическое относительно u, имеет три различных вещественных корня ($u = \xi,\ \eta,\ \zeta$), лежащих в следующих интервалах:

$$\xi \geqslant -c^2, \quad -c^2 \geqslant \eta \geqslant -b^2, \quad -b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2. \tag{4.2}$$

Эти три корня и являются эллипсоидальными координатами точки x, y, z. Их геометрический смысл явствует из того, что поверхности постоянных значений ξ, η, ζ представляют собой соответственно эллипсоиды, однополостные гиперболоиды и двухполостные гиперболоиды, причем все они софокусны с эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.3}$$

Через каждую точку пространства проходит по одной поверхности этих трех семейств, причем эти поверхности взаимно ортогональны. Формулы преобразования от эллипсоидальных координат к декартовым получаются путем совместного решения

трех уравнений типа (4.1) и имеют вид

$$x = \pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{1/2},$$

$$y = \pm\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}\right]^{1/2}, \tag{4.4}$$

$$z = \pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]^{1/2}.$$

Элемент длины в эллипсоидальных координатах имеет вид

$$dl^2 = h_1^2\,d\xi^2 + h_2^2\,d\eta^2 + h_3^2\,d\zeta^2,$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R_\xi},\quad h_2 = \frac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}}{2R_\eta},\quad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\xi-\eta)}}{2R_\zeta}, \tag{4.5}$$

где введено обозначение

$$R_u = \sqrt{(u+a^2)(u+b^2)(u+c^2)},\quad u = \xi,\eta,\zeta.$$

Соответственно, уравнение Лапласа в этих координатах есть

$$\Delta\varphi = \frac{4}{(\xi-\eta)(\zeta-\xi)(\eta-\zeta)}\left[(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) + \right.$$
$$\left. + (\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + (\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)\right] = 0. \tag{4.6}$$

Если две из полуосей a, b, c становятся равными, то эллипсоидальная система координат вырождается. Пусть $a = b > c$. Тогда кубическое уравнение (4.1) вырождается в квадратное:

$$\frac{\rho^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1,\quad \rho^2 = x^2+y^2, \tag{4.7}$$

с двумя корнями, пробегающими значения в интервалах

$$\xi \geqslant -c^2,\quad -c^2 \geqslant \eta \geqslant -a^2.$$

Координатные поверхности постоянных ξ и η превращаются соответственно в софокусные сплюснутые эллипсоиды вращения и однополостные гиперболоиды вращения (рис. 8). В качестве третьей координаты можно ввести полярный угол φ в плоскости xy ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$). Что же касается эллипсоидальной координаты ζ, то при $a = b$ она вырождается в постоянную $-a^2$. Ее связь с углом φ заключена в законе, по которому ζ

стремится к $-a^2$, когда b стремится к a:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{a^2+\zeta}{a^2-b^2}}, \tag{4.8}$$

в чем легко убедиться из (4.4) или непосредственно из уравнения (4.1). Связь координат z, ρ с координатами ξ, η дается согласно (4.4) равенствами

$$z = \pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)}{c^2-a^2}\right]^{1/2}, \quad \rho = \left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)}{a^2-c^2}\right]^{1/2}. \tag{4.9}$$

Координаты ξ, η, φ называют *сплюснутыми сфероидальными* координатами [1]).

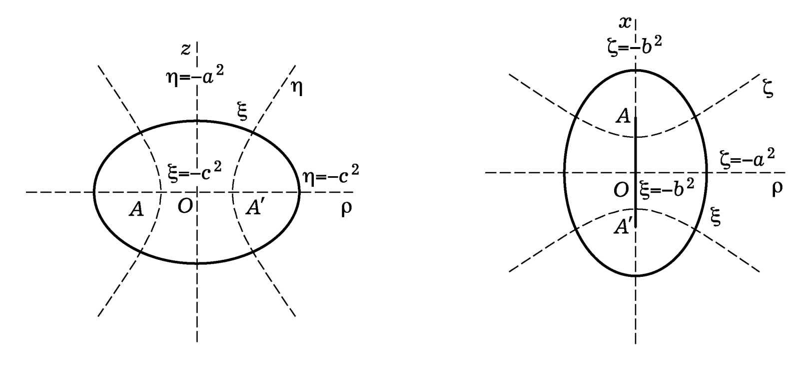


Рис. 8 Рис. 9

Аналогичным образом, при $a > b = c$ эллипсоидальные координаты вырождаются в так называемые *вытянутые сфероидальные* координаты. Две координаты ξ и ζ задаются корнями уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{\rho^2}{b^2+u} = 1, \quad \rho^2 = y^2 + z^2, \tag{4.10}$$

причем $\xi \geqslant -b^2$, $-b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2$. Поверхности постоянных ξ и ζ представляют собой вытянутые эллипсоиды и двухполостные гиперболоиды вращения (рис. 9). Координата же η вырождается при $c \to b$ в постоянную $-b^2$ по закону

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{b^2+\eta}{b^2-c^2}}, \tag{4.11}$$

где φ — полярный угол в плоскости yz.

[1]) Мы принимаем здесь такое определение сфероидальных координат, при котором они являются предельным случаем эллипсоидальных. В литературе пользуются и другими определениями, легко сводящимися к нашему.

Связь координат ξ, ζ с координатами x, ρ дается формулами

$$x = \pm\left[\frac{(\xi + a^2)(\zeta + a^2)}{a^2 - b^2}\right]^{1/2}, \quad \rho = \left[\frac{(\xi + b^2)(\zeta + b^2)}{b^2 - a^2}\right]^{1/2}. \qquad (4.12)$$

В сплюснутой сфероидальной системе фокусы координатных поверхностей (эллипсоидов и гиперболоидов) лежат на окружности радиуса $\sqrt{a^2 - c^2}$ в плоскости xy (на рис. 8 AA' есть диаметр этой окружности). Проведем плоскость, проходящую через некоторую точку P и ось z. Она пересечет фокальную окружность в двух точках; пусть r_1 и r_2 — расстояния от этих точек до точки P. Если ρ, z — координаты точки P, то

$$r_1^2 = (\rho - \sqrt{a^2 - c^2})^2 + z^2, \quad r_2^2 = (\rho + \sqrt{a^2 - c^2})^2 + z^2.$$

Сфероидальные координаты ξ, η выражаются через r_1, r_2 по следующим формулам:

$$\xi = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - a^2, \quad \eta = \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 - a^2. \qquad (4.13)$$

В вытянутой же сфероидальной системе фокусами являются две точки $x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ на оси x (точки A, A' на рис. 9). Если r_1, r_2 — расстояния от этих фокусов до точки P, то

$$r_1^2 = \rho^2 + (x - \sqrt{a^2 - b^2})^2, \quad r_2^2 = \rho^2 + (x + \sqrt{a^2 - b^2})^2,$$

а сфероидальные координаты ξ, ζ выражаются через r_1, r_2 по тем же формулам (4.13) (с заменой η на ζ).

Вернемся к задаче о поле заряженного эллипсоида, поверхность которого задана уравнением (4.3). В эллипсоидальных координатах это — координатная поверхность $\xi = 0$. Поэтому ясно, что если искать потенциал поля в виде функции только от ξ, то автоматически будут эквипотенциальными все эллипсоидальные поверхности $\xi = \mathrm{const}$, в том числе поверхность проводника. Уравнение Лапласа (4.6) сводится тогда к уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left(R_\xi \frac{d\varphi}{d\xi}\right) = 0,$$

откуда

$$\varphi(\xi) = A\int\limits_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}.$$

Верхний предел интегрирования выбран таким образом, чтобы обеспечить исчезновение поля на бесконечности. Постоянную A проще всего определить из условия, что на больших расстояниях r поле должно стремиться к кулоновскому: $\varphi \approx e/r$, где

e — полный заряд проводника. Стремлению $r \to \infty$ соответствует $\xi \to \infty$; при этом $r^2 \approx \xi$, как это следует из уравнения (4.1) с $u = \xi$. С другой стороны, для больших ξ имеем $R_\xi \approx \xi^{3/2}$ и $\varphi \approx 2A/\sqrt{\xi} = 2A/r$. Отсюда имеем, что $2A = e$, так что окончательно получим

$$\varphi(\xi) = \frac{e}{2} \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}. \tag{4.14}$$

Стоящий здесь интеграл — эллиптический первого рода. Поверхности проводника соответствует значение $\xi = 0$, поэтому для емкости эллипсоида имеем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}. \tag{4.15}$$

Распределение плотности заряда по поверхности эллипсоида определяется нормальной производной потенциала

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\bigg|_{\xi=0} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{h_1} \frac{d\varphi}{d\xi} \right)_{\xi=0} = \frac{e}{4\pi\sqrt{\eta\zeta}}.$$

С помощью уравнений (4.4) легко убедиться в том, что при $\xi = 0$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\eta\zeta}{a^2 b^2 c^2}.$$

Поэтому

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}. \tag{4.16}$$

Для двухосного эллипсоида интегралы (4.14) и (4.15) выражаются через элементарные функции. Для вытянутого эллипсоида ($a > b = c$) потенциал поля дается формулой

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\xi + a^2}}, \tag{4.17}$$

а его емкость

$$C = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\operatorname{Arch}(a/b)}. \tag{4.18}$$

Для сплюснутого же эллипсоида ($a = b > c$) имеем

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}, \quad C = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\arccos(c/a)}. \tag{4.19}$$

В частности, для круглого диска ($a = b$, $c = 0$)

$$C = \frac{2a}{\pi}. \tag{4.20}$$

Перейдем к задаче о незаряженном проводящем эллипсоиде, находящемся во внешнем однородном электрическом поле $\mathfrak{E}$. Без ограничения общности достаточно рассмотреть внешнее поле $\mathfrak{E}$, направленное вдоль одной из осей эллипсоида. В противном случае можно разложить $\mathfrak{E}$ на три составляющие вдоль осей эллипсоида и искать результирующее поле как суперпозицию полей, получающихся от каждой из этих составляющих в отдельности.

Потенциал однородного поля $\mathfrak{E}$, направленного вдоль оси x (ось a эллипсоида), в эллипсоидальных координатах имеет вид

$$\varphi_0 = -\mathfrak{E}x = -\mathfrak{E}\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{1/2}. \tag{4.21}$$

Представим потенциал поля вне эллипсоида в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, где φ' определяет искомое искажение внешнего поля эллипсоидом, и будем искать φ' в виде

$$\varphi' = \varphi_0 F(\xi). \tag{4.22}$$

В функции φ' зависящие от η и ζ множители совпадают с таковыми в φ_0; такой вид функции позволит удовлетворить граничному условию при $\xi = 0$ и произвольных η, ζ (на поверхности эллипсоида). Подставив (4.22) в уравнение Лапласа (4.6), получим для $F(\xi)$ уравнение

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\ln\left[R_\xi(\xi+a^2)\right] = 0.$$

Одно из решений этого уравнения есть $F = \text{const}$, а другое имеет вид

$$F(\xi) = A\int\limits_\xi^\infty \frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}. \tag{4.23}$$

Верхний предел интегрирования выбран так, чтобы на бесконечности ($\xi \to \infty$) потенциал φ' стремился к нулю. Стоящий здесь интеграл — эллиптический второго рода.

На поверхности эллипсоида должно быть $\varphi = \text{const}$. Чтобы это условие могло выполняться при $\xi = 0$ и произвольных η, ζ, надо положить $\text{const} = 0$. Выбирая соответствующим образом коэффициент A в $F(\xi)$ (так, чтобы было $F(0) = -1$), получим окончательно следующее выражение для потенциала поля вокруг эллипсоида:

$$\varphi = \varphi_0\left\{1 - \int\limits_\xi^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s}\Bigg/\int\limits_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s}\right\}. \tag{4.24}$$

Найдем вид потенциала φ' на больших расстояниях r от эллипсоида. Большим r соответствуют большие значения координаты ξ, причем $r^2 \approx \xi$, как это следует непосредственно из уравнения (4.1). Поэтому

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2)R_s} \approx \int_{r^2}^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} = \frac{2}{3r^3},$$

и для потенциала φ' получаем

$$\varphi' = \frac{\mathfrak{E}x}{r^3} \frac{V}{4\pi n^{(x)}},$$

где $V = 4\pi abc/3$ — объем эллипсоида, а величина $n^{(x)}$ и аналогичные фигурирующие ниже величины $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ определяются формулами

$$n^{(x)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2)R_s}, \quad n^{(y)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+b^2)R_s},$$
$$n^{(z)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+c^2)R_s}. \tag{4.25}$$

Выражение для φ', как и должно быть, имеет вид потенциала поля электрического диполя:

$$\varphi' = \mathscr{P}_x \frac{x}{r^3},$$

причем дипольный момент эллипсоида

$$\mathscr{P}_x = \mathfrak{E}_x \frac{V}{4\pi n^{(x)}}. \tag{4.26}$$

Аналогичными выражениями определяются дипольные моменты при поле $\mathfrak{E}$, направленном вдоль оси y или z.

Положительные постоянные $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ зависят только от формы эллипсоида, но не от его объема; они называются *коэффициентами деполяризации* [1]). Если не предрешать выбор осей координат вдоль осей эллипсоида, то формулу (4.26) надо писать в тензорном виде:

$$\frac{4\pi}{V} n_{ik} \mathscr{P}_k = \mathfrak{E}_i. \tag{4.27}$$

---

[1]) Эти же коэффициенты фигурируют в задачах о диэлектрическом эллипсоиде во внешнем электрическом поле или магнитном эллипсоиде в магнитном поле (§ 8). Таблицы и графики этих коэффициентов для эллипсоидов вращения и для трехосных эллипсоидов можно найти в статьях: *Stoner E.C.* // Phil. Mag. 1945. V. 36. P. 803; *Osborn J.A.* // Phys. Rev. 1945. V. 67. P. 351.

Величины $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ являются главными значениями симметричного тензора второго ранга n_{ik}. Сравнение с определением (2.13) показывает, что $\alpha_{ik} = n_{ik}^{-1}/4\pi$ есть тензор поляризуемости проводящего эллипсоида.

В общем случае произвольных значений a, b, c из определений $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ следует прежде всего, что

$$n^{(x)} < n^{(y)} < n^{(z)}, \text{ если } a > b > c. \tag{4.28}$$

Далее, сложив интегралы $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ и введя в качестве переменной интегрирования $u = R_s^2$, найдем

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = \frac{abc}{2} \int\limits_{(abc)^2}^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}},$$

откуда

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = 1. \tag{4.29}$$

Сумма трех коэффициентов деполяризации равна единице (в тензорном виде это значит, что $n_{ii} = 1$). Поскольку, с другой стороны, эти коэффициенты положительны, каждый из них не может превышать единицы.

Для шара ($a = b = c$) из соображений симметрии ясно, что

$$n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3}. \tag{4.30}$$

Для цилиндра (с осью вдоль оси x, $a \to \infty$) имеем [1])

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}. \tag{4.31}$$

Предельному же случаю $a, b \to \infty$ (плоская пластинка) отвечают очевидные значения

$$n^{(x)} = n^{(y)} = 0, \quad n^{(z)} = 1.$$

Эллиптические интегралы (4.25) выражаются через элементарные функции для всех эллипсоидов вращения. Для вытянутого эллипсоида вращения ($a > b = c$) с эксцентриситетом $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ имеем

$$n^{(x)} = \frac{1-e^2}{e^3}(\operatorname{Arth} e - e), \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}(1 - n^{(x)}). \tag{4.32}$$

[1]) Эти значения для шара и цилиндра находятся, разумеется, в соответствии с результатами, полученными в задачах 1 и 2 § 3.

Если эллипсоид близок к шару ($e \ll 1$), то приближенно

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}e^2. \tag{4.33}$$

Для сплюснутого же эллипсоида ($a = b > c$):

$$n^{(z)} = \frac{1+e^2}{e^3}(e - \operatorname{arctg} e), \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1}{2}(1 - n^{(z)}), \tag{4.34}$$

где $e = \sqrt{a^2/c^2 - 1}$. Если $e \ll 1$, то

$$n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{15}e^2. \tag{4.35}$$

Задачи

1. Найти поле заряженного проводящего круглого диска (радиуса a), выразив его в цилиндрических координатах. Найти распределение заряда на диске.

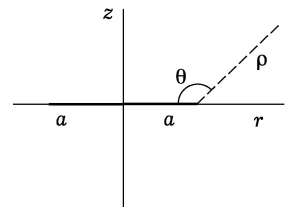


Рис. 10

Р е ш е н и е. Распределение заряда получается путем перехода в формуле (4.16) к пределу $c \to 0$, $z \to 0$, причем отношение $z/c = \sqrt{1 - r^2/a^2}$ (где $r^2 = x^2 + y^2$) в соответствии с (4.3). Это дает

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}.$$

Потенциал поля во всем пространстве определяется (4.19), в которой полагаем $c = 0$ и выражаем ξ через r и z с помощью уравнения (4.1) при $c = 0$, $u = \xi$, $a = b$:

$$\varphi = \frac{e}{a}\operatorname{arctg}\left[\frac{2a^2}{r^2 + z^2 - a^2 + [(r^2+z^2-a^2)^2 + 4a^2z^2]^{1/2}}\right]^{1/2}.$$

Вблизи края диска вводим вместо r и z координаты ρ и θ согласно $z = \rho\sin\theta$, $r = a - \rho\cos\theta$ ($\rho \ll a$) (рис. 10) и находим

$$\varphi \approx \frac{e}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{2\rho}{a}}\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

в согласии с общим результатом задачи 3 § 3.

2. Определить квадрупольный электрический момент заряженного эллипсоида.

Р е ш е н и е. Тензор квадрупольного момента заряженного проводника определяется как $D_{ik} = e(\overline{3x_ix_k} - \overline{r^2}\delta_{ik})$, где e — его полный заряд, а черта означает усреднение по закону

$$\overline{x_ix_k} = \frac{1}{e}\oint x_ix_k\sigma\, df.$$

Очевидно, что оси эллипсоида являются в то же время главными осями тензора D_{ik}. Воспользовавшись для σ формулой (4.16), а для элемента по-

верхности эллипсоида выражением

$$df = \frac{dx\,dy}{\nu_z} = \frac{dx\,dy}{z/c^2}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{1/2}$$

($\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к поверхности эллипсоида), получим

$$\overline{z^2} = \frac{c}{4\pi ab}\int z\,dx\,dy = \frac{c^2}{3}$$

(интегрирование по $dx\,dy$ производится дважды по площади сечения эллипсоида плоскостью xy). Таким образом,

$$D_{xx} = \frac{e}{3}(2a^2 - b^2 - c^2), \quad D_{yy} = \frac{e}{3}(2b^2 - a^2 - c^2), \quad D_{zz} = \frac{e}{3}(2c^2 - a^2 - b^2).$$

3. Найти распределение зарядов на поверхности незаряженного проводящего эллипсоида во внешнем однородном поле.

Р е ш е н и е. Согласно формуле (1.9) имеем

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\xi=0} = -\left(\frac{1}{4\pi h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}$$

(элемент длины вдоль направления нормали к поверхности эллипсоида есть согласно (4.5) $h_1\,d\xi$). С помощью (4.24) и учитывая, что

$$\nu_x = \frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0} = \frac{x}{2a^2h_1}\bigg|_{\xi=0},$$

получим

$$\sigma = \mathfrak{E}\frac{\nu_x}{4\pi n^{(x)}}.$$

При произвольном направлении внешнего поля относительно осей x, y, z эллипсоида

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\nu_i n_{ik}^{-1}\mathfrak{E}_k = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\nu_x}{n^{(x)}}\mathfrak{E}_x + \frac{\nu_y}{n^{(y)}}\mathfrak{E}_y + \frac{\nu_z}{n^{(z)}}\mathfrak{E}_z\right].$$

4. То же для незаряженного круглого плоского диска (радиуса a), расположенного параллельно полю [1]). Определить дипольный момент диска.

Р е ш е н и е. Рассматриваем диск как предел эллипсоида вращения при стремлении полуоси c к нулю. При этом коэффициент деполяризации вдоль этой оси (ось z) стремится к 1, а вдоль осей x и y — к нулю по закону

$$n^{(z)} = 1 - \frac{\pi c}{2a}, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{\pi c}{4a},$$

следующему из (4.34). Компонента ν_x единичного вектора нормали к поверхности эллипсоида вращения стремится к нулю по закону

$$\nu_x = \frac{x}{a^2}\left(\frac{x^2+y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2} \to \frac{xc^2}{a^2z} = \frac{xc}{a^2}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{-1/2}.$$

[1]) Для диска, расположенного перпендикулярно к полю, вопрос был бы тривиален; поле остается однородным во всем пространстве, а на двух сторонах диска индуцируются заряды $\sigma = \pm\mathfrak{E}/(4\pi)$.

Поэтому плотность зарядов

$$\sigma = \mathfrak{E}\frac{\nu_x}{4\pi n^{(x)}} = \mathfrak{E}\frac{\rho\cos\varphi}{\pi^2\sqrt{a^2-p^2}},$$

где ρ, φ — полярные координаты в плоскости диска.

Дипольный момент диска определяется по формуле (4.26) и равен

$$\mathscr{P} = \frac{4a^3}{3\pi}\mathfrak{E}.$$

Отметим, что он пропорционален a^3, а не «объему» диска a^2c.

5. Определить потенциал поля вне незаряженного проводящего эллипсоида вращения, расположенного своей осью симметрии параллельно внешнему однородному полю.

Р е ш е н и е. Для вытянутого эллипсоида вращения ($a > b = c$, поле $\mathfrak{E}$ в направлении оси x) получим, вычислив интеграл в формуле (4.24),

$$\varphi = -\mathfrak{E}x\left\{1 - \frac{\operatorname{Arth}\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+\xi}} - \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+\xi}}}{\operatorname{Arth}\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}} - \sqrt{1-\dfrac{b^2}{c^2}}}\right\}.$$

Координата ξ связана с координатами x и $\rho = \sqrt{y^2+z^2}$ соотношением

$$\frac{\rho^2}{b^2+\xi} + \frac{x^2}{a^2+\xi} = 1,$$

причем в пространстве вне эллипсоида $0 \leqslant \xi \leqslant \infty$.

Для сплюснутого эллипсоида ($a = b > c$) поле $\mathfrak{E}$ направлено вдоль оси z. В связи с этим в интегралах в (4.24) надо заменить $s + a^2$ на $s + c^2$ и взять $\varphi_0 = -\mathfrak{E}z$. В результате получим

$$\varphi = -\mathfrak{E}z\left\{1 - \frac{\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{\xi+c^2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}-1}}\right\},$$

причем координата ξ связана с координатами z и $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ посредством

$$\frac{\rho^2}{a^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1.$$

6. То же, если ось симметрии эллипсоида перпендикулярна к внешнему полю.

Р е ш е н и е. Для вытянутого эллипсоида (поле в направлении оси z)

$$\varphi = -\mathfrak{E}z\left\{1 - \frac{\dfrac{\sqrt{\xi+a^2}}{\xi+b^2} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Arth}\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{\xi+a^2}}}{\dfrac{a}{b^2} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Arth}\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}\right\}.$$

Для сплюснутого эллипсоида (поле в направлении оси x):

$$\varphi = -\mathfrak{C}x\left\{1-\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}-\dfrac{\sqrt{\xi+c^2}}{a^2+\xi}}{\dfrac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}-1}-\dfrac{c}{a^2}}\right\}.$$

7. Однородное поле $\mathfrak{C}$, направленное вдоль оси z (в полупространстве $z<0$), ограничено заземленной проводящей плоскостью $z=0$ с круглым отверстием. Определить поле и распределение зарядов на плоскости.

Решение. Плоскость xy с круглым отверстием радиуса a с центром в начале координат рассматриваем как предельный случай однополостного гиперболоида вращения

$$\frac{\rho^2}{a^2-|\eta|}-\frac{z^2}{|\eta|}=1,\quad \rho^2=x^2+y^2,$$

при $|\eta|\to 0$. Эти гиперболоиды представляют собой одно из семейств координатных поверхностей сплюснутой сфероидальной системы координат с $c=0$. Декартова координата z выражается согласно (4.9) через ξ и η через $z=\sqrt{\xi|\eta|}/a$, причем корень $\sqrt{\xi}$ должен быть взят со знаком $+$ или $-$ соответственно в верхнем или нижнем полупространствах.

Ищем решение в виде $\varphi=-\mathfrak{C}zF(\xi)$ и для функции $F(\xi)$ получаем

$$F(\xi)=\text{const}\cdot\int\frac{d\xi}{\xi^{3/2}(\xi+a^2)}=\text{const}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{\xi}}-\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}}\right)$$

(постоянную интегрирования полагаем равной нулю в соответствии с условием $\varphi=0$ при $z\to+\infty$, т. е. при $\sqrt{\xi}\to+\infty$). При этом arctg отрицательного аргумента надо понимать как

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{-\sqrt{\xi}}=\pi-\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}},$$

а не как $-\operatorname{arctg}(a/\sqrt{\xi})$. В противном случае потенциал испытывал бы разрыв непрерывности на плоскости отверстия ($\xi=0$). Постоянный коэффициент выбираем так, чтобы при $z\to-\infty$ (т. е. при $\sqrt{\xi}\to-\infty$, $\operatorname{arctg}(a/\sqrt{\xi})\to\pi$) было $\varphi=-\mathfrak{C}z$, и окончательно получаем

$$\varphi=-\mathfrak{C}\frac{z}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}}-\frac{a}{\sqrt{\xi}}\right]=-\mathfrak{C}\frac{\sqrt{|\eta|}}{\pi}\left[\frac{\sqrt{\xi}}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}}-1\right].$$

На проводящей поверхности $\eta=0$ и потенциал, как и следовало, обращается в нуль.

На больших расстояниях $r=\sqrt{z^2+\rho^2}$ от отверстия имеем $\xi\approx r^2$ и потенциал (в верхнем полупространстве) приобретает вид

$$\varphi\approx\mathfrak{C}\frac{a^2}{3\pi}\frac{\sqrt{-\eta}}{\xi}=\mathfrak{C}\frac{a^3z}{3\pi r^3},$$

т. е. поле — дипольного типа, соответствующее дипольному моменту $\mathscr{P}=$ $=\mathfrak{C}a^3/3\pi$.

Напряженность поля убывает как r^{-3}, и потому поток поля через бесконечно удаленную поверхность (в полупространстве $z>0$) обращается в

нуль. Это значит, что все силовые линии, проходящие через отверстие, замыкаются на верхней стороне проводящей плоскости.

Распределение зарядов на проводящей плоскости вычисляется следующим образом:

$$\sigma = \mp\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \mp\frac{a}{4\pi\sqrt{\xi}}\frac{\partial\varphi}{\partial\sqrt{-\eta}} = \pm\mathfrak{C}\frac{1}{4\pi^2}\left[\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}}\right],$$

где верхние и нижние знаки относятся к верхней и нижней сторонам плоскости. Согласно формуле

$$\frac{\rho^2}{a^2+\xi} + \frac{z^2}{\xi} = 1,$$

связывающей ξ с ρ, z, на плоскости $z = 0$ имеем $\sqrt{\xi} = \pm\sqrt{\rho^2 - a^2}$. Таким образом, распределение зарядов на нижней стороне проводящей плоскости дается формулой

$$\sigma = -\mathfrak{C}\frac{1}{4\pi^2}\left(\pi - \arcsin\frac{a}{\rho} + \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}\right).$$

При $\rho \to \infty$ имеем $\sigma = -\mathfrak{C}/4\pi$, как и должно быть. На верхней же стороне

$$\sigma = -\mathfrak{C}\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} - \arcsin\frac{a}{\rho}\right).$$

Полный индуцированный заряд на верхней стороне плоскости конечен и равен

$$e' = \int\limits_a^\infty \sigma\cdot 2\pi\rho\, d\rho = -\frac{a^2}{8}\mathfrak{C}.$$

8. То же, если отверстие в проводящей плоскости представляет собой прямую щель ширины $2b$.

Р е ш е н и е. Плоскость xy со щелью вдоль оси x рассматриваем как предельный случай гиперболического цилиндра

$$\frac{y^2}{b^2 - |\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1$$

при $|\eta| \to 0$. Эти гиперболические цилиндры представляют собой одно из семейств эллипсоидальных координатных поверхностей при $a \to \infty$, $c \to 0$. Декартова координата $z = \sqrt{\xi|\eta|}/b$.

Как и в задаче 7, ищем решение в виде $\varphi = -\mathfrak{C}zF(\xi)$ и для функции $F(\xi)$ получаем

$$F = \text{const}\cdot\int\frac{d\xi}{\xi^{3/2}\sqrt{\xi + b^2}}.$$

Здесь коэффициент и постоянная интегрирования определяются условиями $F = 0$ и $F = 1$, соответственно, при $z \to +\infty$ и $z \to -\infty$ (т. е. при $\sqrt{\xi} \to +\infty$ и $\sqrt{\xi} \to -\infty$), и окончательно получаем

$$\varphi = \mathfrak{C}\frac{1}{2b}\left[\sqrt{\xi + b^2} \mp \sqrt{\xi}\right]\sqrt{|\eta|},$$

где мы теперь понимаем корень $\sqrt{\xi}$ как положительную величину, а верхний и нижний знаки соответствуют областям $z > 0$ и $z < 0$.

На больших расстояниях от щели в верхнем полупространстве имеем $\xi \approx y^2 + z^2 = r^2$ и потенциал

$$\varphi \approx \mathfrak{E}\frac{b}{4}\sqrt{\frac{|\eta|}{\xi}} = \mathfrak{E}\frac{b^2 z}{4r^2},$$

т. е. поле двумерного дипольного типа с дипольным моментом $\mathfrak{E}b^2/8$ на единицу длины щели (см. формулу в задаче 2 § 3).

Распределение зарядов на проводящей плоскости дается формулой

$$\sigma = -\mathfrak{E}\frac{1}{8\pi}\left(\frac{|y|}{\sqrt{y^2 - b^2}} \mp 1\right).$$

Полный индуцированный заряд на верхней стороне плоскости (отнесенный к единице длины щели) равен

$$e' = 2\int_b^\infty \sigma\, dy = -\mathfrak{E}\frac{b}{4\pi}.$$

Вблизи края щели в выражении для $\varphi(\xi, \eta)$ можно положить $\xi \to 0$ и

$$\eta \approx -2b\rho \sin^2\frac{\theta}{2},$$

где ρ, θ — полярные координаты в плоскости yz, отсчитываемые от края щели ($y = b + \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$). Тогда

$$\varphi \approx \mathfrak{E}\sqrt{\frac{b\rho}{2}}\sin\frac{\theta}{2},$$

в согласии с результатом задачи 3 § 3 для случая $\theta_0 \ll 1$.

§ 5. Силы, действующие на проводник

В электрическом поле на поверхность проводника действуют со стороны поля определенные силы. Их легко вычислить следующим образом.

Плотность потока импульса в электрическом поле в пустоте определяется известным максвелловским тензором напряжений [1]):

$$-\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{E^2}{2}\delta_{ik} - E_i E_k\right).$$

Сила же, действующая на элемент $d\mathbf{f}$ поверхности тела, есть не что иное, как поток «втекающего» в него извне импульса, т. е. равна $\sigma_{ik}\, df_k = \sigma_{ik} n_k\, df$ (знак изменен в связи с тем, что вектор нормали $\mathbf{n}$ направлен наружу от тела, а не внутрь него). Величина $\sigma_{ik} n_k$ есть, следовательно, сила $\mathbf{F}_{\text{пов}}$, отнесенная к 1 см^2

[1]) См. II, § 33. Напоминаем, что тензор напряжений σ_{ik} равен взятому с обратным знаком трехмерному тензору потока импульса.

на площади поверхности. Учитывая, что у поверхности металла напряженность $\mathbf{E}$ имеет только нормальную составляющую, получим

$$\mathbf{F}_{\text{пов}} = \mathbf{n}\frac{E^2}{8\pi}, \tag{5.1}$$

или, вводя поверхностную плотность зарядов σ,

$$\mathbf{F}_{\text{пов}} = 2\pi\sigma^2\mathbf{n} = \frac{1}{2}\sigma\mathbf{E}.$$

Таким образом, на поверхности проводника действуют силы «отрицательного давления», направленного по внешней нормали к поверхности и по величине равного плотности энергии поля.

Полная сила $\mathbf{F}$, действующая на проводник, получается интегрированием силы (5.1) по всей его поверхности [1]):

$$\mathbf{F} = \oint \frac{E^2}{8\pi}\,d\mathbf{f}. \tag{5.2}$$

Обычно, однако, более удобно вычислять эту величину, согласно общим правилам механики, путем дифференцирования энергии $\mathscr{U}$. Именно, сила, действующая на проводник вдоль координатной оси q, есть $-\partial\mathscr{U}/\partial q$, где под производной надо понимать изменение энергии при параллельном смещении данного тела как целого вдоль оси q. При этом энергия должна быть выражена через заряды проводников (источников поля), и дифференцирование производится при постоянных зарядах. Отмечая это обстоятельство индексом e, напишем

$$F_q = -\left(\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial q}\right)_e. \tag{5.3}$$

Аналогично, проекция на какую-либо ось полного действующего на проводник момента сил равна

$$K = -\left(\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\psi}\right)_e, \tag{5.4}$$

где ψ — угол поворота тела как целого вокруг данной оси.

Если же энергия выражена как функция потенциалов, а не зарядов проводников, то вопрос о вычислении с ее помощью сил требует особого рассмотрения. Дело в том, что для поддержания у проводника (при его перемещении) постоянного потенциала необходимо прибегнуть к помощи посторонних тел. Можно,

---

[1]) В данном случае мы применяем эту формулу к поверхности, не совпадающей буквально с поверхностью тела, а несколько смещенной относительно нее, чтобы исключить влияние структуры поля вблизи поверхности тела (ср. с. 15).

например, поддерживать постоянный потенциал проводника путем соединения его с другим проводником, обладающим очень большой емкостью («резервуар зарядов»). Заряжаясь зарядом e_a, проводник отнимает его из резервуара, потенциал φ_a которого при этом не меняется ввиду его большой емкости. Меняется, однако, энергия резервуара, уменьшаясь на $e_a\varphi_a$. При заряжении всей системы проводников зарядами e_a энергия соединенных с ними резервуаров изменится в сумме на $-\sum e_a\varphi_a$. В величину же $\mathscr{U}$ входит только энергия рассматриваемых проводников, но не энергия резервуаров. В этом смысле можно сказать, что $\mathscr{U}$ относится к энергетически незамкнутой системе. Таким образом, для системы проводников, потенциалы которых поддерживаются постоянными, роль механической энергии играет не $\mathscr{U}$, а величина

$$\widetilde{\mathscr{U}} = \mathscr{U} - \sum_a e_a\varphi_a. \tag{5.5}$$

Подставив сюда (2.2), находим, что $\widetilde{\mathscr{U}}$ и $\mathscr{U}$ отличаются только знаком:

$$\widetilde{\mathscr{U}} = -\mathscr{U}. \tag{5.6}$$

Сила F_q получается дифференцированием $\widetilde{\mathscr{U}}$ по q при постоянных потенциалах, т. е.

$$F_q = -\left(\frac{\partial\widetilde{\mathscr{U}}}{\partial q}\right)_\varphi = \left(\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial q}\right)_\varphi. \tag{5.7}$$

Таким образом, действующие на проводник силы можно получить дифференцированием $\mathscr{U}$ как при постоянных зарядах, так и при постоянных потенциалах, с той лишь разницей, что производную надо брать в первом случае со знаком минус, а во втором — со знаком плюс.

Этот же результат можно было бы получить и более формальным путем, исходя из дифференциального тождества

$$d\mathscr{U} = \sum_a \varphi_a\,de_a - F_q\,dq, \tag{5.8}$$

в котором $\mathscr{U}$ рассматривается как функция зарядов проводников и координаты q; этим тождеством выражается тот факт, что производные равны $\partial\mathscr{U}/\partial e_a = \varphi_a$, $\partial\mathscr{U}/\partial q = -F_q$. Переходя к переменным φ_a вместо e_a, получим отсюда

$$d\widetilde{\mathscr{U}} = -\sum_a e_a\,d\varphi_a - F_q\,dq, \tag{5.9}$$

откуда и следует (5.7).

В конце § 2 была рассмотрена энергия проводника во внешнем однородном электрическом поле. Полная сила, действующая на

незаряженный проводник в однородном поле, равна, разумеется, нулю. Но выражением энергии (2.14) можно воспользоваться для определения силы, действующей на проводник в квазиоднородном поле $\mathfrak{E}$, т. е. в поле, мало меняющемся на протяжении размеров тела. В таком поле в первом приближении все еще можно вычислить энергию по формуле (2.14), а сила $\mathbf{F}$ определится как градиент этой энергии:

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad}\mathscr{U} = \frac{1}{2}\alpha_{ik}V\operatorname{grad}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \tag{5.10}$$

Что же касается полного момента сил $\mathbf{K}$, то он, вообще говоря, отличен от нуля уже и в однородном внешнем поле. По общим правилам механики $\mathbf{K}$ можно определить, рассматривая бесконечно малый виртуальный поворот тела; изменение энергии при таком повороте связано с $\mathbf{K}$ соотношением $\delta\mathscr{U} = -\mathbf{K}\delta\boldsymbol{\psi}$, где $\delta\boldsymbol{\psi}$ — угол поворота. Поворот тела на угол $\delta\boldsymbol{\psi}$ в однородном поле эквивалентен повороту поля относительно тела на угол $-\delta\boldsymbol{\psi}$. Изменение поля при этом есть $\delta\mathfrak{E} = -[\delta\boldsymbol{\psi}\cdot\mathfrak{E}]$, а изменение энергии

$$\delta\mathscr{U} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\mathfrak{E}}\delta\mathfrak{E} = -\delta\boldsymbol{\psi}\left[\mathfrak{E}\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\mathfrak{E}}\right].$$

Но $\partial\mathscr{U}/\partial\mathfrak{E} = -\boldsymbol{\mathscr{P}}$, как это видно из сравнения формул (2.13) и (2.14). Поэтому $\delta\mathscr{U} = -[\mathscr{P}\mathfrak{E}]\delta\boldsymbol{\psi}$, откуда

$$\mathbf{K} = [\mathscr{P}\mathfrak{E}], \tag{5.11}$$

в соответствии с обычным выражением, известным из теории поля в пустоте.

Если полные сила и момент, действующие на проводник, равны нулю, то проводник в поле остается неподвижным и на первый план выдвигаются эффекты, связанные с деформированием тела (так называемая *электрострикция*). Силы (5.1), действующие на поверхность проводника, приводят к изменению его формы и объема. При этом, ввиду растягивающего характера сил, объем тела увеличивается. Полное определение деформации требует решения уравнений теории упругости с заданным распределением сил (5.1) на поверхности тела. Если, однако, интересоваться только изменением объема, то задача может быть решена весьма просто.

Для этого надо учесть, что если деформация слаба (как это фактически имеет место при электрострикции), то влияние изменения формы на изменение объема является эффектом второго порядка малости. Поэтому в первом приближении изменение объема можно рассматривать как результат деформирования без изменения формы, т. е. как всестороннее растяжение под влиянием некоторого эффективного избыточного давления ΔP, равномерно распределенного по поверхности тела и заменяющего

собой точное распределение согласно (5.1). Относительное изменение объема получается умножением ΔP на коэффициент всестороннего растяжения вещества. Давление ΔP определяется, согласно известной формуле, как производная от электрической энергии тела $\mathscr{U}$ по его объему: $\Delta P = -\partial\mathscr{U}/\partial V$ [1]).

Пусть деформирующее поле создается самим заряженным проводником. Тогда энергия $\mathscr{U} = e^2/(2C)$ и давление

$$\Delta P = -\frac{e^2}{2}\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{C}\right).$$

При заданной форме тела его емкость (как величина, имеющая размерность длины) пропорциональна его линейным размерам, т. е. пропорциональна $V^{1/3}$. Поэтому находим

$$\Delta P = \frac{e^2}{6CV} = \frac{e\varphi}{6V}. \tag{5.12}$$

Если же незаряженный проводник находится в однородном внешнем поле $\mathfrak{E}$, то его энергия дается формулой (2.14). Поэтому в этом случае растягивающее давление будет

$$\Delta P = \frac{1}{2}\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \tag{5.13}$$

З а д а ч и

1. Маленький проводник с емкостью C (порядка величины его размеров) находится на расстоянии r от центра сферического проводника большого радиуса a ($a \gg C$). Расстояние $r - a$ от проводника C до поверхности шара предполагается большим лишь по сравнению с C, но не по сравнению с a. Оба проводника соединены друг с другом тонким проводом, так что находятся при одинаковом потенциале φ. Определить силу взаимного отталкивания проводников.

Р е ш е н и е. Ввиду малости проводника C можно считать, что его потенциал складывается из потенциала $\varphi a/r$, который создается на расстоянии r большой сферой, и собственного потенциала e/C, создаваемого зарядом e, находящимся на самом проводнике. Отсюда имеем $\varphi = \varphi a/r + e/C$ или $e = C\varphi(1 - a/r)$. Искомая сила взаимодействия F определяется как кулоновская сила отталкивания между зарядом e проводника C и зарядом $a\varphi$ сферы:

$$F = \frac{aC\varphi^2}{r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

(это выражение справедливо с точностью до членов более высокого порядка по C). Эта сила максимальна при $r = 3a/2$ (где она равна $F_{\max} = 4C\varphi^2/(27a)$) и убывает в обе стороны от этой точки.

---

[1]) Определенная таким образом величина есть растяжение, действующее на поверхность со стороны самого тела; давление же, действующее на нее извне, получается изменением знака.

2. Заряженный проводящий шар разрезан пополам. Определить силу, с которой оба полушария отталкиваются друг от друга [1]).

Решение. Представляем себе полушария разделенными бесконечно узкой щелью и определяем действующую на каждое из них силу F путем интегрирования по их поверхности силы $(E^2/8\pi)\cos\theta$ (проекция силы (5.1) на направление, перпендикулярное к плоскости раздела полушарий). В щели $E=0$, а на наружной поверхности $E=e/a^2$, где a — радиус шара, а e — полный заряд на нем. В результате получим

$$F = \frac{e^2}{8a^2}.$$

3. То же для незаряженного шара, находящегося во внешнем однородном поле $\mathfrak{E}$, перпендикулярном к плоскости разреза.

Решение аналогично предыдущей задаче, с той лишь разницей, что на поверхности шара $E = 3\mathfrak{E}\cos\theta$ (согласно задаче 1 § 3). Искомая сила

$$F = \frac{9}{16}a^2\mathfrak{E}^2.$$

4. Определить изменение объема и изменение формы проводящего шара во внешнем однородном электрическом поле.

Решение. Изменение объема $\Delta V/V = \Delta P/K$, где K — модуль всестороннего растяжения вещества, а ΔP определяется формулой (5.13). Для шара $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik} = 3\delta_{ik}/(4\pi)$ (α из задачи 1 § 3), так что

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\mathfrak{E}^2}{8\pi K}.$$

В результате деформации шар превращается в вытянутый эллипсоид. Для определения эксцентриситета этого эллипсоида можно рассматривать деформацию как однородную вдоль объема тела деформацию сдвига, аналогично тому, как для изменения общего объема мы рассматривали однородную деформацию всестороннего растяжения.

Условие равновесия деформированного тела можно сформулировать как условие минимальности суммы электростатической и упругой энергии. Первая из них согласно формулам (2.12), (4.26) равна

$$\mathcal{U}_{\text{эл}} = -\frac{V}{8\pi n}\mathfrak{E}^2 \approx -\frac{3V}{8\pi}\mathfrak{E}^2 - \frac{3V}{10\pi}\frac{a-b}{R}\mathfrak{E}^2,$$

где R — первоначальный радиус шара, a и b — полуоси эллипсоида, а

$$n \approx \frac{1}{3} - \frac{4}{15}\frac{a-b}{R}$$

— коэффициент деполяризации (см. (4.33)).

В силу аксиальной симметрии деформации (вокруг направления поля — оси x) отличны от нуля лишь компоненты u_{xx} и $u_{yy} = u_{zz}$ тензора деформации. Поскольку мы рассматриваем равновесие по отношению к изменению формы, можно считать при этом объем неизменным, т. е. $u_{ii} = 0$. Поэтому упругую энергию можно написать в виде

$$\mathcal{U}_{\text{упр}} = \frac{V}{2}u_{ik}\sigma_{ik} = \frac{V}{3}(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})(u_{xx}-u_{yy}),$$

[1]) В задачах 2 и 3 предполагается, что оба полушария находятся при одинаковом потенциале.

где σ_{ik} — тензор упругих напряжений (см. VII, § 4). Имеем

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2\mu(u_{xx} - u_{yy}),$$

где μ — модуль сдвига вещества, а $u_{xx} - u_{yy} = (a-b)/R$. Поэтому

$$\mathcal{U}_{\text{упр}} = \frac{2\mu(a-b)^2}{3R^2}V.$$

Минимизируя сумму $\mathcal{U}_{\text{упр}} + \mathcal{U}_{\text{эл}}$ по $a - b$, получим

$$\frac{a-b}{R} = \frac{9}{40\pi\mu}\mathfrak{E}^2.$$

5. Найти связь между частотой и длиной волны, распространяющейся по заряженной плоской поверхности жидкого проводника (в поле тяжести). Получить условие устойчивости этой поверхности (*Я.И. Френкель*, 1935).

Решение. Пусть волна распространяется вдоль оси x, ось z направлена вертикально вверх. Вертикальное смещение точек поверхности жидкости $\zeta = a \exp[i(kx - \omega t)]$. При неподвижной поверхности напряженность поля над ней $E_z = E = 4\pi\sigma_0$, а его потенциал $\varphi = -4\pi\sigma_0 z$, где σ_0 — поверхностная плотность зарядов. Потенциал поля над колеблющейся поверхностью пишем в виде

$$\varphi = -4\pi\sigma_0 z + \varphi_1, \quad \varphi_1 = \text{const}\cdot e^{i(kx-\omega t)}e^{-kz},$$

где φ_1 — малая поправка, удовлетворяющая уравнению $\Delta\varphi_1 = 0$ и обращающаяся в нуль при $z \to \infty$. Вдоль самой поверхности проводника потенциал должен иметь постоянное значение, которое принимаем за нуль; отсюда

$$\varphi_1\,|_{z=0} = 4\pi\sigma_0\zeta.$$

Согласно (5.1) на заряженную поверхность жидкости действует дополнительное отрицательное давление, равное, с точностью до членов первого порядка по φ_1,

$$\frac{E^2}{8\pi} \approx \frac{E_z^2}{8\pi} \approx 2\pi\sigma_0^2 + k\sigma_0\varphi_1\bigg|_{z=0} = 2\pi\sigma_0^2 + 4\pi\sigma_0^2 k\zeta.$$

Постоянный член $2\pi\sigma_0^2$ несуществен (его можно включить в постоянное внешнее давление).

Рассмотрение гидродинамического движения в волне вполне аналогично теории капиллярных волн (см. VI, § 62), отличаясь лишь наличием указанного выше дополнительного давления. На поверхности жидкости получаем граничное условие

$$\rho g\zeta + \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\bigg|_{z=0} - \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - 4\pi\sigma_0^2 k\zeta = 0,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, а Φ — потенциал ее скорости; Φ и ζ связаны друг с другом еще и соотношением

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\bigg|_{z=0}.$$

Подставив в эти два соотношения

$$\zeta = ae^{i(kx-\omega t)}, \quad \Phi = Ae^{i(kx-\omega t)}e^{-kz}$$

(Φ удовлетворяет уравнению $\Delta\Phi = 0$) и исключив a и A, получим искомую связь между k и ω:

$$\omega^2 = \frac{k}{\rho}(g\rho - 4\pi\sigma_0^2 k + \alpha k^2). \qquad (1)$$

Для того чтобы поверхность жидкости была устойчивой, частота ω должна быть вещественной при всех значениях k (в противном случае будут существовать комплексные ω с положительной мнимой частью и множитель $e^{-i\omega t}$ будет неограниченно возрастать). Условие положительности правой части равенства (1) гласит: $(4\pi\sigma_0^2)^2 - 4g\rho\alpha < 0$, откуда

$$\sigma_0^4 < \frac{g\rho\alpha}{4\pi^2}.$$

Это и есть условие устойчивости.

6. Найти условие устойчивости заряженной сферической капли (*Rayleigh*, 1882).

Р е ш е н и е. Сумма электростатической и поверхностной энергии капли

$$\mathscr{U} = \frac{e^2}{2C} + \alpha S,$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, C — емкость капли, S — площадь ее поверхности. Неустойчивость возникает (при увеличении e) по отношению к вытягиванию шара в эллипсоид и определяется моментом, когда $\mathscr{U}$ становится убывающей функцией эксцентриситета (при заданном объеме капли). Шарообразная форма всегда соответствует экстремуму $\mathscr{U}$; поэтому условие устойчивости гласит:

$$\left.\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial (a-b)^2}\right|_{a=b} > 0,$$

где a, b — полуоси эллипсоида, а дифференцирование производится при $ab^2 = \mathrm{const}$. Воспользовавшись известной формулой для поверхности эллипсоида и формулой (4.18) для его емкости, получим после довольно длинного вычисления

$$e^2 < 16\pi a^3 \alpha.$$

Это условие обеспечивает устойчивость капли относительно малых деформаций. Оно оказывается более слабым, чем условие устойчивости относительно большой деформации — деления на две одинаковые части (капли с зарядами $e/2$ и радиусами $a/2^{1/3}$):

$$e^2 < 16\pi a^3 \alpha \frac{2^{1/3} - 1}{2 - 2^{1/3}} = 0{,}35 \cdot 16\pi a^3 \alpha.$$

ГЛАВА II

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ДИЭЛЕКТРИКОВ

§ 6. Электростатическое поле в диэлектриках

Перейдем теперь к изучению постоянного электрического поля в другой категории материальных сред — в диэлектриках.

Основное свойство диэлектриков заключается в невозможности протекания в них постоянного тока. Поэтому, в отличие от проводников, напряженность постоянного электрического поля в диэлектриках отнюдь не должна быть равной нулю, и мы должны получить уравнения, которыми это поле описывается. Одно из них получается путем усреднения уравнения (1.3) и попрежнему гласит:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{6.1}$$

Второе же получается усреднением уравнения $\operatorname{div}\mathbf{e} = 4\pi\rho$:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\overline{\rho}. \tag{6.2}$$

Предположим, что внутрь вещества диэлектрика не внесено извне никаких посторонних зарядов; это есть наиболее обычный и важный случай. Тогда полный заряд во всем объеме диэлектрика остается равным нулю и после внесения его в электрическое поле:

$$\int \overline{\rho}\,dV = 0.$$

Это интегральное соотношение, которое должно выполняться для тела любой формы, означает, что средняя плотность зарядов может быть написана в виде дивергенции некоторого вектора, который принято обозначать как $-\mathbf{P}$:

$$\overline{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{P}, \tag{6.3}$$

причем вне тела $\mathbf{P} = 0$. Действительно, интегрируя по объему, ограниченному поверхностью, охватывающей тело и проходящей везде вне его, получим

$$\int \overline{\rho}\,dV = -\int \operatorname{div}\mathbf{P}\,dV = -\oint \mathbf{P}\,d\mathbf{f} = 0.$$

Величина $\mathbf{P}$ называется вектором *диэлектрической поляризации* (или просто поляризации) тела; диэлектрик, в котором $\mathbf{P}$ отлично от нуля, называют *поляризованным*. Наряду с объемной плотностью (6.3), вектор $\mathbf{P}$ определяет также и поверхностную плотность σ зарядов, распределенных по поверхности поляризованного диэлектрика. Если проинтегрировать формулу (6.3) по

элементу объема, заключенному между двумя бесконечно близкими единичными площадками, примыкающими с обеих сторон к поверхности диэлектрика, и учесть, что на наружной площадке $\mathbf{P} = 0$, то мы получим (ср. вывод формулы (1.9)):

$$\sigma = P_n, \tag{6.4}$$

где P_n — составляющая вектора $\mathbf{P}$ по внешней нормали к поверхности.

Для выяснения физического смысла самой величины $\mathbf{P}$ рассмотрим полный дипольный момент всех внутренних зарядов в диэлектрике; в отличие от полного заряда, эта величина не должна быть равной нулю. По определению дипольного момента это есть интеграл

$$\int \mathbf{r}\overline{\rho}\, dV.$$

Подставив $\overline{\rho}$ в виде (6.3) и снова интегрируя по объему, выходящему за пределы тела, получим

$$\int \mathbf{r}\overline{\rho}\, dV = -\int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P}\, dV = -\oint \mathbf{r}(d\mathbf{f}\,\mathbf{P}) + \int (\mathbf{P}\nabla)\mathbf{r}\, dV.$$

Интеграл по поверхности исчезает, а во втором имеем $(\mathbf{P}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{P}$, так что

$$\int \mathbf{r}\overline{\rho}\, dV = \int \mathbf{P}\, dV. \tag{6.5}$$

Таким образом, вектор поляризации представляет собой *дипольный момент* (или, как говорят, *электрический момент*) единицы объема диэлектрика [1]).

Подставив (6.3) в (6.2), получим второе уравнение электростатического поля в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \tag{6.6}$$

где введена новая величина $\mathbf{D}$, определяемая как

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \tag{6.7}$$

и называемая *электрической индукцией*. Уравнение (6.6) было получено путем усреднения плотности зарядов, входящих в состав диэлектрика. Если же в диэлектрик внесены извне посторонние по отношению к его веществу заряды (мы будем называть их

---

[1]) Следует заметить, что соотношение (6.3) внутри диэлектрика и условие $\mathbf{P} = 0$ вне его сами по себе еще не определяют величину $\mathbf{P}$ однозначным образом; в области внутри диэлектрика можно прибавить к $\mathbf{P}$ любой вектор вида $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. Лишь установление связи с дипольным моментом окончательно определяет $\mathbf{P}$.

сторонними), то к правой части уравнения (6.6) должна быть добавлена их плотность:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}}. \tag{6.8}$$

На поверхности раздела двух различных диэлектриков должны выполняться определенные граничные условия. Одно из этих условий является следствием уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Если поверхность раздела однородна по своим физическим свойствам [1]), то это условие требует непрерывности тангенциальной составляющей напряженности поля:

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \tag{6.9}$$

(ср. вывод условия (1.7)). Второе же условие следует из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ и требует непрерывности нормальной к поверхности составляющей индукции:

$$D_{n1} = D_{n2}. \tag{6.10}$$

Действительно, скачок нормальной составляющей $D_n = D_z$ означал бы обращение производной $\partial D_z/\partial z$ (а с нею и $\operatorname{div} \mathbf{D}$) в бесконечность.

На границе между диэлектриком и проводником $\mathbf{E}_t = 0$, а условие для нормальной компоненты получается из (6.8):

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad D_n = 4\pi\sigma_{\text{ст}}, \tag{6.11}$$

где $\sigma_{\text{ст}}$ — плотность зарядов на поверхности проводника (ср. (1.8), (1.9)).

§ 7. Диэлектрическая проницаемость

Для того чтобы уравнения (6.1) и (6.6) составляли полную систему уравнений, определяющих электростатическое поле, к ним надо еще присоединить соотношение, связывающее индукцию $\mathbf{D}$ и напряженность поля $\mathbf{E}$. В огромном большинстве случаев эту зависимость можно считать линейной. Она соответствует первым членам разложения $\mathbf{D}$ по степеням $\mathbf{E}$ и связана с малостью внешних электрических полей по сравнению с внутренними молекулярными полями.

Линейная зависимость $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$ приобретает особенно простой вид в важнейшем случае изотропных диэлектриков. Очевидно, что в изотропном диэлектрике векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ должны иметь

[1]) Т. е. по составу соприкасающихся тел, температуре и т. п. Если диэлектрик является кристаллом, то поверхность должна быть кристаллической плоскостью.

одинаковое направление. Поэтому их линейная зависимость сводится к простой пропорциональности [1]):

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \tag{7.1}$$

Коэффициент ε называется *диэлектрической проницаемостью* вещества и является функцией его термодинамического состояния.

Вместе с индукцией пропорциональна полю также и поляризация:

$$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{E} \equiv \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E}. \tag{7.2}$$

Величина $\varkappa$ называется коэффициентом поляризуемости вещества (или его *диэлектрической восприимчивостью*). Ниже (§ 14) будет показано, что диэлектрическая проницаемость всегда больше единицы; поляризуемость, соответственно, всегда положительна. Поляризуемость разреженной среды (газ) можно считать пропорциональной ее плотности.

Граничные условия (6.9) и (6.10) на поверхности раздела двух изотропных диэлектриков принимают вид

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}, \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}. \tag{7.3}$$

Таким образом, нормальная составляющая напряженности поля испытывает скачок, меняясь обратно пропорционально диэлектрическим проницаемостям соответствующих сред.

В однородном диэлектрике $\varepsilon = \mathrm{const}$, и тогда из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ следует, что и $\operatorname{div}\mathbf{P} = 0$. Ввиду определения (6.3) это значит, что объемная плотность зарядов в таком теле отсутствует (поверхностная же плотность (6.4), вообще говоря, отлична от нуля). Напротив, если диэлектрик не однороден, то имеем отличную от нуля объемную плотность

$$\overline{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\operatorname{div}\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon}\mathbf{D} = -\frac{\mathbf{D}}{4\pi}\operatorname{grad}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = -\frac{\mathbf{E}}{4\pi\varepsilon}\nabla\varepsilon.$$

Если ввести потенциал электрического поля согласно $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, то уравнение (6.1) удовлетворяется автоматически, а уравнение $\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 0$ дает

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = 0. \tag{7.4}$$

---

[1]) Такая зависимость, предполагающая обращение $\mathbf{D}$ в нуль одновременно с $\mathbf{E}$, справедлива, строго говоря, лишь в однородных по своим физическим свойствам (составу, температуре и т. п.) диэлектриках. В неоднородных телах $\mathbf{D}$ может иметь отличные от нуля значения и при $\mathbf{E} = 0$, определяясь при этом градиентами меняющихся вдоль тела термодинамических величин. Эти члены, однако, весьма малы и мы будем пользоваться в дальнейшем соотношением (7.1) и в неоднородных телах.

Это уравнение переходит в обычное уравнение Лапласа лишь в однородной диэлектрической среде. Граничные условия (7.3) можно переписать в виде следующих условий для потенциала:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \tag{7.5}$$

(условие непрерывности тангенциальных производных потенциала эквивалентно условию непрерывности самого φ).

В кусочно-однородной диэлектрической среде уравнение (7.4) сводится в каждом однородном участке к уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$, так что диэлектрические проницаемости входят в решение задачи только через посредство условий (7.5). Но эти условия содержат лишь отношение диэлектрических проницаемостей двух соприкасающихся сред. Поэтому, в частности, решение электростатической задачи для диэлектрического тела с проницаемостью ε_2, окруженного средой с проницаемостью ε_1, сводится к такой же задаче для тела с проницаемостью $\varepsilon_2/\varepsilon_1$, находящегося в пустоте.

Рассмотрим вопрос о том, как меняются полученные в предыдущих параграфах результаты для электростатического поля проводников, если последние находятся не в пустоте, а погружены в однородную и изотропную диэлектрическую среду. В обоих случаях распределение потенциала описывается уравнением $\Delta\varphi = 0$ с граничным условием постоянства φ на поверхности проводника, и все отличие заключается в том, что вместо связи $E_n = -\partial\varphi/\partial n = 4\pi\sigma$ с поверхностной плотностью зарядов теперь будет:

$$D_n = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma. \tag{7.6}$$

Отсюда видно, что решение задачи о поле заряженного проводника в пустоте переходит в решение той же задачи в диэлектрической среде путем формальной замены потенциалов и зарядов: либо $\varphi \to \varepsilon\varphi$, $e \to e$, либо $\varphi \to \varphi$, $e \to e/\varepsilon$. При заданных зарядах проводников потенциал и напряженность поля убывают в ε раз по сравнению с их значениями для поля в пустоте; это ослабление поля может быть наглядно истолковано как результат частичной экранировки заряда проводника поверхностными зарядами прилегающего к нему поляризованного диэлектрика. Если же поддерживаются постоянными потенциалы проводников, то поле остается неизменным, но увеличиваются в ε раз заряды проводников [1]).

Наконец, отметим, что в электростатике можно формально рассматривать проводник (незаряженный) как тело с бесконеч-

---

[1]) Отсюда следует, в частности, что при заполнении конденсатора диэлектриком, его емкость увеличивается в ε раз.

ной диэлектрической проницаемостью — в том смысле, что влияние, оказываемое им на внешнее электрическое поле, такое же, какое оказывал бы диэлектрик (той же формы) с $\varepsilon \to \infty$. Действительно, в силу конечности граничного условия для индукции $\mathbf{D}$ она должна оставаться конечной внутри тела и при $\varepsilon \to \infty$; но это означает, что в таком поле будет $\mathbf{E} = 0$, в соответствии со свойствами проводника.

З а д а ч и

1. Определить поле, создаваемое точечным зарядом e, расположенным на расстоянии h от плоской границы раздела двух различных диэлектрических сред.

Р е ш е н и е. Назовем точку, в которой находится заряд e в среде *1*, точкой O, а ее зеркальное отображение по другую сторону плоскости раздела (в среде *2*) – точкой O' (рис. 11). Будем искать поле в среде *1* как поле, создаваемое двумя точечными зарядами, — зарядом e и фиктивным зарядом e' в точке O' (ср. метод изображений, § 3):

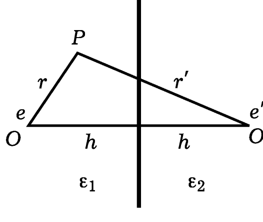


Рис. 11

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + \frac{e'}{\varepsilon_1 r'},$$

где r, r' — расстояния точки наблюдения соответственно от O и O'. Поле же в среде *2* ищем в виде поля, создаваемого фиктивным зарядом e'', находящимся в точке O:

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\varepsilon_2 r}.$$

На граничной плоскости ($r = r'$) должны выполняться условия (7.5), из которых получаем уравнения

$$e - e' = e'', \quad \frac{e+e'}{\varepsilon_1} = \frac{e''}{\varepsilon_2};$$

отсюда

$$e' = e\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad e'' = e\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{1}$$

При $\varepsilon_2 \to \infty$ имеем $e' = -e$, $\varphi_2 = 0$, т. е. мы возвращаемся к результату, полученному в § 3 для поля точечного заряда вблизи проводящей плоскости.

Сила, действующая на заряд e (*сила изображения*), равна

$$F = \frac{ee'}{(2h)^2\varepsilon_1} = \left(\frac{e}{2h}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)};$$

$F > 0$ соответствует отталкиванию.

2. То же для бесконечной прямой заряженной нити, расположенной параллельно плоскости раздела на расстоянии h от нее.

Р е ш е н и е вполне аналогично решению предыдущей задачи, с той лишь разницей, что потенциалы поля в обеих средах:

$$\varphi_1 = -\frac{2e}{\varepsilon_1}\ln r - \frac{2e'}{\varepsilon_1}\ln r', \quad \varphi_2 = -\frac{2e''}{\varepsilon_2}\ln r,$$

где e, e', e'' — заряды на единице длины нити и ее «изображений», а r, r' —

расстояния в плоскости, перпендикулярной к нитям. Для e, e', e'' получаются те же выражения (1), а сила, действующая на единицу длины нити,

$$F = \frac{2ee'}{2h\varepsilon_1} = \frac{e^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{h\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

3. Определить поле, создаваемое бесконечной прямой заряженной нитью, расположенной (в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1) параллельно цилиндру (с $\varepsilon = \varepsilon_2$) радиуса a на расстоянии b ($b > a$) от его оси [1].

Р е ш е н и е. Поле в среде *1* будем искать как поле, которое создавалось бы в однородном диэлектрике ε_1 реальной заряженной нитью (проходящей через точку O, рис. 12) с зарядом e на единице длины и двумя фиктивными нитями с зарядами e' и $-e'$, проходящими соответственно через точки A и O'. Точка A расположена на расстоянии $AO' = a^2/b$ от центра окружности; тогда для всех точек окружности расстояния r и r' соответственно до точек O и A находятся в постоянном отношении $r'/r = a/b$, в результате чего окажется возможным удовлетворить граничным условиям на этой окружности. Поле же в среде *2* будем искать как поле, которое создавали бы в однородной среде ε_2 фиктивные заряды e'' на нити, проходящей через O.

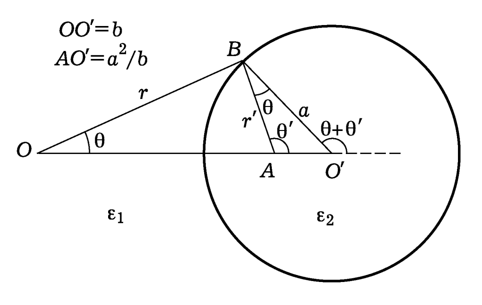


Рис. 12

Граничные условия на поверхности раздела удобно сформулировать с помощью потенциала φ ($\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$) и векторого потенциала $\mathbf{A}$ (ср. § 3), определенного из $\mathbf{D} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ (в согласии с уравнением $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$); в плоской задаче вектор $\mathbf{A}$ направлен вдоль оси z (перпендикулярно к плоскости рисунка). Условия непрерывности касательных компонент $\mathbf{E}$ и нормальной компоненты $\mathbf{D}$ эквивалентны условиям

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad A_1 = A_2.$$

Для поля заряженной нити имеем в полярных координатах r, θ:

$$\varphi = -\frac{2e}{\varepsilon}\ln r + \text{const}, \quad A = 2e\theta + \text{const}$$

(ср. (3.18)). Поэтому граничные условия гласят:

$$\frac{2}{\varepsilon_1}(-e\ln r - e'\ln r' + e'\ln a) = -\frac{2e''}{\varepsilon_2}\ln r + \text{const},$$

$$2[e\theta + e'\theta' - e'(\theta + \theta')] = 2e''\theta$$

(обозначение углов дано на рис. 12; использовано подобие треугольников $OO'B$ и $BO'A$). Отсюда $\varepsilon_2(e + e') = \varepsilon_1 e''$, $e - e' = e''$, и для e', e'' снова получаются выражения (1) из задачи 1.

---

[1]) Аналогичная задача о точечном заряде вблизи диэлектрической сферы не решается в конечном виде.

Сила, действующая на единицу длины заряженной нити, параллельна OO' и равна

$$F = eE = \frac{2ee'}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'}\right) = \frac{2e^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)a^2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)b(b^2-a^2)}$$

($F > 0$ соответствует отталкиванию). В пределе a, $b \to \infty$, $b - a \to h$ это выражение переходит в результат задачи 1.

4. То же, если нить проходит внутри цилиндра с диэлектрической проницаемостью ε_2 ($b < a$).

Р е ш е н и е. Поле в среде *2* ищем как поле реальной нити e (точка O на рис. 13) и фиктивной нити e', проходящей через точку A, расположенную теперь вне цилиндра. Поле же в среде *1* ищем как поле нитей с зарядами e'' и $e - e''$, проходящих соответственно через O и O'. Тем же способом, как и в предыдущей задаче, получим

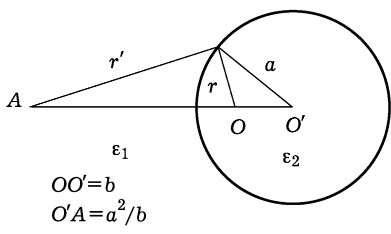


Рис. 13

$$e' = -e\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, \quad e'' = e\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}.$$

Нить отталкивается (при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$) от цилиндра с силой

$$F = \frac{2ee'}{\varepsilon_2}\frac{1}{OA} = \frac{2e^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)b}{\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(a^2-b^2)}.$$

5. Показать, что потенциал поля $\varphi_A(\mathbf{r}_B)$, создаваемый в точке $\mathbf{r}_B$ произвольной неоднородной диэлектрической среды точечным зарядом e, находящимся в точке $\mathbf{r}_A$, равен потенциалу $\varphi_B(\mathbf{r}_A)$, создаваемому в точке $\mathbf{r}_A$ тем же зарядом, находящимся в точке $\mathbf{r}_B$.

Р е ш е н и е. Потенциалы $\varphi_A(\mathbf{r})$ и $\varphi_B(\mathbf{r})$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi_A) = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad \operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi_B) = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B).$$

Умножив первое из них на φ_B, а второе на φ_A и вычтя почленно одно из другого, найдем

$$\operatorname{div}(\varphi_B\varepsilon\nabla\varphi_A) - \operatorname{div}(\varphi_A\varepsilon\nabla\varphi_B) = -4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_A)\varphi_B(\mathbf{r}) + 4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_B)\varphi_A(\mathbf{r}).$$

Интегрирование этого равенства по всему пространству дает искомое соотношение: $\varphi_A(\mathbf{r}_B) = \varphi_B(\mathbf{r}_A)$.

§ 8. Диэлектрический эллипсоид

Поляризация диэлектрического эллипсоида, помещенного во внешнее однородное электрическое поле, обладает некоторыми своеобразными особенностями, придающими этому примеру особый интерес.

Рассмотрим предварительно простой частный случай — диэлектрический шар во внешнем поле $\mathfrak{E}$. Обозначим его диэлектрическую проницаемость через $\varepsilon^{(i)}$, а диэлектрическую проницаемость внешней среды, в которую он погружен, — через $\varepsilon^{(e)}$. Выберем начало сферической системы координат в центре шара

(полярный угол θ отсчитывается от направления $\mathfrak{E}$) и будем искать потенциал поля вне шара в виде

$$\varphi^{(e)} = -\mathfrak{E}\mathbf{r} + A\mathfrak{E}\frac{\mathbf{r}}{r^3};$$

первый член есть потенциал приложенного внешнего поля, а второй член, обращающийся на бесконечности в нуль, дает искомое изменение потенциала, вызываемое шаром (ср. решение задачи 1 § 3). Потенциал же поля внутри шара ищем в виде

$$\varphi^{(i)} = -B\mathfrak{E}\mathbf{r};$$

это есть единственная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, остающаяся конечной в центре шара и зависящая только от постоянного вектора $\mathfrak{E}$ — единственного параметра, входящего в данную задачу.

Постоянные A и B определяются граничными условиями на поверхности шара. Но уже сразу отметим, что поле внутри шара $\mathbf{E}^{(i)} = B\mathfrak{E}$ оказывается однородным, отличающимся от приложенного поля $\mathfrak{E}$ лишь своей абсолютной величиной.

Граничное условие непрерывности потенциала дает

$$E^{(i)} = \mathfrak{E}\left(1 - \frac{A}{R^3}\right)$$

(R — радиус шара), а условие непрерывности нормальной составляющей индукции —

$$D^{(i)} = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}\left(1 + \frac{2A}{R^3}\right).$$

Исключая из этих двух равенств A, получим

$$\frac{1}{3}(\mathbf{D}^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}) = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E} \qquad (8.1)$$

или, подставив $\mathbf{D}^{(i)} = \varepsilon^{(i)}\mathbf{E}^{(i)}$,

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{3\varepsilon^{(e)}}{2\varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(i)}}\mathfrak{E}. \qquad (8.2)$$

Аналогичным способом решается задача о диэлектрическом бесконечном цилиндре во внешнем поле, перпендикулярном к его оси (ср. задачу 2 § 3). Поле внутри цилиндра, как и внутри шара в предыдущем примере, оказывается однородным. Оно удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^{(i)} + \varepsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}) = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}, \qquad (8.3)$$

или

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{2\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(e)}}\mathfrak{E}. \qquad (8.4)$$

Соотношения (8.1) и (8.3), в которые диэлектрическая проницаемость $\varepsilon^{(i)}$ шара или цилиндра не входит в явном виде, особенно важны потому, что их справедливость не связана с линейной зависимостью между **E** и **D** внутри тела; они имеют место при любом виде этой зависимости (в том числе для анизотропных тел). Такой же характер имеют аналогичные соотношения:

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathfrak{E} \tag{8.5}$$

для цилиндра в продольном поле, и

$$\mathbf{D}^{(i)} = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E} \tag{8.6}$$

для плоскопараллельной пластинки в перпендикулярном к ней поле; эти равенства очевидны из граничных условий.

Свойство создавать внутри себя однородное поле (будучи помещенным во внешнее однородное поле) присуще, оказывается, вообще всякому эллипсоиду с произвольным соотношением полуосей a, b, c. Задача о поляризации диэлектрического эллипсоида решается с помощью эллипсоидальных координат, подобно тому, как была решена в § 4 аналогичная задача для проводящего эллипсоида.

Потенциал поля вне эллипсоида ищем снова в виде (4.22) $\varphi'_e = \varphi_0 F(\xi)$ с функцией $F(\xi)$ из (4.23). В потенциал же поля внутри эллипсоида φ_i функция такого вида войти не может, так как она не удовлетворяет условию конечности поля во всем объеме внутри эллипсоида. Действительно, рассмотрим поверхность $\xi = -c^2$, представляющую собой часть плоскости xy, ограниченную эллипсом с полуосями $(a^2 - c^2)^{1/2}$ и $(b^2 - c^2)^{1/2}$, лежащим внутри объема эллипсоида. При $\xi \to -c^2$ интеграл (4.23) ведет себя как $\sqrt{\xi + c^2}$. Напряженность поля, т. е. градиент потенциала, будет вести себя, следовательно, как $(\xi+c^2)^{-1/2}$ и обращается в бесконечность при $\xi = -c^2$. Таким образом, для поля внутри эллипсоида пригодно лишь решение $F(\xi) = \text{const}$, т. е. φ_i надо искать в виде

$$\varphi_i = B\varphi_0.$$

Мы видим, что потенциал φ_i отличается от потенциала однородного поля φ_0 только постоянным множителем. Другими словами, поле внутри эллипсоида будет однородным.

Мы не станем выписывать здесь формулы для поля вне эллипсоида. Однородное же поле внутри эллипсоида можно найти без фактического выписывания граничных условий, воспользовавшись вместо этого некоторыми уже известными нам результатами.

Предположим сначала, что эллипсоид находится в пустоте ($\varepsilon^{(e)} = 1$). Тогда между векторами $\mathbf{E}^{(i)}$, $\mathbf{D}^{(i)}$, $\mathfrak{E}$ (которые все имеют одинаковое направление — вдоль оси x) должна существовать линейная связь вида

$$aE_x^{(i)} + bD_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x,$$

где коэффициенты a, b зависят не от диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{(i)}$ эллипсоида, а только от его формы. Наличие такой связи следует из вида граничных условий, в чем мы уже убедились выше на примерах шара и цилиндра.

Для определения a и b замечаем, что в тривиальном частном случае $\varepsilon^{(i)} = 1$ было бы просто $\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathfrak{E}$; отсюда $a + b = 1$. Другой уже известный нам частный случай — проводящий эллипсоид. В проводнике $\mathbf{E}^{(i)} = 0$, а индукция $\mathbf{D}^{(i)}$ не имеет непосредственного физического смысла, но может рассматриваться как формальная величина, связанная с полным дипольным моментом эллипсоида соотношением

$$\mathbf{D}^{(i)} = 4\pi\mathbf{P} = \frac{4\pi}{V}\boldsymbol{\mathscr{P}}.$$

Согласно (4.26) при этом будет

$$D_x^{(i)} = \frac{\mathfrak{E}_x}{n^{(x)}},$$

т. е. коэффициент $b = n^{(x)}$, а потому $a = 1 - n^{(x)}$.

Таким образом, мы приходим к соотношению

$$(1 - n^{(x)})E_x^{(i)} + n^{(x)}D_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x, \tag{8.7}$$

или

$$E_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x - 4\pi n^{(x)}P_x. \tag{8.8}$$

Величину $4\pi n^{(x)}P_x$ называют *деполяризующим полем* [1]).

Такие же соотношения (с коэффициентами $n^{(y)}$, $n^{(z)}$) справедливы для поля вдоль осей y и z. Как и частные формулы (8.1), (8.3), они справедливы при любом виде зависимости между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ внутри эллипсоида.

Для напряженности поля внутри эллипсоида получим из (8.7), положив $D_x^{(i)} = \varepsilon^{(i)}E_x^{(i)}$:

$$E_x^{(i)} = \frac{\mathfrak{E}_x}{1 + (\varepsilon^{(i)} - 1)n^{(x)}}, \tag{8.9}$$

---

[1]) Аналогичные формулы справедливы для намагничивающегося эллипсоида во внешнем однородном магнитном поле (см. § 29). В этой связи коэффициенты $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ называют *коэффициентами размагничивания.*

а полный дипольный момент эллипсоида

$$\mathscr{P}_x = VP_x = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon^{(i)} - 1)VE_x^{(i)} = \frac{abc}{3}\frac{\varepsilon^{(i)} - 1}{1 + (\varepsilon^{(i)} - 1)n^{(x)}}\mathfrak{E}_x. \quad (8.10)$$

Если поле $\mathfrak{E}$ имеет составляющие по всем трем осям, то поле внутри эллипсоида по-прежнему будет однородным, но, вообще говоря, не параллельным $\mathfrak{E}$. Не предрешая выбор системы координат, можно написать в общем случае соотношение (8.7) в виде

$$E_i^{(i)} = n_{ik}(D_k^{(i)} - E_k^{(i)}) = \mathfrak{E}_i. \quad (8.11)$$

Переход к случаю диэлектрической проницаемости среды, отличной от 1, совершается просто путем замены $\varepsilon^{(i)}$ на $\varepsilon^{(i)}/\varepsilon^{(e)}$. При этом формула (8.7) принимает вид

$$(1 - n^{(x)})\varepsilon^{(e)}E_x^{(i)} + n^{(x)}D_x^{(i)} = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}_x. \quad (8.12)$$

Эта формула может быть применена, в частности, к полю внутри эллипсоидального отверстия в неограниченной диэлектрической среде: для этого надо положить $\varepsilon^{(i)} = 1$.

Задачи[1])

1. Определить момент сил, действующих на эллипсоид вращения в однородном электрическом поле.

Решение. Согласно общей формуле (16.13) момент сил, действующих на эллипсоид, равен $\mathbf{K} = [\mathscr{P}\mathfrak{E}]$, где $\mathscr{P}$ — дипольный момент эллипсоида. В эллипсоиде вращения вектор $\mathscr{P}$ лежит в плоскости, проходящей через ось симметрии и направление $\mathfrak{E}$. Момент же сил направлен перпендикулярно к этой плоскости, а для его абсолютной величины вычисление с помощью формул (8.10) приводит к результату

$$K = \frac{(\varepsilon - 1)^2|1 - 3n|V\sin 2\alpha}{8\pi(n\varepsilon + 1 - n)[(1 - n)\varepsilon + 1 + n]}\mathfrak{E}^2,$$

где α — угол между направлением $\mathfrak{E}$ и осью симметрии эллипсоида, а n — коэффициент деполяризации вдоль этой оси (так что коэффициент деполяризации в перпендикулярных к этой оси направлениях есть $(1/2)(1 - n)$). Момент сил направлен так, что он стремится повернуть ось симметрии вытянутого ($n < 1/3$) и сплюснутого ($n > 1/3$) эллипсоидов в положение, соответственно параллельно и перпендикулярно к полю.

Для проводящего эллипсоида ($\varepsilon \to \infty$) имеем

$$K = \frac{|1 - 3n|}{8\pi n(1 - n)}V\mathfrak{E}^2\sin 2\alpha.$$

2. Диэлектрический полый шар (диэлектрическая проницаемость ε, внутренний и внешний радиусы b и a) находится в однородном внешнем электрическом поле $\mathfrak{E}$. Определить поле в полости шара.

[1]) В задачах этого параграфа предполагается, что эллипсоид находится в пустоте.

Р е ш е н и е. Аналогично тому, как было сделано в тексте для сплошного шара, ищем потенциал поля в пустоте снаружи шара (область *1*) и внутри полости (область *3*) соответственно в виде

$$\varphi_1 = -\mathfrak{E}\cos\theta\left(r - \frac{A}{r^2}\right), \quad \varphi_3 = -B\mathfrak{E}r\cos\theta,$$

а потенциал поля в диэлектрическом слое (область *2*) — в виде

$$\varphi_2 = -C\mathfrak{E}\cos\theta\left(r - \frac{D}{r^2}\right),$$

где A, B, C, D — постоянные, определяющиеся из условий непрерывности φ и $\varepsilon\,\partial\varphi/\partial r$ на границах *1–2* и *2–3*. Таким образом, поле $\mathbf{E}_3 = B\mathfrak{E}$ внутри полости оказывается однородным (поле же $\mathbf{E}_2$ в шаровом слое неоднородно). Вычисление постоянных приводит к результату:

$$\mathbf{E}_3 = \mathfrak{E}\frac{9\varepsilon}{(\varepsilon+2)(2\varepsilon+1) - 2(\varepsilon-1)^2(b/a)^3}.$$

3. То же для полого цилиндра в поперечном однородном поле [1]).

Р е ш е н и е аналогично предыдущей задаче и приводит к результату:

$$\mathbf{E}_3 = \mathfrak{E}\frac{4\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2 - (\varepsilon-1)^2(b/a)^2}.$$

§ 9. Диэлектрическая проницаемость смеси

Если вещество представляет собой мелкодисперсную смесь (эмульсия, порошкообразная смесь и т. п.), то можно рассматривать электрическое поле, усредненное по объемам, большим по сравнению с масштабами неоднородностей. По отношению к такому среднему полю смесь является однородной и изотропной средой и как таковая может характеризоваться определенным эффективным значением диэлектрической проницаемости, которое мы обозначим $\varepsilon_{\text{см}}$. Если $\overline{\mathbf{E}}$ и $\overline{\mathbf{D}}$ — усредненные указанным образом напряженность и индукция поля, то, по определению

$$\overline{\mathbf{D}} = \varepsilon_{\text{см}}\overline{\mathbf{E}}. \tag{9.1}$$

Если все частицы смеси изотропны, а разности между их диэлектрическими проницаемостями малы по сравнению с самими ε, то оказывается возможным вычислить в общем виде $\varepsilon_{\text{см}}$ с точностью до членов второго порядка по указанным разностям.

Напишем местное значение напряженности поля в виде $\mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E}$, а местное значение диэлектрической проницаемости — как $\overline{\varepsilon} + \delta\varepsilon$, где

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{V}\int\varepsilon\,dV \tag{9.2}$$

[1]) В продольном поле ответ очевиден: $\mathbf{E}_3 = \mathfrak{E}$.

получается усреднением по объему. Тогда среднее значение индукции

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)(\overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E})} = \bar{\varepsilon}\overline{\mathbf{E}} + \overline{\delta\varepsilon\,\delta\mathbf{E}} \tag{9.3}$$

(так как, по определению $\delta\varepsilon$ и $\delta\mathbf{E}$, их средние значения равны нулю). В нулевом приближении $\varepsilon_{\text{см}} = \bar{\varepsilon}$; первый отличный от нуля поправочный член будет, естественно, второго порядка по $\delta\varepsilon$, как это видно и из (9.3).

Из неусредненного уравнения $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, с точностью до малых членов первого порядка, имеем

$$\operatorname{div}(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)(\overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E}) = \bar{\varepsilon}\operatorname{div}\delta\mathbf{E} + \overline{\mathbf{E}}\nabla\delta\varepsilon = 0. \tag{9.4}$$

Усреднение произведения $\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}$ в (9.3) проводим в два этапа. Прежде всего, усредняем по объему частиц одного и того же вещества, т. е. при заданном значении $\delta\varepsilon$. Усредненное таким образом значение $\delta\mathbf{E}$ легко получить из уравнения (9.4). Именно, ввиду изотропии смеси в целом имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{\delta E_x} = \frac{\partial}{\partial y}\overline{\delta E_y} = \frac{\partial}{\partial z}\overline{\delta E_z} = \frac{1}{3}\operatorname{div}\overline{\delta\mathbf{E}}.$$

Если, скажем, вектор $\overline{\mathbf{E}}$ направлен по оси x, то из (9.4) имеем

$$3\bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\overline{\delta E_x} = -\overline{E_x}\,\frac{\partial\,\delta\varepsilon}{\partial x},$$

откуда

$$\overline{\delta E_x} = -\frac{\overline{E_x}}{3\bar{\varepsilon}}\delta\varepsilon.$$

Ввиду произвольности выбора направления оси x, это равенство можно написать в векторном виде:

$$\overline{\delta\mathbf{E}} = -\frac{\overline{\mathbf{E}}}{3\bar{\varepsilon}}\delta\varepsilon.$$

Умножив на $\delta\varepsilon$ и произведя окончательное усреднение по всем компонентам смеси, получим

$$\overline{\delta\varepsilon\,\delta\mathbf{E}} = -\frac{\overline{\mathbf{E}}}{3\bar{\varepsilon}}\overline{(\delta\varepsilon)^2}.$$

Наконец, подставив это выражение в (9.3) и сравнив с (9.1), получим искомый результат:

$$\varepsilon_{\text{см}} = \bar{\varepsilon} - \frac{1}{3\bar{\varepsilon}}\overline{(\delta\varepsilon)^2}. \tag{9.5}$$

Эта формула может быть представлена и в другом виде, если заметить, что с точностью до членов второго порядка

$$\overline{\varepsilon^{1/3}} = \overline{(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)^{1/3}} = \bar{\varepsilon}^{1/3}\left(1 - \frac{\overline{(\delta\varepsilon)^2}}{9\bar{\varepsilon}^2}\right).$$

Поэтому

$$\varepsilon_{\text{см}}^{1/3} = \overline{\varepsilon^{1/3}}. \tag{9.6}$$

Таким образом, можно сказать, что в рассматриваемом приближении оказывается аддитивным кубический корень из ε.

Другой предельный случай, допускающий точное рассмотрение, — диэлектрическая проницаемость эмульсии с произвольной разницей между диэлектрическими проницаемостями среды (ε_1) и диспергированной фазы (ε_2), но малой концентрацией последней; частицы диспергированной фазы предполагаются сферическими.

В интеграле

$$\frac{1}{V}\int (\mathbf{D} - \varepsilon_1 \mathbf{E})\, dV \equiv \overline{\mathbf{D}} - \varepsilon_1 \overline{\mathbf{E}}$$

подынтегральное выражение отлично от нуля только внутри частиц эмульсии. Поэтому он пропорционален объемной концентрации эмульсии c и при его вычислении можно считать, что частицы эмульсии находятся во внешнем поле, совпадающем со средним полем $\overline{\mathbf{E}}$. Воспользовавшись для сферических частиц формулой (8.2), получим для коэффициента пропорциональности между $\overline{\mathbf{D}}$ и $\overline{\mathbf{E}}$:

$$\varepsilon_{\text{см}} = \varepsilon_1 + c\,\frac{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}. \tag{9.7}$$

Эта формула справедлива с точностью до членов первого порядка по c. При близких ε_1 и ε_2 она совпадает (с точностью до членов первого порядка по c и второго — по $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$) с результатом, даваемым при малых c формулой (9.5).

§ 10. Термодинамические соотношения для диэлектриков в электрическом поле

Вопрос об изменении термодинамических свойств благодаря наличию электрического поля не возникает для проводников. Поскольку электрическое поле внутри проводника отсутствует, то все изменение его термодинамических величин сводится просто к добавлению энергии создаваемого им в окружающем пространстве поля к его полной энергии [1]). Эта величина вообще не зависит от термодинамического состояния (в частности, от температуры) тела и потому, например, не сказывается на его энтропии.

---

[1]) Мы отвлекаемся здесь от энергии связи заряда с веществом проводника; эта энергия будет рассмотрена в § 23.

Напротив, на термодинамические свойства диэлектриков электрическое поле, проникая внутрь тела, оказывает глубокое влияние. Для изучения этих свойств, прежде всего, определим работу, производимую над теплоизолированным диэлектриком при бесконечно малом изменении поля в нем.

Электрическое поле, в котором находится диэлектрик, надо представлять себе как создаваемое некоторыми посторонними заряженными проводниками, а изменение поля можно тогда рассматривать как результат изменения зарядов проводников [1]). Предположим для краткости, что имеется всего один проводник с зарядом e и потенциалом φ. Работа, которую надо произвести для того, чтобы увеличить его заряд на бесконечно малую величину δe, равна

$$\delta R = \varphi\,\delta e; \tag{10.1}$$

это есть механическая работа, производимая заданным полем над зарядом δe, переносимым из бесконечности (где потенциал поля равен нулю) к поверхности проводника и проходящим, следовательно, разность потенциалов, равную φ. Преобразуем δR к виду, выраженному через значения поля в окружающем проводник пространстве, заполненном диэлектриком.

Если D_n — проекция вектора электрической индукции на направление нормали к поверхности проводника, внешней по отношению к диэлектрику (и внутренней по отношению к проводнику), то поверхностная плотность зарядов на проводнике равна $-D_n/(4\pi)$, так что

$$e = -\frac{1}{4\pi}\oint D_n\,df = -\frac{1}{4\pi}\oint \mathbf{D}\,d\mathbf{f}.$$

Имея в виду, что потенциал φ постоянен вдоль всей поверхности проводника, пишем

$$\delta R = \varphi\,\delta e = -\frac{1}{4\pi}\int \varphi\,\delta\mathbf{D}\,d\mathbf{f} = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\,\delta\mathbf{D})\,dV.$$

Последний интеграл справа берется по всему объему вне проводника. Поскольку варьированное поле, как и первоначальное, удовлетворяет уравнению поля, то $\operatorname{div}\delta\mathbf{D} = 0$, так что

$$\operatorname{div}(\varphi\,\delta\mathbf{D}) = \varphi\operatorname{div}\delta\mathbf{D} + \delta\mathbf{D}\operatorname{grad}\varphi = -\mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}.$$

---

[1]) Окончательные выражения, которые будут нами получены, содержат только значения поля внутри диэлектрика и потому не зависят от происхождения поля. Ввиду этого нам не нужно особо оговаривать случаи, когда поле создается не заряженными проводниками, а, например, внесенными в самый диэлектрик сторонними зарядами или же его пироэлектрической (см. § 13) поляризацией.

Таким образом, получаем окончательно следующую важную формулу:

$$\delta R = \int \frac{\mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}}{4\pi}\,dV. \tag{10.2}$$

Подчеркнем, что интегрирование в этой формуле производится по всему полю, в том числе и по области вакуума, если диэлектрическая среда занимает не весь объем пространства вне проводника.

Работа, произведенная над теплоизолированным телом, есть не что иное, как изменение энергии тела при постоянной его энтропии. Поэтому выражение (10.2) должно быть добавлено к термодинамическому соотношению, определяющему бесконечно малое изменение полной энергии тела, включающей в себя также и энергию электрического поля. Обозначив эту энергию через $\mathscr{U}$, имеем, следовательно,

$$\delta\mathscr{U} = T\,\delta\mathscr{S} + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}\,dV \tag{10.3}$$

(T — температура, $\mathscr{S}$ — энтропия тела) [1]. Соответственно для полной свободной энергии $\mathscr{F} = \mathscr{U} - T\mathscr{S}$ [2] имеем

$$\Delta\mathscr{F} = -\mathscr{S}\,\delta T + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}\,dV. \tag{10.4}$$

Аналогичные термодинамические соотношения могут быть написаны и для величин, относящихся к единице объема тела. Пусть U, S и ρ — внутренняя энергия, энтропия и масса единицы объема тела. Как известно, обычное термодинамическое соотношение (в отсутствие поля) для внутренней энергии в заданном объеме гласит:

$$dU = T\,dS + \zeta\,d\rho,$$

где ζ — химический потенциал вещества [3]. При наличии поля в диэлектрике сюда должен быть добавлен член, взятый из подынтегрального выражения в (10.3):

$$dU = T\,dS + \zeta\,d\rho + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \tag{10.5}$$

---

[1] Объем тела предполагается в (10.3), (10.4) постоянным. Следует, однако, иметь в виду, что в электрическом поле тело становится, вообще говоря, неоднородным, и потому объем не характеризует его состояния.

[2] Эту величину имеет смысл рассматривать лишь при постоянной вдоль тела температуре.

[3] См. V, § 24. Вместо плотности массы мы пользовались там числом частиц N в единице объема: $\rho = Nm$, где m — масса молекулы. Химический потенциал ζ, отнесенный к единице массы, отличается множителем от химического потенциала μ, отнесенного к одной частице: $\zeta = \mu/m$.

Обозначение плотности массы вещества той же буквой ρ, что и плотность зарядов, не может привести к недоразумению, так как эти величины нигде не будут фигурировать вместе.

Для свободной энергии $F = U - TS$ единицы объема диэлектрика имеем соответственно

$$dF = -S\,dT + \zeta\,d\rho + \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \tag{10.6}$$

Полученные соотношения представляют собой основу термодинамики диэлектриков.

Мы видим, что величины U и F являются термодинамическими потенциалами соответственно по отношению к переменным S, ρ, $\mathbf{D}$ и T, ρ, $\mathbf{D}$. В частности, можно получить напряженность поля путем дифференцирования этих потенциалов по компонентам вектора $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{E} = 4\pi\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{D}}\right)_{S,\,\rho} = 4\pi\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}}\right)_{T,\,\rho}. \tag{10.7}$$

Свободная энергия в этом отношении удобнее, так как ее дифференцирование должно производиться при постоянной температуре, между тем как внутренняя энергия должна при этом быть выражена через менее удобную величину — энтропию.

Наряду с U и F полезно ввести термодинамические потенциалы, в которых роль независимых переменных играют компоненты вектора $\mathbf{E}$, а не $\mathbf{D}$. Таковыми являются величины

$$\widetilde{U} = U - \frac{\mathbf{ED}}{4\pi}, \quad \widetilde{F} = F - \frac{\mathbf{ED}}{4\pi}, \tag{10.8}$$

для дифференциалов которых имеем

$$\begin{aligned} d\widetilde{U} &= T\,dS + \zeta\,d\rho - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\,d\mathbf{E}, \\ d\widetilde{F} &= -S\,dT + \zeta\,d\rho - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\,d\mathbf{E}. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\mathbf{D} = -4\pi\left(\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{S,\,\rho} = -4\pi\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T,\,\rho}. \tag{10.10}$$

Обратим внимание на то, что связь между термодинамическими величинами, которые мы обозначаем буквами со знаком $\sim$ и без него, как раз соответствует той, которая уже была введена в § 5 для энергии электростатического поля проводников в пустоте. Действительно, интеграл $\int \mathbf{ED}\,dV$ можно преобразовать совершенно аналогично тому, как мы это делали в начале § 2, используя при этом уравнение $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ в объеме диэлектрика и граничное условие $D_n = 4\pi\sigma$ на поверхности проводников:

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{ED}\,dV = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{D}\,dV = \frac{1}{4\pi}\sum_a \int \varphi_a D_n\,df = \sum_a \varphi_a e_a. \tag{10.11}$$

Поэтому, например, для внутренней энергии:

$$\widetilde{\mathscr{U}} = \mathscr{U} - \int \frac{\mathbf{ED}}{4\pi}\,dV = \mathscr{U} - \sum_a \varphi_a e_a, \tag{10.12}$$

в соответствии с определением (5.5).

Полезно сопоставить также формулы для бесконечно малых изменений этих величин, выраженных через заряды и потенциалы проводников (источников поля). Так, для вариации свободной энергии (при заданной температуре) имеем

$$(\delta\mathscr{F})_T = \delta R = \sum_a \varphi_a \delta e_a. \tag{10.13}$$

Для вариации же $\widetilde{\mathscr{F}}$ получим

$$(\delta\widetilde{\mathscr{F}})_T = (\delta\mathscr{F})_T - \delta\sum_a \varphi_a e_a = -\sum_a e_a\,\delta\varphi_a. \tag{10.14}$$

Можно сказать, что величины без знака $\sim$ являются термодинамическими потенциалами по отношению к зарядам проводников, а величины со знаком $\sim$ — по отношению к их потенциалам.

Как известно из термодинамики, различные термодинамические потенциалы обладают свойством достигать в состоянии теплового равновесия минимума по отношению к различным изменениям состояния тела. При формулировании этих условий равновесия в электрическом поле необходимо указывать, рассматриваются ли изменения состояния при неизменных зарядах или потенциалах проводников — источников поля. Так, $\mathscr{F}$ или $\widetilde{\mathscr{F}}$ имеют в равновесии минимум по отношению к изменениям состояния, происходящим при постоянной температуре и, соответственно, постоянных зарядах или потенциалах проводников (то же самое для $\mathscr{U}$ и $\widetilde{\mathscr{U}}$ справедливо при постоянной энтропии тела).

Если в теле могут происходить какие-либо процессы, не имеющие прямого отношения к электрическому полю (например, химические реакции), то условие равновесия по отношению к этим процессам дается минимумом F при заданных плотности и температуре тела и индукции $\mathbf{D}$ в нем либо минимумом $\widetilde{F}$ при постоянных плотности, температуре и напряженности поля $\mathbf{E}$.

До сих пор мы не делали никаких предположений о зависимости $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$, так что все полученные термодинамические соотношения справедливы при любом характере этой зависимости. Применим их теперь к изотропному диэлектрику с линейной зависимостью $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$. В этом случае интегрирование соотношений (10.5) и (10.6) дает

$$U = U_0(S,\rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}, \quad F = F_0(T,\rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}, \tag{10.15}$$

где U_0 и F_0 относятся к диэлектрику в отсутствие поля. Таким образом, в данном случае величина

$$\frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} \tag{10.16}$$

представляет собой связанное с наличием поля изменение внутренней энергии (при заданных значениях энтропии и плотности) или изменение свободной энергии (при заданных температуре и плотности) единицы объема диэлектрической среды.

Аналогичные выражения для потенциалов $\widetilde{U}$ и $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{U} = U_0(S, \rho) - \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}, \quad \widetilde{F} = F_0(T, \rho) - \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \tag{10.17}$$

Мы видим, что разности $U - U_0$ и $\widetilde{U} - U_0$ отличаются в этом случае только знаком, как это имело место и для электрического поля в пустоте (§ 5). В диэлектрической среде, однако, такое простое соотношение справедливо только при линейной связи между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$.

Выпишем также для дальнейших справок формулы для плотности энтропии S и для химического потенциала вещества ζ, следующие из (10.15):

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\rho,\mathbf{D}} = S_0(T, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho = S_0(T, \rho) + \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho, \tag{10.18}$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_{T,\mathbf{D}} = \zeta_0(T, \rho) - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T. \tag{10.19}$$

Обе эти величины отличны от нуля, разумеется, только внутри диэлектрика.

Полная свободная энергия получается интегрированием (10.15) по всему пространству. Ввиду (10.11) имеем

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = \int \frac{\mathbf{ED}}{8\pi}\, dV = \frac{1}{2}\sum_a e_a \varphi_a. \tag{10.20}$$

Последнее выражение формально совпадает с формулой для энергии электростатического поля проводников в пустоте. К этому же результату можно прийти и непосредственно, исходя из вариации $\delta\mathscr{F}$ (10.13) при бесконечно малом изменении зарядов проводников. В данном случае, при линейной связи $\mathbf{D}$ с $\mathbf{E}$, все уравнения поля и граничные условия к ним тоже линейны. Поэтому потенциалы проводников должны быть (как и для поля в пустоте) линейными функциями их зарядов, и интегрирование равенства (10.13) приводит к (10.20).

Подчеркнем, что в этих рассуждениях отнюдь не предполагалось, что диэлектрик заполняет все пространство вне проводников. Если же последнее имеет место, то можно пойти еще

дальше и, используя изложенные в конце § 7 результаты, утверждать следующее. При заданных зарядах проводников введение диэлектрической среды уменьшает в ε раз вместе с потенциалами проводников также и энергию поля (по сравнению со значениями этих величин для поля в пустоте). Если же поддерживаются постоянными потенциалы проводников, то энергия поля увеличивается в ε раз (вместе с зарядами проводников).

Задача

Определить высоту h поднятия уровня жидкости, втягиваемой в вертикальный плоский конденсатор.

Решение. При заданных потенциалах обкладок конденсатора должна быть минимальной $\widetilde{F}$, в которой надо учесть также и энергию $\rho g h^2/2$ столба жидкости в поле тяжести. Из этого условия легко получается

$$h = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi\rho g} E^2.$$

§ 11. Полная свободная энергия диэлектрического тела

Полная свободная энергия $\mathscr{F}$ (или полная внутренняя энергия $\mathscr{U}$), как она была определена в предыдущем параграфе, включает в себя также и энергию внешнего электрического поля, поляризующего диэлектрик; это поле можно представлять себе как создаваемое определенной совокупностью проводников с заданными полными зарядами на них. Наряду с этой величиной $\mathscr{F}$ имеет смысл рассмотреть полную свободную энергию, из которой исключена энергия поля, которое существовало бы во всем пространстве в отсутствие тела. Обозначим напряженность последнего через $\mathfrak{E}$. Тогда «полная» в указанном смысле свободная энергия равна интегралу

$$\int \left(F - \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} \right) dV, \tag{11.1}$$

где F — плотность свободной энергии. Мы будем здесь обозначать эту величину той же буквой $\mathscr{F}$, которой в § 10 обозначался интеграл $\int F\,dV$. Следует подчеркнуть, что разница между обоими определениями $\mathscr{F}$ сводится к величине, не зависящей от термодинамического состояния и свойств диэлектрика, и потому вообще не отражается на основных термодинамических дифференциальных соотношениях, которые имеют место для этой величины [1]).

---

[1]) Отметим, что вычитать из F величину $E^2/8\pi$ не имело бы смысла, так как $\mathbf{E}$ есть поле, уже измененное присутствием диэлектрика, и потому разность $F - (E^2/8\pi)$ отнюдь нельзя было бы рассматривать как плотность свободной энергии диэлектрика как такового.

Вычислим изменение $\mathscr{F}$ в результате бесконечно малого изменения поля, происходящего при постоянной температуре и без нарушения термодинамического равновесия среды.

Поскольку $\delta F = \dfrac{1}{4\pi}\mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}$, то имеем

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{E}\,\delta\mathbf{D} - \mathfrak{E}\,\delta\mathfrak{E})\,dV.$$

Это выражение можно тождественно переписать в виде

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\delta\mathfrak{E}\,dV + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\mathbf{E}(\delta\mathbf{D}-\delta\mathfrak{E})\,dV - \frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{D}-\mathbf{E})\delta\mathfrak{E}\,dV. \quad (11.2)$$

В первом интеграле пишем $\delta\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\delta\varphi_0$ (φ_0 — потенциал поля $\mathfrak{E}$) и преобразуем его по частям:

$$\int\operatorname{grad}\delta\varphi_0(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,dV = \oint\delta\varphi_0(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,d\mathbf{f} - \int\delta\varphi_0\operatorname{div}(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,dV.$$

Легко видеть, что оба интеграла в правой части равенства обращаются в нуль. Для объемного интеграла это следует непосредственно из уравнений $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ и $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$, которым удовлетворяют соответственно поле в диэлектрике и поле в пустоте. Первый же интеграл берется по поверхности создающих поле проводников и по бесконечно удаленной поверхности. Последний интеграл обращается, как обычно, в нуль, а на каждом из проводников $\delta\varphi_0 = \text{const}$, так что

$$\oint\delta\varphi_0(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,d\mathbf{f} = \delta\varphi_0\oint(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,d\mathbf{f}.$$

Но поле $\mathfrak{E}$, по определению, создается теми же источниками, что и поле $\mathbf{E}$ с индукцией $\mathbf{D}$ (т. е. одними и теми же проводниками с заданными полными зарядами e на них). Поэтому оба интеграла $\oint D_n\,df$ и $\oint\mathfrak{E}_n\,df$ равны одной и той же величине $4\pi e$, а их разность равна нулю.

Аналогичным образом убеждаемся в том, что равен нулю и второй член в (11.2) (для этого подставляем в нем $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ и производим такое же преобразование). Окончательно получается

$$\delta\mathscr{F} = -\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{D}-\mathbf{E})\delta\mathfrak{E}\,dV = -\int\mathbf{P}\,\delta\mathfrak{E}\,dV. \quad (11.3)$$

Замечательно, что в этом выражении интеграл берется только по объему, занятому диэлектрической средой, так как вне тела $\mathbf{P} = 0$.

Подчеркнем, однако, что подынтегральное выражение $\mathbf{P}\,\delta\mathfrak{E}$ не может быть истолковано как вариация «плотности» свободной энергии тела, подобно тому, как это было сделано в связи с формулами (10.3), (10.4). Прежде всего, эта «плотность» должна существовать и вне тела, так как его наличие искажает поле и в окружающем пространстве. Ясно также, что плотность энергии в каждой точке тела может зависеть лишь от реально существующего в ней поля, а не от поля, которое имелось бы здесь в отсутствие тела.

Если внешнее поле $\mathfrak{E}$ однородно, то

$$\delta\mathscr{F} = -\delta\mathfrak{E}\int \mathbf{P}\,dV = -\boldsymbol{\mathscr{P}}\,\delta\mathfrak{E}, \tag{11.4}$$

где $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ — полный электрический дипольный момент тела. Поэтому термодинамическое тождество для свободной энергии можно написать в данном случае как

$$d\mathscr{F} = -\mathscr{S}\,dT - \boldsymbol{\mathscr{P}}\,d\,\mathfrak{E}. \tag{11.5}$$

Полный электрический момент тела можно, следовательно, получить путем дифференцирования полной свободной энергии:

$$\boldsymbol{\mathscr{P}} = -\left(\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\mathfrak{E}}\right)_T. \tag{11.6}$$

Отметим, что последнюю формулу можно получить и непосредственно из общей статистической формулы

$$\overline{\frac{\partial\widehat{\mathscr{H}}}{\partial\lambda}} = \left(\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\lambda}\right)_T,$$

где $\widehat{\mathscr{H}}$ — гамильтониан тела как системы составляющих его частиц, а λ — какой-либо параметр, характеризующий внешние условия, в которых находится тело (см. V, (11.4), (15.11)). Для тела, находящегося во внешнем однородном поле $\mathfrak{E}$, гамильтониан содержит член $-\mathfrak{E}\widehat{\boldsymbol{\mathscr{P}}}$, где $\widehat{\boldsymbol{\mathscr{P}}}$ — оператор дипольного момента, и, выбрав $\mathfrak{E}$ в качестве параметра λ, мы получим искомую формулу.

Если $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ связаны друг с другом линейной зависимостью $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, то аналогичным путем можно вычислить в явном виде не только вариацию $\delta\mathscr{F}$, но и саму $\mathscr{F}$. Имеем

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = \int \frac{\mathbf{ED} - \mathfrak{E}^2}{8\pi}\,dV.$$

Это выражение тождественно переписываем в виде

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}+\mathfrak{E})(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,dV - \frac{1}{8\pi}\int\mathfrak{E}(\mathbf{D}-\mathbf{E})\,dV.$$

Первый член в правой части равенства обращается в нуль, в чем можно убедиться, положив в нем $\mathbf{E} + \mathfrak{E} = -\operatorname{grad}(\varphi + \varphi_0)$ и

произведя преобразование, вполне аналогичное произведенному выше. Поэтому получаем

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0(V,T) = -\frac{1}{2}\int \mathfrak{E}\mathbf{P}\,dV. \tag{11.7}$$

В частности, в однородном внешнем поле

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0(V,T) = -\frac{1}{2}\mathfrak{E}\boldsymbol{\mathscr{P}}. \tag{11.8}$$

Последнее равенство можно было бы получить и путем непосредственного интегрирования соотношения (11.3), если заметить, что в силу линейности всех уравнений поля (при $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$) электрический момент $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ должен быть линейной функцией $\mathfrak{E}$.

Линейную зависимость между компонентами $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ и $\mathfrak{E}$ можно написать в виде

$$\mathscr{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k, \tag{11.9}$$

подобно тому, как это было сделано нами для проводников (§ 2). В отличие от проводников, однако, «поляризуемость» диэлектрического тела зависит не только от его формы, но и от его диэлектрической постоянной. Симметричность тензора α_{ik} (упомянутая уже в § 2) непосредственно следует из соотношения (11.6); достаточно заметить, что вторая производная

$$\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial\mathfrak{E}_k\,\partial\mathfrak{E}_i} = -\frac{\partial\mathscr{P}_i}{\mathfrak{E}_k} = -V\alpha_{ik}$$

не зависит от порядка дифференцирования.

Формула (11.7) еще более упрощается в важном случае, когда ε близко к 1, т. е. диэлектрическая восприимчивость $\varkappa = (\varepsilon-1)/(4\pi)$ мала. В этом случае при вычислении энергии можно пренебречь вызываемым наличием тела искажением поля, т. е. положить

$$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{E} \approx \varkappa\mathfrak{E}.$$

Тогда

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = -\frac{\varkappa}{2}\int \mathfrak{E}^2\,dV, \tag{11.10}$$

где интеграл берется по объему тела. В однородном поле дипольный момент $\boldsymbol{\mathscr{P}} = V\varkappa\mathfrak{E}$, а свободная энергия

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = -\frac{\varkappa V}{2}\mathfrak{E}^2. \tag{11.11}$$

В общем случае произвольной зависимости $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$ простые формулы (11.7) и (11.8) не имеют места. Для вычисления $\mathscr{F}$ здесь может быть полезной формула

$$\mathscr{F} = \int\left(F - \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\right)dV = \int\left[F - \frac{\mathbf{ED}}{8\pi} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathscr{P}}\mathfrak{E}\right]dV, \tag{11.12}$$

вывод которой после произведенных выше вычислений очевиден. Действительно, подынтегральные выражения в обоих интегралах отличаются на величину

$$-\frac{\mathbf{ED}}{8\pi} - \frac{\mathfrak{C}\mathbf{P}}{2} + \frac{\mathfrak{C}^2}{8\pi} = -\frac{1}{8\pi}(\mathbf{D} - \mathfrak{C})(\mathbf{E} + \mathfrak{C});$$

после подстановки $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathfrak{C} = -\nabla\varphi_0$ и интегрирования по всему пространству это выражение обращается в нуль. Обратим внимание на то, что в (11.12) (как и в (11.7)) подынтегральное выражение (во втором интеграле) обращается в нуль вне тела $\left(\text{где } \mathbf{P} = 0,\ F = \frac{E^2}{8\pi}\right)$, так что интегрирование производится только по его объему.

Задача

Получить формулу, заменяющую (11.7), для тела, находящегося не в пустоте, а в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{(e)}$.

Решение. Повторяя для этого случая произведенные в тексте преобразования, получим

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = -\frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{C}(\mathbf{D} - \varepsilon^{(e)}\mathbf{E})\,dV.$$

§ 12. Электрострикция изотропных диэлектриков

Для твердого диэлектрика в электрическом поле нельзя ввести понятие давления так, как это делается для изотропного тела в отсутствие поля, потому что действующие в таком диэлектрике силы (они будут определены в § 15, 16) меняются вдоль тела и анизотропны, даже если тело само по себе изотропно. Точное определение деформации (*электрострикции*) такого тела требует решения сложной задачи теории упругости.

Дело обстоит, однако, гораздо проще, если нас интересует только изменение полного объема тела. Как уже было указано в § 5, при этом можно считать форму тела неизменной, т. е. рассматривать деформацию как равномерное всестороннее сжатие или растяжение.

Будем пренебрегать диэлектрическими свойствами внешней среды (например, атмосферы), в которой находится рассматриваемое тело, т. е. будем считать, что ее $\varepsilon = 1$. Роль среды сводится только к созданию равномерного давления, действующего на поверхность тела. Именно это внешнее давление мы будем обозначать ниже буквой P. Если $\mathscr{F}$ — полная свободная энергия тела, то согласно известному термодинамическому соотношению

$$P = -\left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial V}\right)_T$$

и соответственно в выражении для дифференциала $d\mathscr{F}$ должен быть добавлен член $-P\,dV$. Так, в однородном внешнем поле имеем вместо (11.5)

$$d\mathscr{F} = -\mathscr{S}\,dT - P\,dV - \boldsymbol{\mathscr{P}}\,d\,\mathfrak{E}.$$

Введем полный термодинамический потенциал тела согласно обычному термодинамическому определению:

$$\Phi = \mathscr{F} + PV. \tag{12.1}$$

Для дифференциала этой величины (в однородном внешнем поле) имеем соотношение

$$d\Phi = -\mathscr{S}\,dT + V\,dP - \boldsymbol{\mathscr{P}}\,d\,\mathfrak{E}. \tag{12.2}$$

Изменение термодинамических величин во внешнем электрическом поле является обычно относительно малой величиной. Согласно теореме о малых добавках (см. V, (15.12)), малое изменение свободной энергии (при заданных T и V) и малое изменение термодинамического потенциала (при заданных T и P) равны друг другу. Поэтому наряду с (11.8) можно написать аналогичное соотношение

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2}\mathfrak{E}\boldsymbol{\mathscr{P}} \tag{12.3}$$

для термодинамического потенциала тела во внешнем однородном поле. Здесь Φ_0 относится к телу в отсутствие поля при заданных значениях P, T (в то время как $\mathscr{F}_0$ в (11.8) есть свободная энергия тела в отсутствие поля при заданных значениях V и T).

Выразив в явном виде зависимость дипольного момента от V и $\mathfrak{E}$ согласно (11.9), перепишем (12.3) в виде

$$\Phi = \Phi_0(P,T) - \frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k, \tag{12.4}$$

причем поправочный член должен быть выражен в функции от температуры и давления согласно уравнению состояния тела в отсутствие поля. Эта формула особенно упрощается в случае малой диэлектрической восприимчивости вещества:

$$\Phi = \Phi_0(P,T) - \frac{\varkappa V}{2}\mathfrak{E}^2 \tag{12.5}$$

(ср. (11.11)).

Искомое изменение объема $V - V_0$ во внешнем поле можно получить теперь непосредственно путем дифференцирования Φ по давлению (при постоянных T и $\mathfrak{E}$). Так, из (12.5) найдем

$$V - V_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\varkappa V)}{\partial P}\right)_T \mathfrak{E}^2. \tag{12.6}$$

Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной (в противоположность электрострикции проводников, объем которых в поле всегда возрастает).

Аналогичным образом можно вычислить также и количество тепла Q, поглощаемое в диэлектрике при изотермическом включении внешнего электрического поля (причем внешнее давление поддерживается постоянным) [1]).

Дифференцирование $\Phi - \Phi_0$ по температуре даст изменение энтропии тела, а умножив его на T, получим искомое количество тепла. Так, из (12.5) получается

$$Q = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial(\varkappa V)}{\partial T}\right)_P \mathfrak{E}^2. \tag{12.7}$$

Положительные значения Q соответствуют поглощению тепла.

Задачи

1. Определить изменение объема и электрокалорический эффект для диэлектрического эллипсоида в однородном электрическом поле, параллельном одной из его осей.

Решение. Согласно формулам (12.3) и (8.10) имеем

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{V}{8\pi}\frac{\varepsilon - 1}{n\varepsilon + 1 - n}\mathfrak{E}^2.$$

Для изменения объема находим [2]):

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{(n\varepsilon + 1 - n)K} - \frac{1}{(n\varepsilon + 1 - n)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right],$$

а для электрокалорического эффекта:

$$Q = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\alpha(\varepsilon - 1)}{n\varepsilon + 1 - n} + \frac{1}{(n\varepsilon + 1 - n)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right],$$

где $\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ — коэффициент сжимаемости тела, а $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ — коэффициент теплового расширения.

В частности, для плоскопараллельной пластинки в перпендикулярном к ней поле $n = 1$, так что

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon K} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right],$$

$$Q = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\alpha(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right].$$

---

[1]) Если же тело теплоизолировано, то наложение поля приведет к изменению температуры, равному $\Delta T = -Q/\mathscr{C}_P$, где $\mathscr{C}_P$ — теплоемкость тела при постоянном давлении.

[2]) Положив $\varepsilon \to \infty$, получим для изменения объема проводящего эллипсоида $(V - V_0)/V = \mathfrak{E}^2/(8\pi K n)$. Для шара $n = 1/3$, и мы возвращаемся к результату задачи 4 § 5.

Для такой же пластинки (или любого цилиндрического тела) в продольном поле $n = 0$ и

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{K} - \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right], \quad Q = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\alpha(\varepsilon - 1) + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right].$$

2. Определить разность теплоемкости $\mathscr{C}_\varphi$ плоскопараллельной пластинки в перпендикулярном к ней поле при постоянной разности потенциалов между ее сторонами и теплоемкости $\mathscr{C}_D$ при постоянной индукции; в обоих случаях внешнее давление поддерживается постоянным [1]).

Р е ш е н и е. Согласно результатам задачи 1 энтропия пластинки

$$\mathscr{S} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_{P,\mathfrak{E}} = \mathscr{S}_0(P,T) + \frac{V\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\alpha + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right].$$

Индукция поля внутри пластинки совпадает с внешним полем: $D = \mathfrak{E}$. Поэтому для вычисления теплоемкости $\mathscr{C}_D$ надо дифференцировать $\mathscr{S}$ при постоянном $\mathfrak{E}$. Разность потенциалов между сторонами пластинки $\varphi = El = \mathfrak{E}l/\varepsilon$, где l — толщина пластинки. При равномерном сжатии или расширении тела l меняется пропорционально $V^{1/3}$. Поэтому для вычисления теплоемкости $\mathscr{C}_\varphi$ надо дифференцировать $\mathscr{S}$ при постоянном произведении $\mathfrak{E}V^{1/3}/\varepsilon$. В результате найдем для искомой разности:

$$\mathscr{C}_\varphi - \mathscr{C}_D = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{4\pi\varepsilon}\left[(\varepsilon - 1)\alpha + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right]\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P - \frac{\alpha}{3}\right].$$

3. Определить электрокалорический эффект в однородном диэлектрике, полный объем которого поддерживается постоянным.

Р е ш е н и е. Строго говоря, при наложении внешнего поля плотность тела меняется (становясь неоднородной вдоль тела), даже если его полный объем поддерживается постоянным. Однако при вычислении изменения полной энтропии этим обстоятельством можно пренебречь и считать плотность ρ постоянной в каждой точке тела [2]).

Согласно (10.18) полная энтропия тела

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_0(\rho,T) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \int E^2\,dV,$$

где интегрирование распространяется по объему тела. Поглощаемое количество тепла

$$Q = \frac{T}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \int E^2\,dV.$$

4. Определить разность $\mathscr{C}_\varphi - \mathscr{C}_D$ (см. задачу 2) при постоянном полном объеме пластинки.

---

[1]) $\mathscr{C}_\varphi$ является теплоемкостью пластинки, помещенной между обкладками плоского конденсатора, включенного в цепь с постоянной ЭДС. В разомкнутом же конденсаторе с постоянными зарядами на обкладках пластинка будет иметь теплоемкость $\mathscr{C}_D$.

[2]) Изменение плотности $\delta\rho$ — величина второго порядка по полю ($\sim E^2$), а связанное с ним изменение полной энтропии — четвертого порядка. Действительно, линейное по $\delta\rho$ изменение полной энтропии есть $\dfrac{\partial S_0}{\partial\rho}\int\delta\rho\,dV$, но интеграл $\int\delta\rho\,dV = 0$ в силу неизменности общей массы тела.

Р е ш е н и е. При неизменном объеме (а потому и толщине) пластинки дифференцирование при постоянной разности потенциалов эквивалентно дифференцированию при постоянной напряженности E.

С помощью полученной в задаче 3 формулы для энтропии находим

$$\mathscr{C}_E - \mathscr{C}_D = \frac{TVE^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)^2_\rho = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{4\pi\varepsilon^3}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)^2_\rho.$$

5. Конденсатор состоит из двух проводящих поверхностей, находящихся на расстоянии h друг от друга, малом по сравнению с размерами обкладок; пространство между обкладками заполнено веществом с диэлектрической проницаемостью ε_1. В конденсатор вводится шарик радиуса $a \ll h$ с диэлектрической проницаемостью ε_2. Определить изменение емкости конденсатора.

Р е ш е н и е. Пусть шарик вводится в конденсатор так, что разность потенциалов φ между его обкладками остается неизменной. Роль свободной энергии при постоянных потенциалах проводников играет $\widetilde{\mathscr{F}}$. В отсутствие шарика $\widetilde{\mathscr{F}} = -C_0\varphi^2/2$, где C_0 — первоначальная емкость конденсатора. Ввиду малых размеров шарика можно считать, что он вводится в однородное поле с напряженностью $\mathfrak{E} = \varphi/h$, а изменение $\widetilde{\mathscr{F}}$ мало́. Малое изменение $\widetilde{\mathscr{F}}$ при постоянных потенциалах равно малому изменению $\mathscr{F}$ при постоянных зарядах источников поля. С помощью формулы, полученной в задаче § 11, и формулы (8.2) находим

$$\widetilde{\mathscr{F}} = -\frac{1}{2}C_0\varphi^2 - \frac{a^3\varphi^2}{2h^2}\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2},$$

откуда искомая емкость

$$C = C_0 + \frac{a^3}{h^2}\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}.$$

§ 13. Диэлектрические свойства кристаллов

В анизотропной диэлектрической среде (монокристалл) линейная связь между индукцией и напряженностью электрического поля имеет более сложный вид, не сводящийся к простой пропорциональности.

Наиболее общий вид такой зависимости дается выражением

$$D_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik}E_k, \tag{13.1}$$

где $\mathbf{D}_0$ — постоянный вектор, а совокупность величин ε_{ik} составляет тензор второго ранга — *тензор диэлектрической проницаемости* (или, короче, *диэлектрический тензор*). Свободный член $\mathbf{D}_0$ в соотношении (13.1) существует, однако, не во всяком кристалле. Большинство типов кристаллографической симметрии не допускает существования постоянного вектора (см. ниже), и тогда имеем соотношение

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k. \tag{13.2}$$

Тензор ε_{ik} симметричен:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}. \tag{13.3}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться термодинамическим соотношением (10.10) и заметить, что вторая производная

$$-4\pi\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial E_k\partial E_i}=\frac{\partial D}{\partial E_k}=\varepsilon_{ik}$$

не зависит от порядка дифференцирования.

Для самой величины $\widetilde{F}$ имеем (при выполнении (13.2)) выражение

$$\widetilde{F}=F_0-\frac{\varepsilon_{ik}E_iE_k}{8\pi}. \qquad (13.4)$$

Свободная энергия F равна

$$F=\widetilde{F}+\frac{E_iD_i}{4\pi}=F_0+\frac{\varepsilon_{ik}^{-1}D_iD_k}{8\pi}. \qquad (13.5)$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор ε_{ik} путем надлежащего выбора осей координат может быть приведен к диагональному виду. В общем случае, следовательно, тензор ε_{ik} определяется тремя независимыми величинами — тремя главными значениями $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$. Все эти величины всегда больше единицы, подобно тому как $\varepsilon>1$ у изотропного тела (см. § 14).

В зависимости от той или иной симметрии кристалла число различных главных значений тензора ε_{ik} может оказаться и меньшим трех.

В кристаллах триклинной, моноклинной и ромбической систем все три главных значения различны; эти кристаллы называются *двухосными* [1]). При этом в кристаллах триклинной системы направления главных осей тензора ε_{ik} не связаны однозначным образом с какими-либо кристаллографическими направлениями. В кристаллах моноклинной системы заранее определенным является направление одной из главных осей — она должна совпадать с осью симметрии второго порядка или быть перпендикулярной к плоскости симметрии кристалла. В кристаллах же ромбической системы кристаллографически определены все три главные оси тензора ε_{ik}.

Далее, в кристаллах тетрагональной, ромбоэдрической и гексагональной систем два из трех главных значений совпадают, так что имеются всего две независимые величины; такие кристаллы называют *одноосными*. Одна из главных осей совпадает при этом с кристаллографической осью симметрии четвертого, третьего или шестого порядка, а направление двух других главных осей можно выбрать произвольным образом.

---

[1]) Это название связано с оптическими свойствами кристаллов — см. § 98, 99.

Наконец, в кристаллах кубической системы все три главных значения тензора ε_{ik} одинаковы, а направления главных осей произвольны. Это значит, что тензор ε_{ik} имеет вид $\varepsilon\delta_{ik}$, т. е. определяется одним скаляром ε. Другими словами, в отношении своих диэлектрических свойств кристаллы кубической симметрии не отличаются от изотропных тел.

Все эти довольно очевидные свойства симметрии тензора ε_{ik} становятся особенно наглядными, если воспользоваться известным из тензорной алгебры понятием *тензорного эллипсоида*, длина полуосей которого пропорциональна главным значениям симметричного тензора второго ранга. Симметрия эллипсоида должна соответствовать при этом симметрии кристалла. Так, в одноосном кристалле тензорный эллипсоид вырождается в эллипсоид вращения, полностью симметричный относительно продольной оси; подчеркнем, что для физических свойств кристалла, определяющихся симметричным тензором второго ранга, наличие оси симметрии уже третьего порядка эквивалентно полной изотропии в плоскости, перпендикулярной к этой оси. В кристаллах кубической симметрии тензорный эллипсоид вырождается в сферу.

Остановимся теперь на особенностях диэлектрических свойств кристаллов с постоянным членом $\mathbf{D}_0$ в (13.1). Наличие этого члена означает, что диэлектрик спонтанно поляризован и в отсутствие внешнего электрического поля; такие тела называют *пироэлектрическими*. Величина этой спонтанной поляризации, однако, фактически всегда очень мала (по сравнению с молекулярными полями). Это обстоятельство связано с тем, что большие значения $\mathbf{D}_0$ приводили бы к существованию сильных полей внутри тела, что энергетически весьма невыгодно и потому не могло бы соответствовать термодинамическому равновесию. Малость $\mathbf{D}_0$ обеспечивает в то же время законность разложения $\mathbf{D}$ по степеням $\mathbf{E}$, первыми двумя членами которого и является выражение (13.1).

Термодинамические величины пироэлектрического тела находим, интегрируя соотношение

$$-4\pi\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial E_i} = D_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik}E_k,$$

откуда

$$\widetilde{F} = F_0 - \frac{\varepsilon_{ik}E_iE_k}{8\pi} - \frac{1}{4\pi}E_iD_{0i}. \tag{13.6}$$

Свободная энергия

$$F = \widetilde{F} + \frac{E_iD_i}{4\pi} = F_0 + \frac{\varepsilon_{ik}E_iE_k}{8\pi} = F_0 + \frac{1}{8\pi}\varepsilon^{-1}_{ik}(D_i - D_{0i})(D_k - D_{0k}). \tag{13.7}$$

Отметим, что из F выпадает имевшийся в $\widetilde{F}$ член, линейный по E_i [1]).

Полную свободную энергию пироэлектрика можно вычислить по формуле (11.12), подставив в нее (13.7) и (13.1). В отсутствие внешнего поля, $\mathfrak{E} = 0$, получается простой результат:

$$\mathscr{F} = \int \left(F_0 - \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}_0}{8\pi} \right) dV. \tag{13.8}$$

Отметим, что свободная энергия пироэлектрика в отсутствие внешнего поля зависит (вместе с полем $\mathbf{E}$) не только от его объема, но и от формы.

Как уже было указано, явление пироэлектричества возможно не при всякой симметрии кристалла. Поскольку при любом преобразовании симметрии все свойства кристалла должны оставаться неизменными, то ясно, что пироэлектрическим может быть лишь такой кристалл, в котором существует направление, остающееся неизменным (в том числе не меняющееся на обратное) при всех преобразованиях симметрии; в этом направлении и будет лежать постоянный вектор $\mathbf{D}_0$.

Этому условию удовлетворяют лишь те группы симметрии, которые складываются из одной оси и проходящих через нее плоскостей симметрии.

В частности, пироэлектрическими заведомо не могут быть кристаллы, обладающие центром симметрии. Перечислим те из 32-х кристаллических классов, в которых существует пироэлектричество:

триклинная система: C_1,
моноклинная система: C_s, C_2,
ромбическая система: C_{2v},
тетрагональная система: C_4, C_{4v},
ромбоэдрическая система: C_3, C_{3v},
гексагональная система: C_6, C_{6v}.

Среди кубических классов пироэлектрических, разумеется, вообще нет. В кристалле класса C_1 направление пироэлектрического вектора $\mathbf{D}_0$ не связано с каким-либо кристаллографически выделенным направлением, а в кристалле класса C_s должно лежать в плоскости симметрии. Во всех же остальных из перечислен-

[1]) Следует отметить, что в этих формулах мы в действительности пренебрегаем пьезоэффектом (т. е. влиянием внутренних напряжений на электрические свойства тела, см. § 17). Поэтому они, строго говоря, применимы лишь в случае однородных по объему тела полей, когда напряжения в теле могут отсутствовать.

ных выше классов направление $\mathbf{D}_0$ совпадает с направлением оси симметрии [1]).

Следует указать, что в обычных условиях пироэлектрические кристаллы не имеют полного электрического дипольного момента, хотя поляризация в них и не равна нулю. Дело в том, что внутри спонтанно поляризованного диэлектрика имеется отличная от нуля напряженность поля $\mathbf{E}$. Благодаря тому, что фактически образец обычно обладает некоторой, хотя и малой, но все же не равной нулю проводимостью, наличие поля вызовет появление тока, который будет течь до тех пор, пока образующиеся на поверхности тела свободные заряды не приведут к исчезновению поля в образце. В том же направлении действуют ионы, оседающие на поверхность образца из воздуха. На опыте пироэлектрические свойства наблюдаются при нагревании тела, когда величина его спонтанной поляризации меняется и обнаруживается это изменение.

Задачи

1. Определить поле, создаваемое в пустоте пироэлектрическим шаром.

Решение. Внутри шара имеется однородное поле, в котором напряженность и индукция связаны соотношением $2\mathbf{E} = -\mathbf{D}$ (как это следует из (8.1) при $\mathfrak{E} = 0$, т. е. в отсутствие внешнего приложенного поля). Подставляя в (13.1), получим уравнение $2E_i + \varepsilon_{ik}E_k = -D_{0i}$. Выберем оси координат вдоль главных осей тензора ε_{ik}. Тогда найдем из этого уравнения

$$E_i = -\frac{D_{0i}}{2+\varepsilon^{(i)}}, \quad P_i = \frac{D_i - E_i}{4\pi} = \frac{3D_{0i}}{4\pi(2+\varepsilon^{(i)})}.$$

Поле вне шара есть поле электрического диполя с электрическим моментом $\mathscr{P} = \mathbf{P}V$.

2. Определить поле точечного заряда в однородной анизотропной среде [2]).

Решение. Поле точечного заряда описывается уравнением $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi e\delta(\mathbf{r})$ (заряд находится в начале координат). В анизотропной среде $D_i = \varepsilon_{ik}E_k = -\varepsilon_{ik}\partial\varphi/\partial x_k$; выбирая оси x, y, z вдоль главных осей тензора ε_{ik}, получим для потенциала уравнение

$$\varepsilon^{(x)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \varepsilon^{(y)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \varepsilon^{(z)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi e\delta(\mathbf{r}).$$

[1]) Говоря об условиях симметрии, мы рассматриваем кристаллическую среду как неограниченную. Для конечного кристалла точное значение его полного дипольного момента может зависеть (в ионном кристалле) от того, по каким кристаллическим плоскостям проходят его грани — содержат ли эти плоскости ионы одного знака или же они электрически нейтральны. Но в рамках макроскопической электродинамики, подразумевающей усреднение по физически бесконечно малым объемам, естественно понимать как усредненное также и положение граней относительно кристаллической решетки. В результате такого усреднения значение $\mathbf{D}_0$ окажется равным нулю в любом непироэлектрическом конечном кристалле и не зависящим от огранки — в пироэлектрическом.

[2]) В задачах 2–6 диэлектрическая анизотропная среда предполагается непироэлектрической.

Путем введения новых переменных согласно

$$x = x'\sqrt{\varepsilon^{(x)}}, \quad y = y'\sqrt{\varepsilon^{(y)}}, \quad z = z'\sqrt{\varepsilon^{(z)}} \tag{1}$$

оно приводится к виду

$$\Delta'\varphi = -\frac{4\pi e}{\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}\,\delta(\mathbf{r}'),$$

который формально отличается от уравнения для поля в пустоте лишь заменой e на $e' = e\left[\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}\right]^{-1/2}$. Поэтому

$$\varphi = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}\left[\frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}}\right]^{-1/2}.$$

В тензорных обозначениях, не предрешающих выбор системы координат,

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{|\varepsilon|\varepsilon_{ik}^{-1}x_i x_k}},$$

где $|\varepsilon|$ — определитель тензора ε_{ik}.

3. Определить емкость проводящего шара (радиуса a), погруженного в анизотропную диэлектрическую среду.

Р е ш е н и е. Путем преобразования (1) определение поля шара с зарядом e в анизотропной среде сводится к определению поля в пустоте, создаваемого зарядом e', распределенным по поверхности эллипсоида

$$\varepsilon_{ik}x'_i x'_k = \varepsilon^{(x)}x'^2 + \varepsilon^{(y)}y'^2 + \varepsilon^{(z)}z'^2 = a^2.$$

Воспользовавшись формулой (4.14) для потенциала поля эллипсоида, получим для искомой емкости:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}\int\limits_0^\infty \left[\left(\xi + \frac{a^2}{\varepsilon^{(x)}}\right)\left(\xi + \frac{a^2}{\varepsilon^{(y)}}\right)\left(\xi + \frac{a^2}{\varepsilon^{(z)}}\right)\right]^{-1/2} d\xi.$$

4. Определить поле в плоскопараллельной анизотропной пластинке, находящейся во внешнем однородном поле $\mathfrak{E}$.

Р е ш е н и е. Из условия непрерывности касательной составляющей напряженности следует, что

$$\mathbf{E} = \mathfrak{E} + A\mathbf{n},$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность однородного поля внутри пластинки, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к ее поверхности и A — постоянная. Последняя определяется из условия непрерывности нормальной компоненты индукции: $\mathbf{nD} = \mathbf{n}\mathfrak{E}$ или

$$n_i\varepsilon_{ik}E_k = n_i\varepsilon_{ik}\mathfrak{E}_k + A\varepsilon_{ik}n_i n_k = \mathfrak{E}_i n_i.$$

Отсюда

$$A = -\frac{(\varepsilon_{ik} - \delta_{ik})n_i\mathfrak{E}_k}{\varepsilon_{lm}n_l n_m}.$$

В частности, если внешнее поле направлено по нормали к пластинке (ось z), то

$$A = \frac{\mathfrak{E}(1 - \varepsilon_{zz})}{\varepsilon_{zz}}.$$

Если поле параллельно пластинке и направлено по оси x:

$$A = -\frac{\mathfrak{E}\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}}.$$

5. Определить момент сил, действующих на анизотропный диэлектрический шар, находящийся (в пустоте) во внешнем однородном поле $\mathfrak{E}$.

Р е ш е н и е. Согласно (8.2) имеем для напряженности поля внутри шара

$$E_x = \frac{3}{2+\varepsilon^{(x)}}\mathfrak{E}_x$$

(и аналогично для E_y, E_z), причем оси x, y, z выбраны вдоль главных осей тензора ε_{ik}. Отсюда для компонент дипольного момента шара (радиуса a)

$$\mathscr{P}_x = \frac{4\pi}{3}a^3 P_x = \frac{\varepsilon^{(x)}-1}{\varepsilon^{(x)}+2}a^3\mathfrak{E}_x.$$

Компонента же действующего на шар момента сил

$$K_z = [\mathscr{P}\mathfrak{E}]_z = 3a^3\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\frac{\varepsilon^{(x)}-\varepsilon^{(y)}}{(\varepsilon^{(x)}+2)(\varepsilon^{(y)}+2)},$$

и аналогично для K_x, K_y.

6. В неограниченной анизотропной среде имеется сферическая полость. Выразить поле в полости через однородное поле $E^{(e)}$ в среде вдали от полости.

Р е ш е н и е. Преобразованием (1) задачи 2 уравнение для потенциала поля в среде приводится к уравнению Лапласа для поля в пустоте. Уравнение же для потенциала поля в полости, напротив, превращается в уравнение для потенциала в среде с диэлектрическими проницаемостями $1/\varepsilon^{(x)}$, $1/\varepsilon^{(y)}$, $1/\varepsilon^{(z)}$. Кроме того, шар (радиуса a) превращается в эллипсоид с полуосями $a/\sqrt{\varepsilon^{(x)}}$, $a/\sqrt{\varepsilon^{(y)}}$, $a/\sqrt{\varepsilon^{(z)}}$. Пусть $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ — коэффициенты деполяризации такого эллипсоида (определяемые по формулам (4.25)). Применяя к полю этого эллипсоида формулу (8.7), получим соотношение

$$(1-n^{(x)})\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial x'} + \frac{n^{(x)}}{\varepsilon^{(x)}}\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial x'} = \frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial x'}$$

(и аналогичные — вдоль осей y' и z'). Возвращаясь к прежним координатам, имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\sqrt{\varepsilon^{(x)}} = -E_x\sqrt{\varepsilon^{(x)}},$$

так что для поля в полости получаем окончательно

$$E_x^{(i)} = \frac{\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(x)} - n^{(x)}(\varepsilon^{(x)}-1)}E_x^{(e)}.$$

§ 14. Положительность диэлектрической восприимчивости

Для выяснения характера зависимости термодинамических величин диэлектрика в поле от его диэлектрической проницаемости рассмотрим формальную задачу об изменении электрической части полной свободной энергии тела при бесконечно малом изменении ε.

Для изотропного (но не обязательно однородного) диэлектрика имеем согласно (10.20)

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = \int \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\, dV.$$

При изменении ε изменяется также и индукция поля. Поэтому рассматриваемая вариация свободной энергии равна

$$\delta\mathscr{F} = \int \frac{\mathbf{D}\delta\mathbf{D}}{8\pi\varepsilon}\, dV - \int \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\delta\varepsilon\, dV.$$

Первый член в правой части равенства совпадает с выражением (10.2) для работы, совершаемой при бесконечно малом изменении источников поля (зарядов проводников). Но в данном случае мы рассматриваем изменение поля при неизменных его источниках; поэтому этот член обращается в нуль, и мы получаем

$$\delta\mathscr{F} = -\int \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon^2}\frac{D^2}{8\pi}\, dV = -\int \delta\varepsilon \frac{E^2}{8\pi}\, dV. \tag{14.1}$$

Из этой формулы следует, что всякое увеличение диэлектрической проницаемости среды хотя бы в некотором ее участке (при неизменных источниках поля), приводит к уменьшению ее полной свободной энергии. В частности, можно утверждать, что свободная энергия всегда уменьшается при внесении в диэлектрическую среду незаряженных проводников, поскольку последние могут рассматриваться (в электростатике) как тела с бесконечно большой ε. Это утверждение обобщает высказанную в § 2 теорему об уменьшении энергии электростатического поля в пустоте при внесении в него незаряженного проводника.

Полная свободная энергия уменьшается и когда какой-либо заряд подносится к диэлектрическому телу из бесконечности (что можно воспринимать как увеличение ε в некотором объеме поля вокруг заряда). Чтобы сделать отсюда заключение о том, что всякий заряд притягивается к диэлектрику, надо было бы, строго говоря, доказать еще, что $\mathscr{F}$ не может достигнуть минимума ни при каком конечном расстоянии между зарядом и телом. Мы не станем останавливаться здесь на доказательстве этого утверждения, тем более, что появление сил притяжения между зарядом и диэлектриком можно рассматривать как довольно очевидный результат взаимодействия этого заряда с дипольным моментом поляризуемого им диэлектрика.

Непосредственно из формулы (14.1) можно сделать заключение о направлении движения диэлектрического тела в квазиоднородном поле, т. е. в поле, которое можно считать постоянным на протяжении размеров тела. В этом случае E^2 выносится из-под знака интеграла и разность $\mathscr{F} - \mathscr{F}_0$ есть отрицательная величина, пропорциональная E^2. Стремясь занять положение, в

котором его свободная энергия минимальна, тело будет, следовательно, перемещаться в направлении увеличения E.

Независимо от формулы (14.1) можно показать, что полное изменение свободной энергии диэлектрического тела при внесении его в электрическое поле отрицательно [1]). Это можно сделать с помощью термодинамической теории возмущений, рассматривая изменение свободной энергии тела как результат возмущения его квантовых уровней энергии внешним электрическим полем. Согласно этой теории имеем

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = \overline{V}_{nn} - \frac{1}{2}\sum_n \sum_m{}' \frac{|V_{nm}|^2(w_m - w_n)}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} - \frac{1}{2T}\overline{(V_{nn} - \overline{V}_{nn})^2} \tag{14.2}$$

(см. V, (32.6)). Здесь $E_n^{(0)}$ — невозмущенные уровни, V_{mn} — матричные элементы возмущающей энергии, а черта обозначает статистическое усреднение с помощью распределения Гиббса

$$w_n = \exp\frac{\mathscr{F}_0 - E_n^{(0)}}{T}.$$

Член $\overline{V}_{nn}$ в формуле (14.2), линейный по полю, отличен от нуля только в пироэлектрических средах. Интересующее же нас квадратичное по полю изменение свободной энергии дается остальными членами этой формулы; их отрицательность очевидна.

С другой стороны, из самого вывода формулы (14.2) ясно, что полная свободная энергия $\mathscr{F}$ должна пониматься в ней в указанном в § 11 смысле — из нее исключена энергия поля, которое существовало бы в отсутствие тела. Поэтому разность $\mathscr{F} - \mathscr{F}_0$ дается термодинамической формулой (11.7). Рассмотрим тело в виде длинного цилиндра, расположенного вдоль однородного внешнего поля $\mathfrak{E}$. Тогда поле внутри цилиндра совпадает с $\mathfrak{E}$, а его поляризация $\mathbf{P} = (\varepsilon - 1)\mathfrak{E}/(4\pi)$, так что

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = -\frac{\varepsilon - 1}{8\pi}V\mathfrak{E}^2.$$

Отсюда следует, что разность $\mathscr{F} - \mathscr{F}_0$ будет отрицательна, только если $\varepsilon > 1$. Мы приходим к упомянутому в § 7 и использованному уже ранее утверждению, что диэлектрическая проницаемость всякого тела больше единицы, т. е. его диэлектрическая восприимчивость $\varkappa = (\varepsilon - 1)/(4\pi)$ положительна.

Таким же образом доказываются неравенства $\varepsilon^{(i)} > 1$ для главных значений тензора ε_{ik} анизотропной диэлектрической среды. Для этого достаточно рассмотреть энергию поля, направленного вдоль каждой из трех главных осей.

---

[1]) Имеется в виду изменение, пропорциональное квадрату поля. Напомним, что в пироэлектрических телах изменение свободной энергии содержит также и линейный по полю член, который нас здесь не интересует.

§ 15. Электрические силы в жидком диэлектрике

Вопрос о вычислении сил (их называют *пондеромоторными*), действующих на диэлектрик в произвольном неоднородном электрическом поле, довольно сложен и требует раздельного рассмотрения для жидких (или газообразных) и твердых тел. Мы начнем с более простого случая жидких диэлектриков.

Будем обозначать через $\mathbf{f}\,dV$ силу, действующую на элемент объема среды dV, вектор $\mathbf{f}$ можно назвать объемной плотностью сил.

Как известно, силы, действующие на какой-либо конечный объем тела, могут быть сведены к силам, приложенным к поверхности этого объема (см. VII, § 2). Это обстоятельство является следствием закона сохранения импульса. Сила, действующая на вещество в объеме dV, представляет собой изменение его импульса в единицу времени. Это изменение должно быть равно количеству импульса, втекающего в течение того же времени в этот объем через его поверхность. Если обозначить тензор потока импульса через $-\sigma_{ik}$, то

$$\int f_i\,dV = \oint \sigma_{ik}\,df_k, \tag{15.1}$$

где интегрирование в правой части равенства производится по поверхности объема V. Тензор σ_{ik} называют *тензором напряжений*. Очевидно, что

$$\sigma_{ik}\,df_k = \sigma_{ik}n_k\,df$$

есть i-я компонента силы, действующей на элемент поверхности df ($\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности, внешней по отношению к данному объему).

Аналогичным образом сводится к интегралу по поверхности также и полный момент сил, действующих на данный объем, чем обеспечивается выполнение закона сохранения момента импульса. Как известно, возможность этого своде́ния связана с симметричностью тензора напряжений ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$); последняя является, таким образом, выражением закона сохранения момента импульса.

Преобразуя интеграл по поверхности в (15.1) в интеграл по объему, получим

$$\int f_i\,dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\,dV$$

и отсюда, ввиду произвольности объема интегрирования,

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{15.2}$$

Это — известная формула, выражающая объемные силы через тензор напряжений.

Приступим теперь к вычислению тензора напряжений. Каждый малый участок поверхности можно рассматривать как плоский, а тело и электрическое поле вблизи него — как однородные. Поэтому для упрощения вывода мы можем, без всякого ограничения общности, рассмотреть однородный (по составу, плотности и температуре) плоскопараллельный слой вещества (толщины h), находящийся в однородном электрическом поле [1]). Это поле можно представлять себе как создаваемое приложенными к поверхности слоя проводящими плоскостями (обкладками конденсатора).

Следуя общему методу определения сил, подвергнем одну из обкладок («верхнюю») параллельному виртуальному смещению на бесконечно малую величину $\boldsymbol{\xi}$; направление $\boldsymbol{\xi}$ произвольно и не обязательно совпадает с направлением нормали $\mathbf{n}$. Будем считать, что потенциал проводника (в каждой его точке) остается при смещении неизменным, а вызываемая этим смещением однородная деформация слоя диэлектрика — изотермична.

На единицу площади поверхности действует со стороны самого тела (слоя) сила $-\sigma_{ik}n_k$. При виртуальном смещении эта сила производит работу $-\sigma_{ik}n_k\xi_i$. С другой стороны, работа, производимая при изотермической деформации и постоянных потенциалах проводников, равна убыли величины $\int \widetilde{F}\,dV$ или (на единицу площади поверхности слоя) величины $h\widetilde{F}$. Таким образом,

$$\sigma_{ik}\xi_i n_k = \delta(h\widetilde{F}) = h\delta\widetilde{F} + \widetilde{F}\delta h. \tag{15.3}$$

Термодинамические величины жидкости зависят (при данных температуре и напряженности поля) только от ее плотности; деформации, не меняющие плотности (деформации сдвига), не отражаются на термодинамическом состоянии. Поэтому для изотермической вариации $\delta\widetilde{F}$ в жидкости пишем

$$\delta\widetilde{F} = \left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\mathbf{E}}\right)_{T,\rho}\delta\mathbf{E} + \left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T}\delta\rho = -\frac{\mathbf{D}\delta\mathbf{E}}{4\pi} + \left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T}\delta\rho. \tag{15.4}$$

Изменение плотности слоя вещества связано с изменением его толщины соотношением $\delta\rho = -\rho\delta h/h$. Вариация же поля вычисляется следующим образом.

В данную точку пространства (с радиус-вектором $\mathbf{r}$) попадает при смещении вещество из точки $\mathbf{r}-\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — вектор смещения

[1]) Тем самым мы отбрасываем в тензоре напряжений члены, которые могли бы зависеть от градиентов температуры, поля и т. п. Эти члены, однако, исчезающе малы по сравнению с членами, не содержащими производных, в том же смысле, как малы члены с производными, которые могли бы присутствовать в зависимости $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$.

частиц в объеме слоя. Поскольку в рассматриваемых условиях (однородная деформация и постоянство потенциала на обкладках) каждая частица вещества перемещается вместе со своим значением потенциала, то изменение последнего в данной точке пространства есть

$$\delta\varphi = \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}\nabla\varphi = \mathbf{uE},$$

где $\mathbf{E}$ — однородное поле внутри недеформированного слоя. Но ввиду однородности деформации имеем

$$\mathbf{u} = \frac{z}{h}\boldsymbol{\xi}, \tag{15.5}$$

где z — расстояние от нижней поверхности. Поэтому вариация напряженности поля

$$\delta\mathbf{E} = -\frac{1}{h}\mathbf{n}(\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}). \tag{15.6}$$

Подставляя все полученные выражения в (15.4) и учитывая также, что $\delta h = \xi_z = \boldsymbol{\xi}\mathbf{n}$, получим

$$\sigma_{ik}\xi_i n_k = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{nD})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{E}) - (\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})\rho\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho} + (\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})\widetilde{F} = \\ = \left\{\frac{E_i D_k}{4\pi} - \rho\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\delta_{ik} + \widetilde{F}\delta_{ik}\right\}\xi_i n_k.$$

Отсюда окончательно находим следующее выражение для тензора напряжений:

$$\sigma_{ik} = \left[\widetilde{F} - \rho\left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T}\right]\delta_{ik} + \frac{E_i D_k}{4\pi}. \tag{15.7}$$

В изотропных средах, которые здесь и рассматриваются, направления $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ совпадают. Поэтому $E_i D_k = E_k D_i$ и тензор (15.7), как и должно быть, симметричен [1]).

При линейной связи $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ имеем

$$\widetilde{F} = F_0(\rho, T) - \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \tag{15.8}$$

(см. (10.17)); F_0 есть свободная энергия единицы объема вещества в отсутствие поля. Согласно известному термодинамическому соотношению, производная от свободной энергии 1 г вещества

[1]) Тот факт, что в изложенном выводе направление $\mathbf{E}$ совпадает с $\mathbf{n}$, несуществен, так как заранее очевидно, что σ_{ik} может зависеть лишь от направления $\mathbf{E}$, но не $\mathbf{n}$.

по удельному объему есть давление:

$$\left(\frac{\partial}{\partial(1/\rho)}\frac{F_0}{\rho}\right)_T = F_0 - \rho\left(\frac{\partial F_0}{\partial\rho}\right)_T = -P_0;$$

$P_0 = P_0(\rho, T)$ есть то давление, которое имелось бы в среде в отсутствие поля при данных значениях ρ и T. Поэтому при подстановке (15.8) в (15.7) получим

$$\sigma_{ik} = -P_0(\rho, T)\delta_{ik} - \frac{E^2}{8\pi}\left[\varepsilon - \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]\delta_{ik} + \frac{\varepsilon E_i E_k}{4\pi}. \qquad (15.9)$$

В пустоте это выражение переходит в известный максвелловский тензор напряжений электрического поля [1]).

Силы, с которыми действуют на поверхность раздела две соприкасающиеся различные среды, должны быть равны и противоположны: $\sigma_{ik}n_k = -\sigma'_{ik}n'_k$, где величины со штрихом и без него относятся к двум средам. Векторы нормали $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ имеют взаимно противоположные направления, так что можно написать

$$\sigma_{ik}n_k = \sigma'_{ik}n_k. \qquad (15.10)$$

На границе двух изотропных сред равенство тангенциальных составляющих сил соблюдается тождественно. Действительно, подставив (15.7) в (15.10) и взяв тангенциальную компоненту, получим

$$\mathbf{E}_t D_n = \mathbf{E}'_t D'_n.$$

Но это равенство удовлетворяется уже в силу граничных условий непрерывности $\mathbf{E}_t$ и D_n. Условие же равенства нормальных составляющих сил дает нетривиальное условие, налагаемое на разность давлений в обеих средах.

Рассмотрим, например, границу между жидкостью и атмосферой (для последней можно положить $\varepsilon = 1$). Отмечая штрихом величины, относящиеся к атмосфере, и пользуясь для σ_{ik} формулой (15.9), получим

$$-P_0(\rho, T) + \frac{E^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T + \frac{\varepsilon}{8\pi}(E_n^2 - E_t^2) = -P_{\text{атм}} + \frac{1}{8\pi}(E_n'^2 - E_t'^2).$$

Учитывая граничные условия $E_t = E'_t$, $D_n = \varepsilon E_n = D'_n = E'_n$, перепишем это равенство в виде

$$P_0(\rho, T) - P_{\text{атм}} = \frac{\rho E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}(\varepsilon E_n^2 + E_t^2). \qquad (15.11)$$

---

[1]) См. примеч. на с. 51.

Это соотношение надо понимать как уравнение, определяющее плотность ρ жидкости вблизи ее поверхности по напряженности электрического поля в ней.

Определим теперь действующие в диэлектрической среде объемные силы. Дифференцируя согласно (15.2) выражение (15.9), получим

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[-P_0 + \frac{E^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}E^2 + \frac{\partial}{\partial x_k}(E_i D_k)\right].$$

При учете уравнения $\operatorname{div}\mathbf{D} \equiv \partial D_k/\partial x_k = 0$ выражение в скобках в последнем члене сводится к сумме

$$-\varepsilon E_k\frac{\partial E_k}{\partial x_i} + D_k\frac{\partial E_i}{\partial x_k} = -D_k\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_k}\right),$$

обращающейся в нуль ввиду того, что $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$. Таким образом, получаем

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} P_0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[E^2\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon \qquad (15.12)$$

(*H. Helmholtz*, 1881).

Если в диэлектрике имеются сторонние заряды с объемной плотностью $\rho_{\text{ст}}$, то к силе $\mathbf{f}$ добавится еще член $\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{D}/(4\pi)$; поскольку $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}}$, то этот член равен

$$\rho_{\text{ст}}\mathbf{E}; \qquad (15.13)$$

не следует, однако, думать, что этот результат самоочевиден (ср. задачу 3 § 16).

В газе, как уже было указано в § 7, можно считать разность $\varepsilon - 1$ пропорциональной его плотности. Тогда $\rho\partial\varepsilon/\partial\rho = \varepsilon - 1$ и формула (15.12) принимает более простой вид:

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0 + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\operatorname{grad} E^2. \qquad (15.14)$$

Формула (15.12) справедлива для сред как однородных, так и неоднородных по своему составу. В неоднородной среде ε является функцией не только ρ и T, но и меняющейся вдоль среды концентрации смеси. В однородной же по составу среде ε есть функция только ρ, T, и $\operatorname{grad}\varepsilon$ можно раскрыть как

$$\nabla\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho\nabla T + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\nabla\rho.$$

Тогда (15.12) приобретает вид:

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0(\rho, T) + \frac{\rho}{8\pi}\nabla\left[E^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \nabla T. \qquad (15.15)$$

Если и температура постоянна вдоль тела, то третий член обращается в нуль, а в первом можно заменить ∇P_0 на $\rho\nabla\zeta_0$ (согласно известному термодинамическому соотношению для химического потенциала в отсутствие поля: $\rho\, d\zeta_0 = dP_0 - S_0\, dT$) и

$$\mathbf{f} = -\rho\nabla\left[\zeta_0 - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] = -\rho\nabla\zeta, \qquad (15.16)$$

где ζ — химический потенциал вещества в электрическом поле (см. (10.19)).

В частности, условие механического равновесия $\mathbf{f} = 0$ при постоянной температуре гласит:

$$\zeta = \zeta_0 - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T = \mathrm{const} \qquad (15.17)$$

в согласии с общим термодинамическим условием равновесия. Обычно это условие может быть написано в еще более простом виде. Изменение плотности среды под влиянием поля само пропорционально E^2. Поэтому, если в отсутствие поля среда однородна по своей плотности, то и при наличии поля в последних двух членах в (15.15) следует полагать $\rho = \mathrm{const}$; учет изменения ρ в формулах, предполагающих линейную связь $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, был бы превышением их точности. Тогда, приравнивая нулю $\mathbf{f}$ из (15.15), получим при постоянной температуре условие равновесия в виде

$$P_0(\rho, T) - \frac{\rho E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T = \mathrm{const}, \qquad (15.18)$$

отличающемся от (15.17) тем, что вместо ζ_0 в нем стоит P_0/ρ.

В заключение этого параграфа покажем, каким образом можно вывести непосредственно выражение для силы (15.12) из формулы (14.1), — если не ставить себе целью вычисление тензора напряжений.

Рассмотрим неограниченную неоднородную диэлектрическую среду, подвергаемую изотермической малой деформации, обращающейся в нуль на бесконечности. Вариация $\delta\varepsilon$ складывается из двух частей: 1) из изменения

$$\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}\nabla\varepsilon,$$

связанного с тем, что в результате деформации в заданную точку $\mathbf{r}$ приходит частица вещества из точки $\mathbf{r} - \mathbf{u}$, и 2) из изменения

$$-\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \rho \operatorname{div}\mathbf{u},$$

связанного с изменением плотности вещества в точке $\mathbf{r}$: как известно (см. VII, § 1), $\operatorname{div}\mathbf{u}$ есть относительное изменение элемента объема и потому изменение плотности есть $\delta\rho = -\rho\operatorname{div}\mathbf{u}$. Таким образом, вариация свободной энергии:

$$\delta\mathscr{F} = \delta\mathscr{F}_0 - \int \delta\varepsilon \frac{E^2}{8\pi}\,dV =$$
$$= -\int P_0 \operatorname{div}\mathbf{u}\,dV + \int \frac{E^2}{8\pi}\left[\mathbf{u}\nabla\varepsilon + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \rho\operatorname{div}\mathbf{u}\right] dV \quad (15.19)$$

(первый член — вариация свободной энергии в отсутствие поля). Проинтегрировав в (15.19) члены с $\operatorname{div}\mathbf{u}$ по частям и сравнив результат с выражением $\delta\mathscr{F} = -\int \mathbf{uf}\,dV$ вариации свободной энергии через работу сил $\mathbf{f}$, получим (15.12).

§ 16. Электрические силы в твердых телах

Диэлектрические свойства твердого тела меняются не только при изменении его плотности (как у жидкости), но и при деформациях, не меняющих плотности (сдвигах). Мы рассмотрим сначала тела, которые в отсутствие поля изотропны. Деформация нарушает, вообще говоря, изотропию тела; в результате становятся анизотропными также и его диэлектрические свойства, и скалярная диэлектрическая проницаемость ε заменяется диэлектрическим тензором ε_{ik}.

Состояние слабо деформированного тела описывается, как известно, тензором деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

где $\mathbf{u}(x, y, z)$ — вектор смещения точек тела. Ввиду малости этих величин в изменении компонент ε_{ik} достаточно ограничиться лишь членами первого порядка по u_{ik}. Соответственно этому представим диэлектрический тензор деформированного тела в виде

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0\delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll}\delta_{ik}. \quad (16.1)$$

Здесь ε_0 — диэлектрическая проницаемость недеформированного тела, а последние два члена (с двумя скалярными постоянными a_1, a_2) представляют собой наиболее общий вид тензора второго ранга, который можно составить линейным образом из компонент тензора u_{ik}.

Посмотрим теперь, в каком пункте должен быть изменен вывод, изложенный в предыдущем параграфе. Поскольку в твердом теле $\widetilde{F}$ зависит от всех компонент тензора деформации,

то вместо (15.4) надо писать

$$\delta\widetilde{F} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\delta\mathbf{E} + \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\delta u_{ik}.$$

При рассматриваемом виртуальном смещении вектор $\mathbf{u}$ дается формулой (15.5), так что тензор деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2h}(\xi_i n_k + \xi_k n_i).$$

Подставив это в $\delta\widetilde{F}$ и учитывая симметрию тензора u_{ik} (а потому и производных $\partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}$), получим

$$\delta\widetilde{F} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\delta\mathbf{E} + \frac{1}{h}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\xi_i n_k. \tag{16.2}$$

Теперь ясно, что для тензора напряжений мы получим вместо (15.7) следующее выражение [1]):

$$\sigma_{ik} = \widetilde{F}\delta_{ik} + \left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\right)_{T,\mathbf{E}} + \frac{E_i D_k}{4\pi}. \tag{16.3}$$

Формула (16.3) применима при любой зависимости $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$. Для непиро- (и непьезо-) электрического тела, в котором $D_i = \varepsilon_{ik}E_k$, $\widetilde{F}$ дается формулой (13.4), и для нужных нам производных получаем

$$\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}} = \frac{\partial F_0}{\partial u_{ik}} - \frac{1}{8\pi}(a_1 E_i E_k + a_2 E^2\delta_{ik}).$$

После этого везде в (16.3) полагаем $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0\delta_{ik}$ и находим следующую формулу для тензора напряжений:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \frac{2\varepsilon_0 - a_1}{8\pi}E_i E_k - \frac{\varepsilon_0 + a_2}{8\pi}E^2\delta_{ik}; \tag{16.4}$$

$\sigma_{ik}^{(0)}$ есть тензор напряжений в отсутствие электрического поля, определяющийся через тензор деформации и модули сдвига и сжатия по обычным формулам теории упругости.

---

[1]) Величина $\widetilde{F}$ в этой формуле, как и везде выше, есть свободная энергия, отнесенная к единице объема тела. В теории упругости, однако, обычно принимается несколько иное определение: термодинамические величины относят к количеству вещества, заключенному в единице объема недеформированного тела, которое после деформирования может занять несколько иной объем. Переход от одного определения к другому легко произвести, выражая относительное изменение объема при деформации через тензор u_{ik} (ввиду наличия в (16.3) производной по u_{ik} это надо сделать с точностью до членов второго порядка). В результате оба первых члена в (16.3) сведутся к одному члену вида $\partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}$, в согласии с обычной формулой теории упругости.

Перейдем теперь к аналогичным вычислениям для анизотропных твердых тел [1]). Изменения, которые должны быть при этом внесены в изложенный выше вывод, заключаются в следующем. При виртуальной деформации слоя вещества его кристаллографические оси испытывают поворот, в результате чего меняется их ориентация по отношению к электрическому полю. Ввиду анизотропии диэлектрических свойств кристалла это обстоятельство приводит к дополнительному изменению $\widetilde{F}$, не учтенному в (16.2). При вычислении этого изменения безразлично считать, оси ли кристалла поворачиваются на некоторый угол $\boldsymbol{\delta\varphi}$ относительно поля $\mathbf{E}$ или поле поворачивается относительно осей на угол $-\boldsymbol{\delta\varphi}$; второй способ более удобен.

Таким образом, к вариации поля (15.6), рассматривавшейся нами ранее, надо прибавить изменение $\mathbf{E}$ при повороте на угол $-\boldsymbol{\delta\varphi}$:

$$\delta\mathbf{E} = -\frac{1}{h}\mathbf{n}(\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}) - [\boldsymbol{\delta\varphi}\cdot\mathbf{E}].$$

Угол $\boldsymbol{\delta\varphi}$ связан с вектором смещения $\mathbf{u}$ при деформации посредством $\boldsymbol{\delta\varphi} = (1/2)\operatorname{rot}\mathbf{u}$ (это равенство легко получить, заметив, что при повороте тела на угол $\boldsymbol{\delta\varphi}$ его точки смещаются на $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\delta\varphi}\cdot\mathbf{r}]$). Подставив сюда $\mathbf{u}$ из (15.5), получим

$$\boldsymbol{\delta\varphi} = \frac{1}{2h}[\nabla z\cdot\boldsymbol{\xi}] = \frac{1}{2h}[\mathbf{n}\boldsymbol{\xi}],$$

а затем

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{E} = -\frac{1}{h}\mathbf{n}(\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2h}[\mathbf{E}[\mathbf{n}\boldsymbol{\xi}]] = -\frac{1}{2h}\{\mathbf{n}(\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{n}\mathbf{E})\}.$$

Первый член в (16.2) принимает вид

$$-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\delta\mathbf{E} = \frac{1}{8\pi h}\{(\mathbf{n}\mathbf{D})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{E}) + (\boldsymbol{\xi}\mathbf{D})(\mathbf{n}\mathbf{E})\} = \frac{\xi_i n_k}{4\pi h}\frac{E_iD_k + E_kD_i}{2}.$$

Отсюда видно, что в (16.3) произведение E_iD_k должно быть заменено стоящей здесь в скобках полусуммой:

$$\sigma_{ik} = \widetilde{F}\delta_{ik} + \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}} + \frac{1}{8\pi}(E_iD_k + E_kD_i). \qquad (16.5)$$

Отметим, что полученное выражение автоматически оказывается, как и должно быть, симметричным по индексам i и k.

---

[1]) Мы увидим в § 17, что явление электрострикции в кристаллах может при определенных типах симметрии весьма существенно отличаться от электрострикции изотропных тел. Такие кристаллы называют *пьезоэлектрическими*. Здесь же будет идти речь об электрострикции в непьезоэлектрических кристаллах.

Что касается диэлектрического тензора деформированного кристалла, то вместо выражения (16.1) с двумя скалярными постоянными мы будем иметь в общем случае выражение вида

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + a_{iklm}u_{lm}, \tag{16.6}$$

где a_{iklm} — постоянный тензор четвертого ранга, симметричный по парам индексов i, k и l, m (но не симметричный по отношению к перестановке пары i, k с парой l, m). Число отличных от нуля независимых компонент этого тензора зависит от симметрии кристалла, а именно от его кристаллического класса.

Мы не станем выписывать здесь формулы для тензора напряжений (аналогичной (16.4)), получающейся при использовании (16.6).

Полученные формулы определяют напряжения внутри твердого диэлектрика. Они, однако, не нужны, если мы хотим определить полную силу $\mathbf{F}$ или полный момент сил $\mathbf{K}$, действующие на тело со стороны внешнего поля. Рассмотрим тело, погруженное в жидкую (или газообразную) среду и удерживаемое в ней неподвижно. Полная действующая на него сила равна интегралу $\oint \sigma_{ik}n_k\,df$, взятому по его поверхности. В силу непрерывности сил $\sigma_{ik}n_k$ безразлично, вычисляется ли этот интеграл по значениям σ_{ik} из (16.4), или из формулы (15.9), относящейся к окружающей тело среде. Предположим, что эта среда находится в механическом и тепловом равновесии. Тогда вычисление еще более упрощается, если учесть условие равновесия (15.18). В силу этого условия часть тензора напряжений (15.9) оказывается постоянным вдоль среды равномерным сжимающим (или растягивающим) давлением, не дающим никакого вклада в полные действующие на тело силу $\mathbf{F}$ и момент сил $\mathbf{K}$. Для вычисления последних можно, следовательно, писать σ_{ik} в виде

$$\sigma_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_iE_k - \frac{E^2}{2}\delta_{ik}\right), \tag{16.7}$$

где $\mathbf{E}$ — поле в жидкости, а ε — ее диэлектрическая проницаемость.

Это выражение отличается от максвелловского тензора напряжений электрического поля в пустоте лишь множителем ε. Таким образом:

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\left\{\mathbf{E}(\mathbf{nE}) - \frac{1}{2}E^2\mathbf{n}\right\}df, \tag{16.8}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\left\{[\mathbf{rE}](\mathbf{nE}) - \frac{1}{2}E^2[\mathbf{rn}]\right\}df. \tag{16.9}$$

Отметим также, что поскольку жидкость находится в равновесии, то в этих формулах можно производить интегрирование

по любой замкнутой поверхности, охватывающей рассматриваемое тело (но, разумеется, не заключающей в себе заряженных тел, являющихся источниками поля).

К вопросу о вычислении полной силы, действующей на диэлектрик в электрическом поле (в пустоте), можно подойти и с другой точки зрения, выражая ее не через фактически существующее поле, а через то поле $\mathfrak{E}$, которое создавалось бы заданными источниками в отсутствие диэлектрика; это есть то «внешнее поле», в которое вносится тело. При этом предполагается, что распределение зарядов, создающих поле, не меняется при внесении тела в поле. Это условие может фактически не выполняться, например, если заряды распределены по поверхности протяженного проводника и диэлектрик подносится на конечное расстояние к нему.

При виртуальном параллельном переносе тела как целого на бесконечно малое расстояние $\mathbf{u}$ полная свободная энергия тела изменится согласно (11.3) на

$$\delta\mathcal{F} = -\int \mathbf{P}\delta\mathfrak{E}\,dV,$$

где

$$\delta\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathbf{r}+\mathbf{u}) - \mathfrak{E}(\mathbf{r}) = (\mathbf{u}\nabla)\mathfrak{E}$$

есть изменение поля $\mathfrak{E}$ по отношению к заданной точке тела. Поскольку $\mathbf{u} = \mathrm{const}$ и $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0$, имеем

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}\nabla)\mathfrak{E} = (\mathbf{P}\nabla)(\mathbf{u}\mathfrak{E}) = \mathbf{u}(\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E},$$

так что

$$\delta\mathcal{F} = -\mathbf{u}\int (\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E}\,dV.$$

С другой стороны, $\delta\mathcal{F} = -\mathbf{uF}$, и мы приходим к следующей формуле для искомой силы [1]):

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E}\,dV. \tag{16.10}$$

Аналогичным образом можно определить полный момент сил, действующих на тело. Не останавливаясь на соответствующих вычислениях, укажем результат:

$$\mathbf{K} = \int [\mathbf{P}\mathfrak{E}]\,dV + \int [\mathbf{r}\cdot(\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E}]\,dV. \tag{16.11}$$

---

[1]) Подчеркнем, однако, что подынтегральное выражение в этом интеграле нельзя интерпретировать как объемную плотность сил. Дело в том, что местные силы в диэлектрике связаны не только с полем $\mathfrak{E}$, но и с собственными внутренними полями в нем, которые, в силу закона сохранения импульса, не дают никакого вклада в полную силу, но влияют на распределение сил по объему тела.

В квазиоднородном поле, которое можно считать постоянным на протяжении размеров тела, формула (16.10) в первом приближении дает

$$\mathbf{F} = \left(\int \mathbf{P}\,dV\,\nabla\right)\mathfrak{E} = (\mathscr{P}\nabla)\mathfrak{E}, \tag{16.12}$$

где $\mathscr{P}$ — полный дипольный момент поляризованного диэлектрика, что, разумеется, можно было бы получить и прямым дифференцированием $\mathscr{F}$ из (11.8). В формуле (16.11) в первом приближении вообще пренебрегаем вторым членом по сравнению с первым и приходим к естественному результату:

$$\mathbf{K} = [\mathscr{P}\mathfrak{E}]. \tag{16.13}$$

Задачи

1. Диэлектрический шар (радиуса a), находящийся во внешнем однородном поле $\mathfrak{E}$, разрезан на две половины плоскостью, перпендикулярной к направлению поля. Определить силу притяжения между полушариями.

Решение. Представляем себе полушария разделенными бесконечно тонкой щелью и определяем силу по формуле (16.8) (с $\varepsilon = 1$), производя в ней интегрирование по поверхности полушария, причем $\mathbf{E}$ — напряженность поля в пустоте у поверхности. Согласно (8.2) поле внутри шара однородно и равно $E^{(i)} = 3\mathfrak{E}/(2+\varepsilon)$ (ε — диэлектрическая проницаемость шара). Поле в щели перпендикулярно к поверхности и равно

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^{(i)} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}.$$

На внешней же поверхности шара

$$E_r = D_r^{(i)} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}\cos\theta, \quad E_\theta = E_\theta^{(i)} = -\frac{3}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}\sin\theta,$$

где θ — угол между радиус-вектором и направлением $\mathfrak{E}$.

Вычисление интеграла приводит к силе притяжения, равной [1])

$$F = \frac{9(\varepsilon-1)^2}{16(\varepsilon+2)^2}a^2\mathfrak{E}^2.$$

2. Определить изменение формы диэлектрического шара во внешнем однородном электрическом поле.

Решение вполне аналогично решению задачи 4 § 5. При определении изменения формы предполагаем объем шара неизменным [2]). Для упругой части свободной энергии имеем то же выражение, что и в задаче 4 § 5. Электрическая часть дается выражением

$$-\frac{1}{2}\mathscr{P}\mathfrak{E} = -\frac{V}{8\pi}\frac{\varepsilon^{(x)}-1}{1+n(\varepsilon^{(x)}-1)}\mathfrak{E}^2$$

---

[1]) Совпадение предела этого выражения при $\varepsilon \to \infty$ с результатом задачи 3 § 5 для проводящего шара случайно (в действительности даже знак этих сил различен). Физическая неэквивалентность обоих случаев ясна из того, что в щели между двумя проводящими полушариями (находящимися при одинаковом потенциале) нет поля, а в данной задаче — есть.

[2]) Изменение объема определяется в задаче 1 § 12.

(см. (8.9)), причем диэлектрическая проницаемость вдоль оси x согласно (16.1)

$$\varepsilon^{(x)} = \varepsilon_0 + a_1 u_{xx} = \varepsilon_0 + \frac{2a_1}{3}(u_{xx} - u_{yy}) = \varepsilon_0 + \frac{2a_1}{3}\frac{a-b}{R}.$$

Из условия минимума полной свободной энергии найдем (с учетом малости искомой величины):

$$\frac{a-b}{R} = \frac{9\mathfrak{E}^2}{40\pi\mu}\frac{(\varepsilon_0-1)^2 + 5a_1/2}{(\varepsilon_0+2)^2}.$$

При $\varepsilon_0 \to \infty$ это выражение переходит в результат для проводящего шара.

3. Определить объемные силы в изотропном твердом диэлектрике при наличии в нем сторонних зарядов; тело предполагается однородным.

Р е ш е н и е. Предполагая ε_0, a_1, a_2 постоянными и используя уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} \approx \varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{ст}},$$

получим из (16.4)

$$f_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial\sigma_{ik}^{(0)}}{\partial x_k} - \frac{1}{8\pi}\left(\frac{a_1}{2} + a_2\right)\frac{\partial E^2}{\partial x_i} + \left(1 - \frac{a_1}{2\varepsilon_0}\right)\rho_{\text{ст}}E_i.$$

§ 17. Пьезоэлектрики

Внутренние напряжения, появляющиеся в изотропном диэлектрике в электрическом поле, представляют собой эффект, квадратичный по полю. Такой же эффект имеет место и в кристаллах, относящихся к ряду кристаллографических классов. Но при определенных типах симметрии электрострикционные свойства кристаллов имеют существенно иной характер. Внутренние напряжения, возникающие в электрическом поле, в этих телах (*пьезоэлектриках*) пропорциональны первой степени поля. Соответственно имеет место и обратный эффект — деформирование пьезоэлектрика сопровождается появлением в нем поля, пропорционального величине деформации.

Интересуясь в пьезоэлектрике лишь основным, линейным эффектом, мы можем пренебречь в общей формуле (16.5) квадратичными по полю членами. Тогда

$$\sigma_{ik} = \widetilde{F}\delta_{ik} + \left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\right)_{T,\mathbf{E}}.$$

Ниже в этом параграфе мы будем пользоваться термодинамическими величинами, отнесенными к количеству вещества, заключенному в единице объема недеформированного тела (см. примеч. на с. 103). Понимая $\widetilde{F}$ в этом смысле, будем иметь

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\right)_{T,\mathbf{E}}. \qquad (17.1)$$

Соответственно термодинамическое соотношение для дифференциала $d\widetilde{F}$ будет

$$d\widetilde{F} = -S\,dT + \sigma_{ik}du_{ik} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\,d\mathbf{E}. \tag{17.2}$$

По поводу последнего члена надо сделать следующее замечание: в таком виде этот член (перенесенный сюда из (10.9)) относится, строго говоря, к единице объема деформированного тела. Не учитывая этого, мы допускаем ошибку, которая, однако, в данном случае (для пьезоэлектрика) является величиной более высокого порядка малости, чем остальные члены в (17.2).

В (17.2) роль независимых переменных играют компоненты тензора u_{ik}. Иногда бывает удобно пользоваться в качестве таковых компонентами σ_{ik}. Для этого надо ввести термодинамический потенциал, определяемый как

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{F} - u_{ik}\sigma_{ik}. \tag{17.3}$$

Для дифференциала этой величины будем иметь

$$d\widetilde{\Phi} = -S\,dT - u_{ik}d\sigma_{ik} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\,d\mathbf{E}. \tag{17.4}$$

Подчеркнем, что введение в электродинамике термодинамического потенциала $\widetilde{\Phi}$ согласно формулам (17.3) и (17.4) связано со справедливостью соотношения (17.1) и потому возможно лишь для пьезоэлектрических тел.

Определив таким образом нужные нам термодинамические величины, перейдем к описанию пьезоэлектрических свойств кристаллов. Выбрав величины σ_{ik} и E_k в качестве независимых переменных, мы должны рассматривать индукцию $\mathbf{D}$ как их функцию, а в разложении этой функции надо сохранить члены первого порядка по ним. Линейные члены разложения компонент вектора по степеням компонент тензора второго ранга в наиболее общем случае могут быть написаны в виде $4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}$, где совокупность постоянных $\gamma_{i,kl}$ составляет тензор третьего ранга (множитель 4π введен для удобства). Поскольку тензор σ_{kl} симметричен по своим индексам, то ясно, что и тензор $\gamma_{i,kl}$ можно считать симметричным по соответствующим двум индексам:

$$\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk}; \tag{17.5}$$

для наглядности мы отделяем запятой симметричную пару индексов kl от третьего индекса. Будем называть тензор $\gamma_{i,kl}$ пьезоэлектрическим. Его заданием полностью определяются пьезоэлектрические свойства кристалла.

Добавив пьезоэлектрические члены к выражению (13.1) для электрической индукции в кристалле, напишем

$$D_i = D_{i0} + \varepsilon_{ik}E_k + 4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}. \tag{17.6}$$

Соответствующие дополнительные члены появятся и в термодинамических величинах. У непьезоэлектрического кристалла в отсутствие поля термодинамический потенциал

$$\widetilde{\Phi} = \Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm},$$

где Φ_0 относится к недеформированному телу, а второй член представляет собой обычную упругую энергию, определяющуюся тензором упругих постоянных μ_{iklm} [1]). Для пьезоэлектрика же будем иметь

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm} - \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}E_iE_k - \frac{1}{4\pi}E_iD_{i0} - \gamma_{i,kl}E_i\sigma_{kl}. \quad (17.7)$$

Вид последних трех членов определяется тем, что производные от Φ по E_i (при заданных внутренних напряжениях и температуре) согласно формуле

$$D_i = -4\pi\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial E_i}$$

должны дать выражения (17.6).

Зная $\widetilde{\Phi}$, можно получить согласно (17.4) формулу, выражающую тензор деформации через напряжения σ_{ik} и поле $\mathbf{E}$:

$$u_{ik} = -\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\sigma_{ik}}\right)_{T,\mathbf{E}} = \mu_{iklm}\sigma_{lm} + \gamma_{l,ik}E_l. \quad (17.8)$$

Следует отметить, что смысл величин μ_{iklm} и ε_{ik} как упругих постоянных и диэлектрической проницаемости в пьезоэлектрике в определенном смысле условен. При выбранном нами определении они дают соответственно зависимость деформации от

---

[1]) Тензор μ_{iklm} определяет связь между напряжениями и деформацией согласно

$$u_{ik} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ik}} = \mu_{iklm}\sigma_{lm}.$$

В VII, § 10 мы писали обратную зависимость

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}u_{lm}.$$

Ясно, что все свойства симметрии тензора μ_{iklm} полностью совпадают со свойствами симметрии тензора λ_{iklm}.

В свободную энергию F упругая энергия входит со знаком плюс:

$$F_{\text{упр}} = \frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}.$$

Термодинамический же потенциал получается из F вычитанием $\sigma_{ik}u_{ik}$, и потому

$$\Phi_{\text{упр}} = F_{\text{упр}} - \sigma_{ik}u_{ik} = -\frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm} = -\frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm}.$$

упругих напряжений при заданной напряженности поля и зависимость индукции от напряженности при заданных напряжениях. Если же деформирование происходит при заданной индукции поля или же мы рассматриваем зависимость индукции от напряженности при заданной деформации, то роль упругих коэффициентов и диэлектрической проницаемости будут играть другие величины, которые могут быть выражены (хотя и довольно сложным образом) через компоненты тензоров μ, ε и γ.

Определение поля в пьезоэлектрическом теле должно производиться одновременно с определением его деформации и представляет собой совместную задачу электростатики и теории упругости. Именно, следует искать совместное решение электростатических уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \tag{17.9}$$

с $\mathbf{D}$ из (17.6) и уравнений упругого равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{17.10}$$

с соответствующими граничными условиями на поверхности тела и с учетом связи между σ_{ik} и деформацией, даваемой формулами (17.8). В общем случае такая постановка задачи весьма сложна.

Задача очень упрощается для тела эллипсоидальной формы со свободной поверхностью (т. е. к которой не приложены никакие внешние механические силы). В этом случае (§ 8) поле внутри тела, а потому и его деформация однородны, а все упругие напряжения $\sigma_{ik} = 0$.

Наконец, займемся вопросом о том, какие типы кристаллической симметрии допускают существование пьезоэлектричества. Другими словами, надо рассмотреть ограничения, накладываемые условиями симметрии на компоненты тензора $\gamma_{i,kl}$. В общем случае этот тензор (симметричный по индексам k и l) имеет 18 отличных от нуля независимых компонент, фактически же число независимых компонент обычно значительно меньше.

При всех преобразованиях симметрии данного кристалла все компоненты его тензора $\gamma_{i,kl}$ должны оставаться неизменными по величине. Отсюда сразу следует, что во всяком случае не может быть пьезоэлектриком тело, обладающее центром симметрии (в том числе, конечно, изотропное тело). Действительно, при отражении в центре (изменение знака всех трех координат) меняют знак все компоненты тензора третьего ранга.

Из 32-х кристаллических классов допускают пьезоэлектричество всего 20. Сюда относятся, прежде всего, 10 перечисленных в § 13 классов, допускающих пироэлектричество (все пироэлек-

трики являются в то же время и пьезоэлектриками). Кроме того, пьезоэлектрическими являются кристаллы следующих 10 классов:

ромбическая система: $\boldsymbol{D}_2$,
тетрагональная система: $\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{D}_{2d}$, $\boldsymbol{S}_4$,
ромбоэдрическая система: $\boldsymbol{D}_3$,
гексагональная система: $\boldsymbol{D}_6$, $\boldsymbol{C}_{3h}$, $\boldsymbol{D}_{3h}$,
кубическая система: $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{T}_d$.

Перечисление отличных от нуля компонент пьезоэлектрического тензора для всех классов дано в задачах к этому параграфу.

Упомянем здесь еще о родственном пьезоэлектричеству явлении, возникающем при «деформировании» жидкого кристалла; при этом мы будем иметь в виду *нематические* кристаллы. Напомним (см. V, § 140), что эти жидкие среды характеризуются существованием некоторого выделенного направления преимущественной ориентации молекул. Это направление задается в каждой точке среды единичным вектором **d** — *директором* кристалла. В недеформированном жидком кристалле направление **d** постоянно вдоль всего его объема, в деформированном — функция координат. Разложению (17.6) соответствует в жидком кристалле выражение индукции в виде

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k + 4\pi e_1 d_i \operatorname{div}\mathbf{d} + 4\pi e_2[\operatorname{rot}\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}]_i, \qquad (17.11)$$

где e_1, e_2 — скалярные коэффициенты (*R.B. Meyer*, 1969)[1]. Два последних члена, описывающие рассматриваемый эффект, представляют собой наиболее общий полярный вектор, который можно составить из вектора **d** и его первых производных по координатам. Отметим, что выражение (17.11) автоматически оказывается инвариантным относительно изменения знака **d**.

Что касается тензора диэлектрической проницаемости нематического кристалла, то по своей симметрии он совпадает с таковым для одноосных кристаллов, причем роль оси симметрии играет местное (в каждой точке среды) направление директора. Тензор ε_{ik} может быть представлен в виде

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0\delta_{ik} + \varepsilon_a d_i d_k \qquad (17.12)$$

с двумя независимыми постоянными ε_0 и ε_a.

Задачи

1. Определить отличные от нуля компоненты $\gamma_{i,kl}$ для непироэлектрических кристаллических классов, допускающих пьезоэлектричество.

Решение. Класс $\boldsymbol{D}_2$ содержит три взаимно перпендикулярные оси симметрии второго порядка, которые выбираем в качестве осей x, y, z. Повороты на 180° вокруг этих осей меняют знаки каждых двух из трех координат. Поскольку компоненты $\gamma_{i,kl}$ преобразуются как произведения $x_i x_k x_l$,

[1]) Пироэлектричество в нематических кристаллах фактически неизвестно, поэтому полагаем $\mathbf{D}_0 = 0$.

то отличными от нуля могут быть только те из них, все три индекса которых различны:

$$\gamma_{x,yz},\ \gamma_{z,xy},\ \gamma_{y,zx};$$

остальные отличные от нуля компоненты равны этим в силу свойства $\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk}$. Соответственно пьезоэлектрическая часть термодинамического потенциала [1])

$$\widetilde{\Phi}_{\text{пьезо}} = -2(\gamma_{x,yz}E_x\sigma_{yz} + \gamma_{y,xz}E_y\sigma_{xz} + \gamma_{z,xy}E_z\sigma_{xy}). \tag{1}$$

Класс $\boldsymbol{D}_{2d}$ получается добавлением к осям класса $\boldsymbol{D}_2$ еще двух плоскостей симметрии, проходящих через одну из осей (пусть ось z) и делящих пополам углы между осями x и y. Отражение в одной из этих плоскостей означает преобразование $x \to y$, $y \to x$, $z \to z$. Поэтому компоненты $\gamma_{i,kl}$, отличающиеся перестановкой индексов x и y, должны быть одинаковыми, так что из трех коэффициентов в (1) остаются независимыми лишь два:

$$\gamma_{z,xy},\ \gamma_{x,yz} = \gamma_{y,xz}.$$

Класс $\boldsymbol{T}$ получается из класса $\boldsymbol{D}_2$ путем добавления четырех диагональных осей симметрии третьего порядка, повороты вокруг которых осуществляют циклическую перестановку осей x, y, z, например: $x \to z$, $y \to x$, $z \to y$. Поэтому становятся равными все три коэффициента в (1):

$$\gamma_{x,yz} = \gamma_{y,zx} = \gamma_{z,xy}.$$

Такой же результат получается для кубического класса $\boldsymbol{T}_d$.

Класс $\boldsymbol{D}_4$ содержит ось симметрии 4-го порядка (ось z) и четыре оси 2-го порядка, лежащие в плоскости xy. В дополнение к элементам симметрии класса $\boldsymbol{D}_2$ достаточно рассмотреть здесь поворот на $90°$ вокруг оси z, т. е. преобразование $x \to y$, $y \to -x$, $z \to z$. В силу этого преобразования один из коэффициентов в (1) обращается в нуль ($\gamma_{z,xy} = -\gamma_{z,xy} = -\gamma_{z,xy}$, откуда $\gamma_{z,xy} = 0$), а два других отличаются только знаком:

$$\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz}.$$

Такой же результат получается для класса $\boldsymbol{D}_6$.

Класс $\boldsymbol{S}_4$ содержит преобразования $x \to y$, $y \to -x$, $z \to -z$ и $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to z$. Отличны от нуля компоненты

$$\gamma_{z,xy},\ \gamma_{x,yz} = \gamma_{y,xz}, \quad \gamma_{z,xx} = -\gamma_{z,yy}, \quad \gamma_{x,zx} \to -\gamma_{y,zy}.$$

Соответствующим выбором направлений осей x, y одна из этих величин может быть обращена в нуль.

Класс $\boldsymbol{D}_3$ содержит ось симметрии 3-го порядка (ось z) и три оси симметрии 2-го порядка в плоскости xy, одна из которых пусть будет направлена по оси x. Для выяснения ограничений, налагаемых наличием оси третьего порядка, удобно произвести формальное преобразование, вводя комплексные «координаты»

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy;$$

---

[1]) Во избежание недоразумений напомним, что если вычислять компоненты тензора деформации u_{ik} непосредственным дифференцированием конкретного выражения для $\widetilde{\Phi}$ по σ_{ik}, то производные по компонентам σ_{ik} с $i \neq k$ дадут удвоенные значения соответствующих компонент u_{ik}. Это связано с тем, что выражения $u_{ik} = -\partial\Phi/\partial\sigma_{ik}$ имеют по существу смысл лишь как выражающие тот факт, что $\partial\widetilde{\Phi} = -u_{ik}\,d\sigma_{ik}$; но в сумму $u_{ik}\,d\sigma_{ik}$ члены с дифференциалами недиагональных компонент симметричного тензора σ_{ik} входят дважды.

координату z оставляем без изменений. К этим новым координатам преобразуем также и тензор $\gamma_{i,kl}$. В его компонентах индексы пробегают теперь значения ξ, η, z. При повороте на $120°$ вокруг оси z эти координаты подвергаются преобразованию

$$\xi \to \xi e^{2\pi i/3}, \quad \eta \to \eta e^{-2\pi i/3}, \quad z \to z.$$

При этом остаются неизменными и потому могут быть отличными от нуля лишь следующие компоненты тензора $\gamma_{i,kl}$: $\gamma_{z,\eta\xi}$, $\gamma_{\eta,z\xi}$, $\gamma_{\xi,z\eta}$, $\gamma_{\xi,\xi\xi}$, $\gamma_{\eta,\eta\eta}$, $\gamma_{z,zz}$. Поворот же на $180°$ вокруг оси x есть преобразование $x \to x$, $y \to -y$, $z \to -z$, т. е. $\xi \to \eta$, $\eta \to \xi$, $z \to -z$. При этом $\gamma_{z,\eta\xi}$ и $\gamma_{z,zz}$ изменяют знак и потому должны обратиться в нуль, а остальные из перечисленных выше компонент попарно переходят друг в друга, что приводит к равенствам $\gamma_{\eta,z\xi} = -\gamma_{\xi,z\eta}$, $\gamma_{\xi,\xi\xi} = \gamma_{\eta,\eta\eta}$. Для того чтобы написать выражение для $\widetilde{\Phi}_{\text{пьезо}}$, надо составить сумму $-\gamma_{i,kl}E_i\sigma_{kl}$, в которой индексы пробегают значения ξ, η, z:

$$\widetilde{\Phi}_{\text{пьезо}} = -2\gamma_{\eta,z\xi}(E_\eta\sigma_{z\xi} - E_\xi\sigma_{z\eta}) - \gamma_{\xi,\xi\xi}(E_\xi\sigma_{\xi\xi} + E_\eta\sigma_{\eta\eta}).$$

Здесь надо еще выразить компоненты E_i и σ_{ik} в координатах ξ, η, z через компоненты в исходных координатах x, y, z. Это легко сделать, воспользовавшись тем, что компоненты тензора преобразуются как произведения соответствующих координат. Поэтому, например, из

$$\xi\xi = xx - yy + 2ixy$$

следует, что

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}.$$

В результате получим

$$\widetilde{\Phi}_{\text{пьезо}} = 2a(E_y\sigma_{zx} - E_x\sigma_{zy}) + b[2E_y\sigma_{xy} - E_x(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})], \tag{2}$$

где $a = 2i\gamma_{\eta,z\xi}$, $b = 2\gamma_{\xi,\xi\xi}$ — вещественные постоянные. Соотношения между компонентами $\gamma_{i,kl}$ в координатах x, y, z гласят, как это видно из (2) [1]):

$$\gamma_{y,zx} = -\gamma_{x,zy} \equiv -a, \quad \gamma_{y,xy} = -\gamma_{x,xx} = \gamma_{x,yy} \equiv -b.$$

Класс $\boldsymbol{D}_{3h}$ получается добавлением к классу $\boldsymbol{D}_3$ плоскости симметрии, перпендикулярной к оси третьего порядка (плоскость xy). Отражение в этой плоскости есть изменение знака z, а потому и $\gamma_{\eta,z\xi} = 0$, так что в (2) остается только член с одним коэффициентом b.

Класс $\boldsymbol{C}_{3h}$ содержит, помимо оси третьего порядка, перпендикулярную к ней плоскость симметрии. Отражение в последней есть изменение знака z, а потому должны быть равными нулю все компоненты $\gamma_{i,kl}$, в индексах которых z встречается нечетное число раз. Учитывая также рассмотренные выше ограничения, налагаемые осью симметрии третьего порядка, найдем, что отличны от нуля только две компоненты $\gamma_{\eta,\eta\eta}$ и $\gamma_{\xi,\xi\xi}$. Эти величины должны быть комплексно-сопряженными для того, чтобы $\widetilde{\Phi}$ было вещественным.

---

[1]) В неортогональных координатах, каковыми являются ξ, η, z, надо, как известно, различать ко- и контравариантные компоненты тензоров. Это обстоятельство должно было бы учитываться и при переходе к исходным координатам x, y, z: если компоненты E_i и σ_{kl} преобразуются как контравариантные, то компоненты тензора $\gamma_{i,kl}$ должны преобразовываться как ковариантные. Мы, однако, обходим этот вопрос, определяя связь между различными компонентами $\gamma_{i,kl}$ в координатах x, y, z непосредственно на основании вида скалярной комбинации (2).

Обозначив

$$2\gamma_{\xi,\xi\xi} = a + ib, \quad 2\gamma_{\eta,\eta\eta} = a - ib,$$

получим

$$\widetilde{\Phi}_{\text{пьезо}} = a[2E_y\sigma_{xy} - E_x(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})] + b[2E_x\sigma_{xy} + E_y(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})]. \quad (3)$$

Соответствующим выбором направления осей x, y можно обратить a или b в нуль.

2. То же для кристаллических классов, допускающих пироэлектричество.

Р е ш е н и е. Пусть ось z совпадает с осью симметрии второго, третьего, четвертого или шестого порядка, а в классе $\boldsymbol{C}_s$ перпендикулярна к плоскости симметрии. В классах $\boldsymbol{C}_{nv}$ плоскость xz совпадает с одной из плоскостей симметрии.

Ниже указаны все отличные от нуля компоненты $\gamma_{i,kl}$ для каждого из классов:

Класс $\boldsymbol{C}_1$: все $\gamma_{i,kl}$.

Класс $\boldsymbol{C}_s$: все компоненты, не содержащие индекса z или содержащие его два раза.

Класс $\boldsymbol{C}_{2v}$:

$$\gamma_{z,xx},\ \gamma_{z,yy},\ \gamma_{z,zz},\ \gamma_{x,xz},\ \gamma_{y,yz}.$$

Класс $\boldsymbol{C}_2$: те же что в $\boldsymbol{C}_{2v}$, а также

$$\gamma_{x,yz},\ \gamma_{y,xz},\ \gamma_{z,xy}.$$

Класс $\boldsymbol{C}_{4v}$:

$$\gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy},\ \gamma_{z,zz},\ \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz}.$$

Класс $\boldsymbol{C}_4$: те же, что в $\boldsymbol{C}_{4v}$, а также

$$\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz}.$$

Класс $\boldsymbol{C}_{3v}$:

$$\gamma_{z,zz},\ \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz},\ \gamma_{x,xx} = -\gamma_{x,yy} = -\gamma_{y,xy},\ \gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy}.$$

Класс $\boldsymbol{C}_3$: те же, что в $\boldsymbol{C}_{3v}$, а также

$$\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz},\ \gamma_{y,xx} = -\gamma_{y,yy} = \gamma_{x,xy}.$$

Класс $\boldsymbol{C}_{6v}$:

$$\gamma_{z,zz},\ \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz},\ \gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy}.$$

Класс $\boldsymbol{C}_6$: те же, что в $\boldsymbol{C}_{6v}$, а также

$$\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz}.$$

Соответствующим выбором направления осей x, y, z в классе $\boldsymbol{C}_1$ можно обратить в нуль еще три компоненты, а выбором осей x, y в классах $\boldsymbol{C}_s$, $\boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{C}_3$ — одну компоненту (в классах же $\boldsymbol{C}_4$ и $\boldsymbol{C}_6$ выражение $\gamma_{i,kl}E_i\sigma_{kl}$ инвариантно относительно поворотов на любой угол вокруг оси z, и потому дальнейшее уменьшение числа отличных от нуля компонент $\gamma_{i,kl}$ невозможно).

3. Определить модуль Юнга (коэффициент пропорциональности между растягивающим напряжением и относительным удлинением) для плоскопараллельной пластинки непироэлектрического пьезоэлектрика в следующих случаях: а) пластинка растягивается обкладками закороченного конденсатора; б) пластинка растягивается обкладками незаряженного конденсатора; в) пластинка растягивается параллельно своей плоскости в отсутствие внешнего поля.

Р е ш е н и е. а) В этом случае напряженность поля внутри пластинки $\mathbf{E} = 0$. Единственная отличная от нуля компонента тензора σ_{kl} — растяги-

вающее напряжение σ_{zz} (ось z перпендикулярна к плоскости пластинки [1])). Из (17.8) имеем $u_{zz} = \mu_{zzzz}\sigma_{zz}$, откуда для модуля Юнга E:

$$\frac{1}{E} = \mu_{zzzz}.$$

б) В этом случае в пластинке $E_x = E_y = 0$, $D_z = 0$. Из (17.6) и (17.8) имеем

$$D_z = \varepsilon_{zz}E_z + 4\pi\gamma_{z,zz}\sigma_{zz} = 0, \quad u_{zz} = \mu_{zzzz}\sigma_{zz} + \gamma_{z,zz}E_z.$$

Исключая из этих двух равенств E_z, найдем

$$\frac{1}{E} = \mu_{zzzz} - \frac{4\pi}{\varepsilon_{zz}}\gamma_{z,zz}^2.$$

в) В этом случае также $E_x = E_y = 0$, $D_z = 0$, растяжение же пусть происходит вдоль оси x. Имеем

$$D_z = \varepsilon_{zz}E_z + 4\pi\gamma_{z,xx}\sigma_{xx} = 0, \quad u_{xx} = \mu_{xxxx}\sigma_{xx} + \gamma_{z,zz}E_z.$$

Исключая E_z, получим

$$\frac{1}{E} = \mu_{xxxx} - \frac{4\pi}{\varepsilon_{zz}}\gamma_{z,zz}^2.$$

4. Получить уравнение, определяющее скорость звука в пьезоэлектрической среде.

Р е ш е н и е. В этой задаче удобнее пользоваться как независимыми переменными величинами u_{ik} вместо σ_{ik}. Пишем $\widetilde{F}$ в виде

$$\widetilde{F} = F_0 + \frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm} - \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}E_iE_k - \frac{1}{4\pi}E_iD_{i0} + \beta_{i,kl}E_iu_{kl},$$

откуда

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}} = \lambda_{iklm}u_{lm} + \beta_{l,ik}E_l.$$

Уравнения движения теории упругости имеют вид

$$\rho\ddot{u}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \lambda_{iklm}\frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} + \beta_{l,ik}\frac{\partial E_l}{\partial x_k}, \tag{4}$$

где ρ — плотность среды, $\mathbf{u}$ — вектор смещения, связанный с u_{ik} соотношением

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

Уравнение $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ дает

$$\varepsilon_{ik}\frac{\partial E_k}{\partial x_i} - 4\pi\beta_{i,kl}\frac{\partial u_{kl}}{\partial x_i} = 0, \tag{5}$$

а напряженность поля выражаем через его потенциал:

$$E_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

чем удовлетворяется уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$.

[1]) Она не предполагается совпадающей с каким-либо избранным кристаллографическим направлением.

В плоской звуковой волне $\mathbf{u}$ и φ пропорциональны $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$, и из написанных уравнений получаем

$$\rho\omega^2 u_i = \lambda_{iklm}k_k k_l u_m - \beta_{l,ik}k_k k_l \varphi,$$
$$\varepsilon_{ik}k_i k_k \varphi + 4\pi\beta_{i,kl}k_i k_k u_l = 0.$$

Исключив отсюда φ, пишем условие совместности получающихся для u_l уравнений

$$\det\left|\rho\omega^2\delta_{ik} - \lambda_{ilkm}k_l k_m - 4\pi\frac{(\beta_{l,mi}k_l k_m)(\beta_{p,qk}k_p k_q)}{\varepsilon_{rs}k_r k_s}\right| = 0.$$

При каждом заданном направлении волнового вектора $\mathbf{k}$ это уравнение определяет три, вообще говоря, различных, фазовых скорости звука ω/k. Характерной для пьезоэлектрической среды особенностью является сложная зависимость скорости от направления волны.

5. Пьезоэлектрический кристалл, относящийся к классу $\boldsymbol{C}_{6v}$, ограничен плоской поверхностью (плоскость xz), проходящей через ось симметрии (ось z). Найти скорость поверхностных волн, распространяющихся перпендикулярно оси симметрии (вдоль оси x); в волне испытывают колебания смещение u_z и потенциал электрического поля φ (*J.L. Bleustein*, 1968; *Ю.В. Гуляев*, 1969).

Р е ш е н и е. В рассматриваемых условиях в системе уравнений (4) и (5) отделяются два уравнения, содержащие только u_z и φ; эти величины зависят от координат x, y (и от времени t), но не от z. Отличные от нуля компоненты тензора напряжений и вектора индукции:

$$\sigma_{zx} = \beta E_x + 2\lambda u_{zx}, \quad \sigma_{zy} = \beta E_y + 2\lambda u_{zy},$$
$$D_x = -8\pi\beta u_{zx} + \varepsilon E_x, \quad D_y = -8\pi\beta u_{zy} + \varepsilon E_y,$$

причем

$$u_{zx} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad u_{zy} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

и для краткости обозначено

$$\beta_{x,xz} = \beta_{y,yz} \equiv \beta, \quad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz} \equiv \lambda, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \equiv \varepsilon;$$

постоянная пироэлектрическая индукция $D_z = D_0$ в уравнения и граничные условия не входит.

Уравнение (5) и z-компонента уравнения (4) дают для области, занятой пьезоэлектрической средой (полупространство $y > 0$):

$$4\pi\beta\Delta u_z + \varepsilon\Delta\varphi^{(i)} = 0, \quad \rho\ddot{u}_z = -\beta\Delta\varphi^{(i)} + \lambda\Delta u_z,$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; перепишем эти уравнения в виде

$$\rho\ddot{u}_z = \overline{\lambda}\Delta u_z, \quad \Delta\psi = 0, \tag{6}$$

где

$$\overline{\lambda} = \lambda + \frac{4\pi\beta^2}{\varepsilon}, \quad \psi = \frac{4\pi\beta}{\varepsilon}u_z + \varphi^{(i)}.$$

В пустоте же (полупространство $y < 0$) потенциал $\varphi^{(e)}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi^{(e)} = 0. \tag{7}$$

Эти уравнения должны решаться при граничных условиях на поверхности среды:

$$\varphi^{(i)} = \varphi^{(e)}, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad D_y^{(i)} = -\frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial y} \text{ при } y = 0, \tag{8}$$

и при условиях

$$u_z \to 0 \text{ при } y \to \infty; \quad \varphi \to 0 \text{ при } y \to \pm\infty$$

вдали от поверхности. Ищем решение в виде

$$u_z = Ae^{-\varkappa y} e^{i(kx-\omega t)}, \quad \psi = Be^{-ky} e^{i(kx-\omega t)}, \quad \varphi^{(e)} = Ce^{ky} e^{i(kx-\omega t)},$$

причем

$$\rho\omega^2 = \overline{\lambda}(k^2 - \varkappa^2). \tag{9}$$

Уравнения (6), (7) и условия на бесконечности уже удовлетворены, а условия (8) дают три линейных однородных уравнения для A, B, C, условие разрешимости которых приводит к соотношению

$$\varkappa = k\frac{4\pi\beta^2}{\overline{\lambda}\varepsilon(1+\varepsilon)} \equiv \Lambda k.$$

Наконец, подставив в (9), найдем фазовую скорость волн

$$\frac{\omega}{k} = \left[\frac{\overline{\lambda}}{\rho}(1 - \Lambda^2)\right]^{1/2}.$$

Поверхностное распространение этих волн специфично для пьезоэлектрической среды. При $\beta \to 0$ глубина проникновения $1/\varkappa \to \infty$, т. е. волна становится объемной.

§ 18. Термодинамические неравенства

По формулам § 10 полная свободная энергия представляется в виде интеграла

$$\mathscr{F} = \int F(T, \rho, \mathbf{D})\, dV, \tag{18.1}$$

взятого по всему пространству. Будем рассматривать входящую в подынтегральное выражение функцию $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ как удовлетворяющую только уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \tag{18.2}$$

внутри диэлектрика и условию

$$\oint \mathbf{D}\, d\mathbf{f} = 4\pi e \tag{18.3}$$

на поверхности проводника, несущего заданный заряд; этими равенствами устанавливается связь поля с его источниками. В остальном же функцию $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ считаем произвольной, в частности, не требуем заранее, чтобы она удовлетворяла второму уравнению поля $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ (где $\mathbf{E} = 4\pi\, \partial F/\partial \mathbf{D}$) и граничному условию $\varphi = \text{const}$ на поверхности проводников. Покажем, что эти

недостающие уравнения могут тогда быть получены из условия минимальности интеграла (18.1) по отношению к изменениям функции $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, удовлетворяющим уравнениям (18.2) и (18.3). Подчеркнем, что возможность такого вывода a priori не очевидна, так как конкурирующие при определении минимума интеграла (18.1) распределения поля не соответствуют физически возможным состояниям (поскольку для них не удовлетворяются все уравнения поля); в термодинамическом же условии минимальности свободной энергии сравниваются друг с другом лишь различные физически возможные состояния.

Задача о нахождении минимума интеграла (18.1) при дополнительных условиях (18.2) и (18.3) решается методом множителей Лагранжа. Следуя этому методу, умножим вариацию условия (18.2) на некоторую, пока неопределенную функцию координат (обозначим ее через $-\varphi/4\pi$), а вариацию условия (18.3) — на неопределенный постоянный множитель (обозначим его как $\varphi_0/4\pi$), после чего приравниваем нулю сумму вариаций:

$$\int \delta F\, dV - \frac{1}{4\pi}\int \varphi \operatorname{div} \delta\mathbf{D}\, dV + \frac{\varphi_0}{4\pi}\oint \delta\mathbf{D}\, d\mathbf{f} = 0.$$

В первом члене пишем [1])

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}}\right)_{T,\rho} \delta\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\delta\mathbf{D},$$

а второй преобразуем по частям:

$$\int \varphi \operatorname{div} \delta\mathbf{D}\, dV = \oint \varphi\delta\mathbf{D}\, d\mathbf{f} - \int \delta\mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi\, dV.$$

В результате получаем

$$\int (\mathbf{E} + \operatorname{grad} \varphi)\, \delta\mathbf{D}\, dV + \oint (\varphi_0 - \varphi)\, \delta\mathbf{D}\, d\mathbf{f} = 0.$$

Отсюда делаем вывод, что во всем объеме должно быть $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ (и потому $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$), а на поверхности проводника $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$. Это — правильные уравнения для напряженности поля, причем лагранжев множитель φ оказывается его потенциалом.

[1]) Свободная энергия имеет минимум при заданной температуре. Варьирование должно производиться по двум независимым величинам: $\mathbf{D}$ и ρ. Нас интересует здесь лишь результат варьирования по $\mathbf{D}$. Варьирование же интеграла (18.1) по плотности (при дополнительном условии постоянства полной массы тела) дает одно из обычных условий теплового равновесия — постоянство химического потенциала ζ.

Аналогичным образом можно показать, что уравнения для электрической индукции получаются из условия максимальности интеграла

$$\widetilde{\mathscr{F}} = \int \widetilde{F}(T, \rho, \mathbf{E})\, dV,$$

в котором варьируется функция $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ при дополнительных условиях, что $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, а $\varphi = \text{const}$ на поверхности проводника[1]).

Действительно, имеем

$$\delta\widetilde{\mathscr{F}} = \int \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\mathbf{E}}\delta\mathbf{E}\, dV = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{D}\nabla\delta\varphi\, dV = \\ = \frac{1}{4\pi}\oint \delta\varphi\mathbf{D}\, d\mathbf{f} - \frac{1}{4\pi}\int \delta\varphi \operatorname{div}\mathbf{D}\, dV = 0.$$

Первый интеграл равен нулю, поскольку $\delta\varphi = 0$ на поверхности, а из второго находим, ввиду произвольности $\delta\varphi$ в объеме, искомое уравнение $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$.

Если тело не находится во внешнем электрическом поле (в частности, нет заряженных проводников), то может оказаться возможным формулировать условие термодинамического равновесия как условие абсолютного (безусловного) минимума полной свободной энергии (18.1). Это условие сводится к условию минимальности плотности свободной энергии F как функции независимой переменной $\mathbf{D}$:

$$\frac{\partial F}{\partial\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{E}}{4\pi} = 0,$$

т. е. напряженность поля должна быть равна нулю во всем пространстве. Если при этом может быть указано распределение

---

[1]) То обстоятельство, что термодинамический потенциал $\widetilde{\mathscr{F}}$ имеет именно максимум по отношению к переменной $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{D}$), а не минимум как $\mathscr{F}$, имеет общий характер и объясняется следующими рассуждениями. Пусть равновесное значение некоторой переменной x (пусть это будет $x = 0$) определяется условием термодинамического равновесия. Тогда свободная энергия $\mathscr{F}$ имеет при заданных T и V минимум при $x = 0$. Другими словами, в точке $x = 0$ имеем $X \equiv (\partial\mathscr{F}/\partial x)_{V,T} = 0$, а вблизи этой точки

$$X = \alpha x, \quad \mathscr{F} = \mathscr{F}_0 + \frac{\alpha}{2}x^2, \quad \alpha > 0.$$

Если теперь ввести термодинамический потенциал $\widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} - xX$, то

$$\widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}_0 - \frac{\alpha}{2}x^2 = \mathscr{F}_0 - \frac{1}{2\alpha}X^2,$$

т. е. $\widetilde{\mathscr{F}}$ имеет в равновесии максимум по x или X. По отношению же к какимлибо другим переменным y, не зависящим от x, минимум имеют как $\mathscr{F}$, так и $\widetilde{\mathscr{F}}$.

индукции, удовлетворяющее условию $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, то тем самым найденное состояние будет соответствовать термодинамическому равновесию[1]).

Приравнивая нулю первую вариацию свободной энергии, мы находим только необходимые, но не достаточные условия ее минимальности. Выяснение же достаточных условий требует исследования второй вариации. Эти условия имеют вид определенных неравенств (так называемые *термодинамические неравенства*) и являются, как известно, условиями, обеспечивающими устойчивость состояния тела (см. V, § 21).

При $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ все соотношения очень упрощаются и интересующее нас термодинамическое неравенство (связанное с диэлектрическими свойствами тела) становится очевидным. Полная свободная энергия есть

$$\mathscr{F}_0 + \int \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\, dV.$$

Ясно, что она может иметь минимум только, если $\varepsilon > 0$; в противном случае можно было бы неограниченно уменьшать интеграл, давая индукции $\mathbf{D}$ сколь угодно большие значения. Таким образом, в этом случае мы по существу не узнаем ничего нового, так как мы уже знаем, что диэлектрическая проницаемость должна быть в действительности не только положительной, но и больше единицы (см. § 14).

В общем же случае произвольной связи между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ необходимо рассмотреть вторую вариацию интеграла (18.1), причем варьировать надо одновременно $\mathbf{D}$ и ρ (оставляя постоянной лишь температуру). В изотропном теле $F(T, \rho, \mathbf{D})$ зависит только от абсолютной величины вектора $\mathbf{D}$, варьируются же три его компоненты независимо. Выберем направление неварьированного вектора $\mathbf{D}$ в качестве оси z. Тогда изменение абсолютной величины вектора $\mathbf{D}$ выразится через изменения его компонент, с точностью до членов второго порядка, следующим соотношением:

$$\delta D = \delta D_z + \frac{1}{2D}\left[(\delta D_x)^2 + (\delta D_y)^2\right].$$

Первая и вторая вариации интеграла (18.1) вместе содержатся в выражении

$$\int \left\{ \frac{\partial F}{\partial D}\delta D + \frac{\partial F}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}\delta D^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D\partial\rho}\delta D\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}\delta\rho^2 \right\} dV.$$

---

[1]) Здесь имеются в виду тела, в которых может быть $\mathbf{D} \neq 0$ при $\mathbf{E} = 0$ (см. следующий параграф). В противном случае мы имели бы просто тривиальный результат $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$ во всем пространстве.

Подставив сюда δD и собрав члены второго порядка, найдем вторую вариацию:

$$\int \frac{1}{2D}\frac{\partial F}{\partial D}(\delta D_x^2 + \delta D_y^2)\,dV + \\ + \int \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}\delta D_z^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D \delta\rho}\delta D_z \delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}\delta\rho^2 \right\} dV. \quad (18.4)$$

Оба написанных здесь члена независимы друг от друга. Первый из них положителен, если $\dfrac{\mathbf{1}}{D}\dfrac{\partial F}{\partial D} > 0$. Но $\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} = \dfrac{\mathbf{E}}{4\pi}$, так что производная $\partial F/\partial D$ положительна или отрицательна, смотря по тому, направлен ли вектор $\mathbf{D}$ по или против вектора $\mathbf{E}$. Таким образом, векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ должны быть одинаково направлены.

Условия положительности второго члена в (18.4) заключены в неравенствах

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} > 0, \quad (18.5)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial D}\right)^2 > 0. \quad (18.6)$$

Поскольку $\partial F/\partial\rho = \zeta$, $\partial F/\partial D = E/(4\pi)$, то первое из них дает

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)_{D,T} > 0, \quad (18.7)$$

а второе можно переписать в виде якобиана:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial F}{\partial D}, \dfrac{\partial F}{\partial \rho}\right)}{\partial(D,\rho)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\rho)} > 0.$$

Переходя от переменных D, ρ к переменным D, ζ, имеем

$$\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\rho)} = \frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\zeta)}\frac{\partial(D,\zeta)}{\partial(D,\rho)} = \left(\frac{\partial E}{\partial D}\right)_\zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)_D > 0;$$

ввиду (18.7) это неравенство равносильно условию

$$\left(\frac{\partial E}{\partial D}\right)_{\zeta,T} > 0. \quad (18.8)$$

Таким образом, мы нашли искомые термодинамические неравенства. В отсутствие поля неравенство (18.7) переходит в обычное условие положительности изотермической сжимаемости:

$(\partial P/\partial\rho)_T > 0$[1]). Неравенство же (18.8) дает $\varepsilon > 0$, так как при $E \to 0$ индукция $D \to \varepsilon E$.

Из двух неравенств (18.5), (18.6) второе является более сильным: оно может нарушаться раньше, чем нарушится первое, между тем как обратное невозможно. Равенство

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\,\partial D}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\rho)} = 0$$

соответствует *критическому состоянию* (см. V, § 83). Это условие удобнее записать в другом виде, умножив его на отличный от нуля множитель $\partial(D,\rho)/\partial(E,\rho)$:

$$\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(E,\rho)} = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)_{E,T} = 0. \qquad (18.9)$$

На плоскости ET критические состояния заполняют некоторую линию. Эта линия является особой для термодинамических функций тела, подобно тому как является особой критическая точка в отсутствие поля.

§ 19. Сегнетоэлектрики

Среди различных кристаллических модификаций одного и того же вещества могут быть как пиро-, так и непироэлектрические. Если переход между такими двумя модификациями совершается путем фазового перехода второго рода, то вблизи точки перехода вещество обнаруживает ряд своеобразных свойств, отличающих его от обычного пироэлектрика. Такие тела называют *сегнетоэлектрическими* (или *ферроэлектрическими*).

В обычном пироэлектрическом кристалле изменение направления спонтанной поляризации связано с существенной перестройкой кристаллической решетки. Даже если окончательный результат такой перестройки и был бы энергетически выгодным, его осуществление все равно может оказаться невозможным, так как это требовало бы преодоления очень высоких «энергетических барьеров».

---

[1]) Напомним, что в отсутствие поля ζ есть термодинамический потенциал единицы массы вещества и согласно обычным термодинамическим соотношениям его дифференциал

$$d\zeta = \frac{1}{\rho}\,dP - \frac{S}{\rho}\,dT,$$

так что $(\partial\zeta/\partial\rho)_T = (\partial P/\partial\rho)_T/\rho$. В изложенном выводе остается в стороне второе из обычных термодинамических неравенств — условие положительности теплоемкости.

В сегнетоэлектрическом же теле положение существенно меняется благодаря тому, что вблизи точки фазового перехода второго рода расположение атомов в кристаллической решетке пироэлектрической фазы мало отличается от их расположения в непироэлектрической решетке (в силу чего мала и спонтанная поляризация). По этой причине изменение направления спонтанной поляризации требует здесь лишь небольшой перестройки решетки и может сравнительно легко произойти.

Конкретный характер сегнетоэлектрических свойств тела существенно зависит от его кристаллографической симметрии. Направление спонтанной поляризации пироэлектрической фазы (мы будем говорить о нем как о сегнетоэлектрической оси) предопределяется уже структурой непироэлектрической фазы по другую сторону точки перехода. В некоторых случаях это предопределение однозначно в том смысле, что сегнетоэлектрическая ось возникает лишь в одном вполне определенном кристаллографическом направлении; направление спонтанной поляризации в этом случае предопределено с точностью до знака, так как в непироэлектрической фазе оба взаимно противоположных направления, параллельных сегнетоэлектрической оси, при этом должны быть эквивалентны (в противном случае и эта кристаллическая модификация допускала бы пироэлектричество). В других же случаях симметрия непироэлектрической фазы может оказаться такой, что допускает возникновение спонтанной поляризации в нескольких кристаллографически эквивалентных направлениях [1]). Возникновение поляризации всегда связано с понижением симметрии кристалла. Поэтому можно говорить (в соответствии с терминологией, введенной в V, § 142) о непироэлектрической фазе как о симметричной, а о пироэлектрической — как о несимметричной.

Покажем, каким образом строится теория сегнетоэлектричества в рамках общей теории фазовых переходов второго рода Ландау (такая теория была впервые построена *В.Л. Гинзбургом*, 1945) [2]).

---

[1]) Пример первого типа представляет сегнетова соль, непироэлектрическая фаза которой обладает ромбической симметрией. Сегнетоэлектрическая ось возникает в ней во вполне определенном кристаллографическом направлении (одна из осей 2-го порядка), причем решетка становится моноклинной.

Пример второго рода представляет титанит бария. Его непироэлектрическая модификация имеет кубическую решетку, а сегнетоэлектрической может стать любая из трех кубических осей. После того, как в точке перехода возникает спонтанная поляризация, эти три направления, разумеется, перестают быть эквивалентными: осью четвертого порядка остается лишь сегнетоэлектрическая ось и решетка становится тетрагональной.

[2]) Теория Ландау заведомо становится неприменимой в достаточной близости к точке перехода. Вопрос о том, когда это наступает, в случае сегне-

Примем вектор диэлектрической поляризации вещества $\mathbf{P}$ в качестве параметра порядка, величина которого определяет степень отклонения структуры кристаллической решетки несимметричной фазы от симметричной. Это значит, что $\mathbf{P}$ будет рассматриваться как независимая термодинамическая переменная, фактическое значение которой (как функции температуры, поля и т. п.) определяется затем условием теплового равновесия — минимальностью термодинамического потенциала.

Рассмотрим сначала случай однозначного расположения сегнетоэлектрической оси, которую примем за ось z. Диэлектрические свойства кристалла в направлениях осей x и y при этом не обнаруживают никаких аномалий, а для исследования свойств вдоль оси z достаточно рассмотреть в термодинамическом потенциале только члены, содержащие P_z. Вблизи точки перехода параметр порядка P_z мал и термодинамический потенциал Φ может быть разложен по его степеням. Ввиду эквивалентности обоих направлений оси z, разложение не может зависеть от знака P_z, т. е. содержит только четные его степени. С точностью до членов четвертой степени:

$$\Phi = \Phi_0 + AP_z^2 + BP_z^4. \tag{19.1}$$

В симметричной фазе $A > 0$ и минимуму термодинамического потенциала отвечает $P_z = 0$. Для того чтобы могла появиться спонтанная поляризация, коэффициент A должен стать отрицательным; в точке фазового перехода, следовательно, он обращается в нуль. В теории Ландау принимается, что функция $A(T)$ разложима по целым степеням $T - T_c$, где T_c — температура точки перехода; в окрестности этой точки полагаем $A = a(T - T_c)$, где a — постоянная (не зависящая от температуры) величина; для определенности будем считать, что $a > 0$, так что несимметричной фазе отвечают температуры $T < T_c$. Условие устойчивости состояния в самой точке $T = T_c$ требует положительности коэффициента B в этой точке, а потому и везде в ее окрестности; ниже под B будет пониматься его значение $B(T_c)$.

Если электрическое поле в теле отлично от нуля, в термодинамическом потенциале появляются дополнительные члены. Для их нахождения исходим из соотношения

$$4\pi \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \mathbf{E}} = -\mathbf{D} = -\mathbf{E} - 4\pi \mathbf{P}. \tag{19.2}$$

Интегрируя его при заданном значении независимой перемен-

тоэлектриков требует конкретного анализа экспериментальных данных и выходит за рамки этой книги. Отметим, что фактически многие из сегнетоэлектрических переходов фактически являются не переходами второго рода, а переходами первого рода, близкими ко второму. Это, по-видимому, связано с флуктуационным эффектом, упомянутым в конце V, § 146.

ной $\mathbf{P}$ (и учитывая, что при $\mathbf{E} = 0$ потенциалы Φ и $\widetilde{\Phi}$ совпадают), находим

$$\widetilde{\Phi}(\mathbf{P}, \mathbf{E}) = \Phi(\mathbf{P}, 0) - \mathbf{E}\mathbf{P} - \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}.$$

Рассматривая электрическое поле, направленное вдоль оси z, и взяв $\Phi(\mathbf{P}, 0)$ из (19.1), имеем

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 + a(T - T_c)P_z^2 + BP_z^4 - E_z P_z - \frac{E_z^2}{8\pi}. \tag{19.3}$$

Наличие члена $-E_z P_z$ приводит к тому, что уже в сколь угодно слабом поле E_z параметр порядка P_z становится отличным от нуля во всей области температур; поле поляризует непироэлектрическую фазу, тем самым понижая ее симметрию. Таким образом, качественная разница между обеими фазами исчезает; соответственно исчезает также и дискретная точка фазового перехода — переход «размывается» [1]).

Термодинамический потенциал $\widetilde{\Phi}$ должен иметь в равновесии минимум при заданном значении напряженности $\mathbf{E}$. Дифференцируя (19.3) при постоянном E_z, находим

$$2P_z a(T - T_c) + 4BP_z^3 = E_z. \tag{19.4}$$

Это — основное соотношение, определяющее связь между напряженностью поля и поляризацией сегнетоэлектрика [2]).

При $T > T_c$ (в непироэлектрической фазе) P_z обращается в нуль вместе с E_z. При возрастании E_z поляризация возрастает сначала по линейному закону $P_z = \varkappa E_z$ с восприимчивостью

$$\varkappa = \frac{1}{2a(T - T_c)}, \quad T > T_c, \tag{19.5}$$

неограниченно возрастающей при $T \to T_c$. Вместе с P_z линейно возрастает также и индукция $D_z = (1 + 4\pi\varkappa)E_z$. В окрестности точки перехода $\varkappa$ велико и, с той же точностью, имеем

$$\varepsilon \approx 4\pi\varkappa = \frac{2\pi}{a(T - T_c)}. \tag{19.6}$$

В достаточно же сильных полях поляризация возрастает по закону $P_z = \left(\frac{E_z}{4B}\right)^{1/3}$.

---

[1]) Ср. V, § 144. Последующее изложение в значительной степени повторяет сказанное там.

[2]) Выразив $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ из (19.4) и подставив в (19.3), мы получим потенциал $\widetilde{\Phi}(\mathbf{E})$ как функцию только от $\mathbf{E}$. Отметим, что в силу условия $\partial\widetilde{\Phi}(\mathbf{P}, \mathbf{E})/\partial\mathbf{P} = 0$, равенство $\mathbf{D} = -4\pi\partial\widetilde{\Phi}/\partial\mathbf{E}$ имеет место как для функции $\widetilde{\Phi}(\mathbf{E})$, так и для функции $\widetilde{\Phi}(\mathbf{P}, \mathbf{E})$ (дифференцируемой при постоянном $\mathbf{P}$).

При $T < T_c$ (пироэлектрическая фаза) значение $P_z = 0$ вообще не может соответствовать устойчивому состоянию. При $E_z = 0$ находим из (19.4) спонтанную поляризацию пироэлектрической фазы:

$$P_{z0} = \pm\sqrt{\frac{a(T_c - T)}{2B}}. \tag{19.7}$$

Диэлектрическую восприимчивость этой фазы можно определить как значение производной dP_z/dE_z при $E_z \to 0$. Из (19.4) имеем

$$\left[-2(T_c - T)a + 12BP_z^2\right]\frac{dP_z}{dE_z} = 1 \tag{19.8}$$

и, подставив сюда (19.7), получим

$$\varkappa = \left.\frac{dP_z}{dE_z}\right|_{E_z=0} = \frac{1}{4a(T_c - T)}, \quad T < T_c. \tag{19.9}$$

Обратим внимание на то, что эта величина в два раза меньше восприимчивости непироэлектрической фазы при том же значении $|T_c - T|$. В достаточно слабых полях поляризация $P_z = P_{z0} + \varkappa E_z$, индукция $D_z = D_{z0} + \varepsilon E_z$, где $D_{z0} = 4\pi P_{z0}$, а диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon \approx 4\pi\varkappa = \frac{\pi}{a(T_c - T)}. \tag{19.10}$$

На рис. 14 изображен график функции $P_z(E_z)$, определяемой уравнением (19.4) (при $T < T_c$). Прежде всего отметим, что участок кривой cc' (изображенный штриховой линией) вообще не соответствует устойчивым состояниям; действительно, из равенства (19.8), написанного в виде

$$\frac{dP_z}{dE_z}\left(\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial P_z^2}\right)_{E_z} = 1,$$

видно, что при $dP_z/dE_z < 0$ будет и $\partial^2\widetilde{\Phi}/\partial P_z^2 < 0$, т. е. термодинамический потенциал $\widetilde{\Phi}$ имеет максимум, а не минимум. Ординаты точек c и c' определяются равенством $dE_z/dP_z = 0$, и мы приходим к выводу, что возможные значения $|P_z|$ в пироэлектрической фазе ограничены снизу условием

Рис. 14

$$P_z^2 > \frac{(T_c - T)a}{6B}. \tag{19.11}$$

Если рассматривать состояния сегнетоэлектрика при заданном значении E_z, то в области между абсциссами точек c и c' все еще остается двузначность в возможном значении P_z, и возникает вопрос о физическом смысле обеих возможностей. Будем

при этом представлять себе сегнетоэлектрик как плоскопараллельную однородную пластинку (с сегнетоэлектрической осью, перпендикулярной к плоскости пластинки), находящуюся между обкладками конденсатора, поддерживаемыми при заданных потенциалах, т. е. создающими однородное поле с заданной напряженностью $E = E_z$.

При заданных потенциалах проводников условие устойчивости требует минимальности именно термодинамического потенциала $\widetilde{\Phi}$. В частности, при $E = 0$ имеются два состояния, отличающиеся знаком P_z (точки a и a' на кривой), но отвечающие одному и тому же значению $\widetilde{\Phi}$ $(= \Phi)$. Эти два состояния, следовательно, в равной степени устойчивы, т. е. представляют собой две фазы, которые могут существовать одновременно, соприкасаясь друг с другом.

Уже отсюда ясно, что участки ac и $a'c'$ на кривой соответствуют состояниям не абсолютно устойчивым, а лишь метастабильным. Не представляет труда убедиться и непосредственно в том, что значения $\widetilde{\Phi}$ на отрезках ac и $a'c'$ действительно больше, чем на ветвях $a'b'$ и ab при тех же значениях E_z. Ординаты точек a и a' даются формулой (19.7). Таким образом, область метастабильности лежит в интервале

$$\frac{(T_c - T)a}{6B} < P_z^2 < \frac{(T_c - T)a}{2B}. \tag{19.12}$$

Существование двух фаз с $\mathbf{E} = 0$ весьма существенно, так как приводит к возможности распадения сегнетоэлектрического тела на ряд отдельных областей (или *доменов*), отличающихся направлением поляризации. На поверхностях раздела между этими областями должны выполняться условия непрерывности нормальной компоненты $\mathbf{D}$ и касательной компоненты $\mathbf{E}$. Второе из них выполняется тождественно (поскольку вообще $\mathbf{E} = 0$). Из первого же следует, что границы между доменами должны быть параллельными оси z. Конкретные форма и размеры доменов определяются условием абсолютной минимальности полного термодинамического потенциала тела [1]).

[1]) Подчеркнем, что речь идет о полном термодинамическом равновесии. Оно может осуществляться у сегнетоэлектриков, но фактически никогда не осуществляется у обычных пироэлектриков в связи с упоминавшейся выше трудностью переориентации поляризации (а потому и образования доменов) в них. Вопрос о форме и размерах доменов будет рассмотрен в § 44 для (во многом аналогичного) случая ферромагнетиков. На специфических особенностях доменной структуры сегнетоэлектриков мы останавливаться не будем. Эти особенности обусловлены, прежде всего, жесткостью связи направления поляризации сегнетоэлектрика с определенными кристаллографическими осями, с большой диэлектрической восприимчивостью (по сравнению с магнитной восприимчивостью ферромагнетика) и с большей ролью явлений стрикции.

Если не интересоваться деталями этой структуры и рассматривать участки тела, большие по сравнению с размерами доменов, то можно ввести поляризацию $\overline{\mathbf{P}}$, усредненную по объему таких участков. Ее составляющая $\overline{P}_z$ может, очевидно, пробегать значения в интервале между ординатами точек a и a', т. е.

$$-\sqrt{\frac{(T_c - T)a}{2B}} < \overline{P}_z < \sqrt{\frac{(T_c - T)a}{2B}}. \tag{19.13}$$

Другими словами, если понимать на диаграмме рис. 14 под P_z усредненное в указанном смысле значение поляризации, то области доменной структуры будет соответствовать вертикальный отрезок aa', а изображенная жирной линией кривая $baa'b'$ будет относиться ко всем стабильным состояниям, пробегаемым телом.

Перейдем к сегнетоэлектрикам, относящимся (в непироэлектрической фазе) к кубической системе [1]). Кубическая симметрия допускает два независимых инварианта четвертого порядка, составленных из компонент вектора $\mathbf{P}$; в качестве них выберем

$$(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)^2 \quad \text{и} \quad (P_x^2 P_y^2 + P_x^2 P_z^2 + P_y^2 P_z^2).$$

Тогда разложение термодинамического потенциала вблизи точки перехода имеет (при $\mathbf{E} = 0$) вид

$$\Phi = \Phi_0 + a(T - T_c)(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \\ + B(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)^2 + C(P_x^2 P_y^2 + P_x^2 P_z^2 + P_y^2 P_z^2), \tag{19.14}$$

где a, B, C — постоянные, а оси x, y, z направлены вдоль трех осей симметрии четвертого порядка.

Совокупность членов четвертого порядка в (19.14) должна представлять собой существенно положительное выражение. Для этого должно быть

$$B > 0, \quad 3B + C > 0. \tag{19.15}$$

Спонтанная поляризация сегнетоэлектрика (при $\mathbf{E} = 0$) определяется условием абсолютного минимума потенциала Φ как функции от $\mathbf{P}$. В частности, поскольку член второго порядка и первый из членов четвертого порядка не зависят от направления $\mathbf{P}$, то направление спонтанной поляризации определяется

[1]) Имеются в виду кристаллические классы $\boldsymbol{T_h}$ и $\boldsymbol{O_h}$. Кубические классы $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{T_d}$ допускают также и инвариант третьего порядка $P_x P_y P_z$; в таких условиях состояние с $\mathbf{P} = 0$ заведомо не могло бы удовлетворять условию устойчивости (минимуму Φ), так что фазовый переход второго рода невозможен. Симметрия же класса $\boldsymbol{O}$ (а также класса $\boldsymbol{T}$) допускает линейный по производным инвариант $\mathbf{P}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{P}$; это приводит к появлению несоразмерной структуры (ср. § 52).

условием минимальности последнего члена в (19.14) при заданной абсолютной величине P. При этом возможны два случая. Если $C > 0$, то наименьшему значению этого члена отвечают направления $\mathbf{P}$ вдоль осей x, y, z, т. е. вдоль какого-либо из трех ребер куба. Если же $C < 0$, то наименьшему значению отвечают направления вдоль пространственных диагоналей куба, т. е. когда $P_x^2 = P_y^2 = P_z^2 = P^2/3$. В первом случае пироэлектрическая фаза сегнетоэлектрика обладает тетрагональной, а во втором — ромбоэдрической симметрией.

Рассмотрим более подробно, например, первый случай $(C>0)$ и примем направление спонтанной поляризации ниже точки перехода за ось z. Величина P_0 спонтанной поляризации определяется (при $\mathbf{E} = 0$) минимумом выражения

$$-a(T_c - T)P^2 + BP^4,$$

откуда

$$P_0^2 = \frac{a(T_c - T)}{2B}. \tag{19.16}$$

Для определения зависимости между поляризацией и полем $\mathbf{E}$ надо добавить к (19.14) член $-\mathbf{PE}$ (перейдя тем самым к потенциалу $\widetilde{\Phi}$) и приравнять нулю производную $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\mathbf{P}$.

Для слабого поля $\mathbf{E}$ малы также и P_x, P_y, $P_z - P_0$. Опустив в уравнениях члены второго и более высоких порядков малости и подставив в них $P_{0z} = P_0$ из (19.16), получим для продольной поляризации:

$$P_z - P_0 = \frac{1}{4a(T_c - T)} E_z, \tag{19.17}$$

и для поперечной:

$$P_x = \frac{B}{aC(T_c - T)} E_x \tag{19.18}$$

(и аналогично для P_y). Выше точки перехода, в непироэлектрической фазе, диэлектрическая восприимчивость кубического сегнетоэлектрика во всех направлениях одинакова:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2a(T - T_c)} \mathbf{E}. \tag{19.19}$$

Остановимся кратко на упругих свойствах сегнетоэлектриков.

В зависимости от своего кристаллического класса непироэлектрическая фаза может как обладать, так и не обладать пьезоэлектрическими свойствами [1]). Рассмотрим сначала первый

[1]) Непироэлектрическая фаза сегнетоэлектрика, обладающая пьезоэлектрическими свойствами, может относиться к восьми из перечисленных на с. 112 десяти классов:

$$\boldsymbol{D}_2,\ \boldsymbol{D}_4,\ \boldsymbol{D}_{2d},\ \boldsymbol{S}_4,\ \boldsymbol{D}_3,\ \boldsymbol{D}_6,\ \boldsymbol{C}_{3h},\ \boldsymbol{D}_{3h}.$$

случай, причем будем считать, что симметрия допускает пьезоэлектрическую (линейную) связь между деформациями и поляризацией вдоль сегнетоэлектрической оси (ось z). Сюда относятся кристаллические классы $\boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{D}_{2d}$, $\boldsymbol{S}_4$; во всех этих случаях поляризация P_z входит в пьезоэлектрическую часть термодинамического потенциала в виде члена

$$-\gamma_{z,xy} P_z \sigma_{xy}.$$

В упругую же энергию кристаллов указанной симметрии компонента σ_{xy} тензора напряжений входит в виде члена

$$-\mu_{xy\,xy} \sigma_{xy}^2.$$

Таким образом, для термодинамического потенциала вблизи точки перехода имеем (для краткости обозначим $\gamma_{z,xy} = \gamma$, $\mu_{xy\,xy} = \mu$) [1])

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 + a(T - T_c)P_z^2 + BP_z^4 - \gamma P_z \sigma_{xy} - \mu \sigma_{xy}^2 - E_z P_z - \frac{E_z^2}{8\pi}. \quad (19.20)$$

Членами с остальными компонентами $\mathbf{P}$ и σ_{ik} мы не интересуемся, так как они не приводят к аномалиям пьезоэлектрических свойств вблизи точки перехода.

Приравняв нулю производную $\partial\widetilde{\Phi}/\partial P_z$ при $E_z = \text{const}$, получим уравнение

$$E_z = 2a(T - T_c)P_z + 4BP_z^3 - \gamma \sigma_{xy}. \quad (19.21)$$

Компоненты же тензора деформации получаются дифференцированием термодинамического потенциала (19.20) по соответствующим компонентам σ_{ik} (см. (17.4)) [2]):

$$u_{xy} = \frac{1}{2}\gamma P_z + \mu \sigma_{xy}. \quad (19.22)$$

В непироэлектрической фазе при слабом поле $\mathbf{E}$ можно пренебречь в (19.21) членом с P_z^3:

$$E_z = 2a(T - T_c)P_z - \gamma \sigma_{xy}.$$

Подставив отсюда P_z в (19.22), получим

$$u_{xy} = \frac{\gamma}{4a(T - T_c)} E_z + \left[\mu + \frac{\gamma^2}{4a(T - T_c)}\right] \sigma_{xy}.$$

[1]) Ввиду другого характера разложения, определения тензоров $\gamma_{i,kl}$ и μ_{iklm} здесь не совпадают с обозначенными теми же буквами тензорами, введенными в § 17, но их свойства симметрии, разумеется, одинаковы.

[2]) О дифференцировании по компонентам тензора — см. примеч. на с. 113.

Коэффициент при σ_{xy} в этой формуле играет роль упругого модуля для деформаций, при которых поддерживается постоянной напряженность поля E_z, в то время как в формуле (19.22) μ есть упругий модуль для деформации при постоянной поляризации P_z. Поэтому можно написать

$$\mu^{(E)} = \mu^{(P)} + \frac{\gamma^2}{4a(T - T_c)}, \tag{19.23}$$

где верхние индексы указывают характер деформации. Мы видим, что оба эти коэффициента ведут себя различным образом: в то время как $\mu^{(P)}$ есть постоянная конечная величина, модуль $\mu^{(E)}$ неограниченно растет при приближении к точке перехода [1]).

В пироэлектрической фазе формула (19.22) показывает, что спонтанная поляризация приводит к определенной деформации тела. В отсутствие внутренних напряжений и при $\mathbf{E} = 0$ деформация u_{xy} пропорциональна P_{z0}, т. е. меняется с температурой как $\sqrt{T_c - T}$.

Если симметрия (например, кубическая) непироэлектрической фазы сегнетоэлектрика не допускает линейного пьезоэффекта, то первые неисчезающие члены разложения термодинамического потенциала по степеням σ_{ik} и $\mathbf{P}$ квадратичны по компонентам $\mathbf{P}$, т. е. имеют вид

$$-\gamma_{iklm} P_i P_k \sigma_{lm}, \tag{19.24}$$

где γ_{iklm} — тензор четвертого ранга, симметричный по парам индексов ik и lm. В таких случаях деформация, возникающая в пироэлектрической фазе под влиянием спонтанной поляризации, представляет собой квадратичный (по $\mathbf{P}_0$) эффект, соответственно чему меняется с температурой как $T_c - T$.

Может возникнуть сомнение в законности использования выражения (19.24) в термодинамическом потенциале, поскольку в § 17 было указано, что последним можно пользоваться лишь при условии пренебрежения квадратичными эффектами. Сегнетоэлектрики, однако, являются в этом смысле исключением ввиду малости (вблизи точки перехода) напряженности $\mathbf{E}$ по сравнению с поляризацией $\mathbf{P}$ (или индукцией $\mathbf{D}$) — как следствие неограниченного возрастания диэлектрической восприимчивости. Введение термодинамического потенциала было связано с пренебрежением величинами порядка EDu_{ik} (или, что то же, $ED\sigma_{ik}$); выражение же (19.24) — порядка $D^2\sigma_{ik}$.

---

[1]) Постоянной величиной является также и модуль $\mu^{(D)} = \mu + \frac{\gamma^2}{8\pi}$, определяющий деформацию при постоянной индукции D_z.

§ 20. Несобственные сегнетоэлектрики

Изложенная в предыдущем параграфе теория сегнетоэлектричества основана на отождествлении вектора поляризации кристалла с параметром порядка, определяющим изменение симметрии кристалла при фазовом переходе. Это предположение, однако, не всегда допустимо; может оказаться, что факт возникновения спонтанной поляризации сам по себе не определяет полностью характер изменения кристаллической структуры.

Напомним (см. V, § 145), что параметр порядка в фазовом переходе второго рода является величиной или совокупностью величин, преобразующихся согласно какому-либо из неприводимых (неединичному) представлений группы симметрии исходной («симметричной») фазы. Именно трансформационные свойства параметра порядка определяют характер изменения (понижения) симметрии при фазовом переходе. Конкретный же физический смысл его несуществен; в качестве параметра порядка можно выбрать различные физические величины, если только они связаны друг с другом линейными соотношениями и потому одинаковы по своим трансформационным свойствам.

Выбор вектора **P** в качестве параметра порядка равносилен предположению, что последний преобразуется по тому же представлению, что и компоненты вектора (полярного). Если фазовый переход совершается без изменения элементарной ячейки решетки (точнее — лишь с ее деформацией), то речь идет о неприводимых представлениях точечных групп симметрии — кристаллических классов. В кристаллических классах, относящихся к категории двухосных (§ 13), каждая компонента вектора преобразуется по одному из одномерных представлений. То же самое относится и к компоненте вектора вдоль главной (3-го, 4-го или 6-го порядков) оси симметрии одноосных кристаллов. Для всех этих представлений параметром порядка может служить соответствующая компонента вектора **P**, и к ним относится теория, основанная на термодинамическом потенциале (19.1). Компоненты **P** в плоскости, перпендикулярной главной оси симметрии одноосного кристалла, преобразуются по двумерному неприводимому представлению и для этого представления могут служить параметром порядка. Наконец, в кристаллах кубической симметрии все три компоненты вектора преобразуются по одному трехмерному представлению; к этому случаю относится теория сегнетоэлектричества, основанная на термодинамическом потенциале (19.14).

Но существуют также и такие сегнетоэлектрические переходы, в которых параметр порядка преобразуется по неприводимому представлению «симметричной» фазы, не отвечающему компонентам вектора. В таких случаях параметром порядка

является не поляризация, а величина другой физической природы; спонтанная же поляризация возникает в известном смысле как вторичный эффект (предполагается, конечно, что симметрия «несимметричной» фазы допускает пироэлектричество). Такие сегнетоэлектрики называют *несобственными*; они существенно отличаются по характеру диэлектрических аномалий от обычных сегнетоэлектриков [1]). Сюда относятся все сегнетоэлектрические переходы с изменением элементарной ячейки, т. е. с изменением трансляционной симметрии решетки (соответствующие неприводимые представления заведомо не могут осуществляться векторными величинами, инвариантными относительно трансляций) [2]), но это могут быть и переходы без изменения трансляционной симметрии (параметр порядка преобразуется по неприводимому представлению точечной группы, не отвечающему компонентам вектора).

В обычном сегнетоэлектрическом переходе, когда изменение симметрии полностью определяется вектором поляризации, переход происходит в высшую (из числа допускающих пироэлектричество) подгруппу пространственной группы исходной (непироэлектрической) фазы. При несобственном же сегнетоэлектрическом переходе пироэлектрическая фаза относится к подгруппе более низкой симметрии.

Конкретные термодинамические свойства несобственных сегнетоэлектриков могут быть многообразны в соответствии с многообразием трансформационных свойств величин, преобразующихся по различным неприводимым представлениям пространственных групп. Рассмотрим здесь (снова в рамках теории фазовых переходов Ландау) лишь один формальный пример с целью иллюстрации некоторых существенных принципиальных моментов.

Рассмотрим переход (без изменения элементарной ячейки) из непироэлектрического кристалла класса $\boldsymbol{C}_{3h}$ в класс $\boldsymbol{C}_1$, допускающий спонтанную поляризацию, причем параметр порядка двухкомпонентен (η_1, η_2) и преобразуется по неприводимому представлению E_u группы $\boldsymbol{C}_{3h}$; компоненты же P_x, P_y вектора поляризации (в плоскости, перпендикулярной оси C_3) преобразуются по представлению E_g.

Термодинамический потенциал $\widetilde{\Phi}$ вблизи точки перехода должен быть разложен по степеням параметра порядка η_1, η_2 и поляризации P_x, P_y. При этом для возникновения сегнетоэлектричества требуется существование смешанных инвариантов, состав-

[1]) Возможность существования таких сегнетоэлектриков была указана *В.Л. Инденбомом* (1960).

[2]) Таковы фактически все известные несобственные сегнетоэлектрики.

ленных из тех и других величин, причем линейно по вектору **P**. Таких инвариантов в данном случае существует два: вещественная и мнимая части произведения $(\eta_1 + i\eta_2)^2(P_x + iP_y)$. В результате приходим к разложению вида

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 + a(T - T_c)\eta^2 + B\eta^4 + \varkappa\mathbf{P}^2 + C_1\eta^2\left[P_x(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - 2P_y\gamma_1\gamma_2\right] + \\ + C_2\eta^2\left[P_y(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) + 2P_x\gamma_1\gamma_2\right] - \mathbf{EP} - \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} \quad (20.1)$$

($\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2$, $\gamma_i = \eta_i/\eta$; векторы **E**, **P** — в плоскости xy).

Параметр порядка и поляризация определяются условием минимальности $\widetilde{\Phi}$ (при $\mathbf{E} = \mathrm{const}$). Отметим лишь характерные результаты, очевидные и без фактического проведения соответствующих вычислений. Параметр порядка в несимметричной фазе оказывается, как и при всяком переходе второго рода (в теории Ландау), пропорциональным $(T_c - T)^{1/2}$. Поляризация же возникает как эффект второго порядка по η и потому оказывается пропорциональной $T_c - T$. Диэлектрическая восприимчивость не стремится при $T \to T_c$ к бесконечности (как в обычных сегнетоэлектриках), поскольку она не определяется теперь стремящимся к нулю коэффициентом при η^2. Она испытывает, однако, в точке перехода конечный скачок. Это связано с тем, что в симметричной фазе параметр порядка $\eta \equiv 0$ и не меняется под действием поля **E**, а в несимметричной — меняется, что и дает дополнительный вклад в восприимчивость.

Отметим, что несобственный сегнетоэлектрический переход возможен только при многокомпонентных параметрах порядка. Действительно, при однокомпонентном параметре η смешанный инвариант, линейный по **P**, мог бы быть лишь ηP_z, где P_z — одна из компонент вектора **P** (поскольку для одномерного представления квадрат η^2 уже сам является инвариантом). Но это означало бы, что η и P_z совпадают по своим трансформационным свойствам, так что P_z и само могло бы быть выбрано в качестве параметра порядка.

ГЛАВА III

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

§ 21. Плотность тока и проводимость

От изучения электрических полей, создаваемых неподвижными зарядами, мы перейдем теперь к рассмотрению стационарного движения зарядов в проводниках (постоянный электрический ток).

Будем обозначать среднюю плотность потока зарядов буквой $\mathbf{j}$; ее называют *плотностью электрического тока* [1]). В постоянном токе пространственное распределение $\mathbf{j}$ не зависит от времени и подчиняется уравнению

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \tag{21.1}$$

выражающему собой постоянство полного среднего заряда, заключенного в любой части объема проводника.

Электрическое поле, существующее внутри проводника, по которому течет постоянный ток, тоже постоянно, а потому удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{21.2}$$

т. е. имеет потенциал.

К уравнениям (21.1) и (21.2) должно еще быть присоединено уравнение, связывающее между собой величины $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$. Эта связь зависит от свойств вещества проводника. В огромном большинстве случаев ее можно считать линейной (*закон Ома*).

Если проводник однороден и изотропен, то линейная зависимость сводится к простой пропорциональности

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \tag{21.3}$$

Коэффициент σ зависит от рода и состояния проводника; его называют *коэффициентом электропроводности*, или просто *проводимостью* тела.

В однородном проводнике $\sigma = \text{const}$ и подстановка (21.3) в (21.1) дает $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Поэтому в этом случае потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

---

[1]) В этой главе мы не рассматриваем создаваемого током магнитного поля и соответственно не учитываем обратного влияния этого поля на ток. Учет этого влияния потребует уточнения определения плотности тока, что будет сделано в § 30.

На границе раздела двух проводящих сред нормальная компонента плотности тока должна, очевидно, быть непрерывной. Кроме того, согласно общему условию непрерывности тангенциальной компоненты напряженности (следующему из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, ср. (1.7) и (6.9)) должно быть непрерывно отношение $\mathbf{j}/\sigma$. Таким образом, граничные условия для плотности тока имеют следующий вид:

$$j_{n1} = j_{n2}, \quad \frac{\mathbf{j}_{t1}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{j}_{t2}}{\sigma_2} \tag{21.4}$$

или для напряженности поля

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}, \quad \mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}. \tag{21.5}$$

На границе же проводника с непроводящей средой имеем просто $j_n = 0$ или $E_n = 0$ [1]).

Электрическое поле, поддерживающее ток, производит над перемещающимися в проводнике заряженными частицами (носителями тока) механическую работу; работа, производимая в 1 с в единице объема, равна, очевидно, произведению $\mathbf{jE}$. Эта работа диссипируется в веществе проводника, переходя в тепло. Таким образом, количество тепла, выделяющегося в 1 с в 1 см^3 однородного проводника, равно

$$\mathbf{jE} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} \tag{21.6}$$

(*закон Джоуля–Ленца*).

Выделение тепла приводит к возрастанию энтропии тела. При выделении тепла $dQ = \mathbf{jE}\,dV$ энтропия данного элемента объема увеличивается на dQ/T. Поэтому скорость изменения полной энтропии тела равна

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{jE}}{T}\,dV. \tag{21.7}$$

В силу закона возрастания энтропии эта производная должна быть положительной. Подставив в нее $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, мы видим, что из этого требования можно сделать заключение о положительности проводимости σ.

[1]) Обратим внимание на то, что уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div}(\sigma\mathbf{E}) = 0$ и граничные условия (21.5) к ним обнаруживают формальную аналогию с уравнениями электростатического поля в диэлектриках, отличаясь от них лишь заменой ε на σ. Это обстоятельство позволяет находить решения задач о распределении тока в неограниченной проводящей среде непосредственно по решениям аналогичных электростатических задач. При наличии границ проводника с непроводящей средой эта аналогия не приводит к цели, так как в электростатике нет сред с $\varepsilon = 0$.

В анизотропном теле (монокристалле) направления векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, вообще говоря, не совпадают и линейная связь между ними выражается формулами вида

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \tag{21.8}$$

где величины σ_{ik} составляют симметричный (см. ниже) тензор второго ранга (*тензор проводимости*).

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Сама по себе симметрия кристалла могла бы допустить наличие свободного члена в линейной связи между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, т. е. формулу вида

$$j_i = \sigma_{ik} E_k + j_i^{(0)}$$

с постоянным вектором $\mathbf{j}^{(0)}$. Наличие такого члена означало бы «пироэлектричность» проводника — в отсутствие тока ($\mathbf{j} = 0$) в нем существовало бы отличное от нуля поле. В действительности, однако, это невозможно в силу закона возрастания энтропии: член $\mathbf{j}^{(0)}\mathbf{E}$ в подынтегральном выражении в (21.7) заведомо мог бы иметь оба знака, в результате чего $d\mathscr{S}/dt$ не могла бы быть существенно положительной величиной.

Подобно тому как в изотропной среде условие $d\mathscr{S}/dt > 0$ приводит к положительности σ, так в анизотропном теле из этого условия следует положительность главных значений тензора σ_{ik}.

Зависимость числа независимых компонент тензора от симметрии кристалла такая же, как у всякого симметричного тензора второго ранга (см. § 13): у двухосных кристаллов все три главных значения различны, у одноосных — два из них одинаковы, а у кубических — все три одинаковы, т. е. кубический кристалл в отношении своих свойств проводимости ведет себя как изотропное тело.

Симметричность тензора проводимости

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \tag{21.9}$$

является следствием *принципа симметрии кинетических коэффициентов*. Формулировка этого общего принципа, принадлежащего *Л. Онсагеру*, удобная для применения здесь и ниже (в § 26–28), заключается в следующем (ср. V, § 120).

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — некоторые величины, характеризующие состояние тела в каждой его точке. Наряду с ними вводим величины

$$X_a = -\frac{\partial S}{\partial x_a}, \tag{21.10}$$

где S — энтропия единицы объема тела, а производная берется при постоянной энергии этого объема. В состоянии, близком к равновесному, величины x_a близки к своим равновесным значениям, а величины X_a малы. При этом в теле будут происходить процессы, стремящиеся привести его в состояние равновесия. О скоростях изменения величин x_a при этих процессах

можно обычно утверждать, что они являются в каждой точке тела функциями только значений величин x_a (или X_a) в тех же точках. Разлагая эти функции в ряд по степеням X_a и ограничиваясь линейными членами в разложении, получим соотношения вида

$$\frac{\partial x_a}{\partial t} = -\sum_b \gamma_{ab} X_b. \tag{21.11}$$

Тогда можно утверждать, что коэффициенты γ_{ab} (*кинетические коэффициенты*) симметричны по индексам a и b [1]):

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \tag{21.12}$$

Для фактического использования этого принципа необходимо, выбрав тем или иным способом величины x_a (или прямо их производные $\dot{x}_a$), определить соответствующие X_a. Эта задача обычно может быть весьма просто решена с помощью формулы, определяющей скорость изменения со временем полной энтропии тела:

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = -\int \sum_a X_a \frac{\partial x_a}{\partial t}\, dV, \tag{21.13}$$

где интегрирование производится по всему объему тела.

В данном случае при прохождении тока через проводник для этой скорости мы имеем формулу (21.7). Сравнивая ее с (21.13), мы видим, что если в качестве величин $\dot{x}_a$ выбрать компоненты вектора плотности тока $\mathbf{j}$, то соответствующими величинами X_a будут компоненты вектора $-\mathbf{E}/T$. Сравнение же формул (21.8) и (21.11) показывает, что роль кинетических коэффициентов играют при этом умноженные на T компоненты тензора проводимости, симметрия которого следует, таким образом, непосредственно из общих соотношений (21.12).

Задачи

1. В проводящую среду погружена система электродов, поддерживаемых при постоянных потенциалах φ_a. С каждого из электродов стекает ток J_a. Определить полное джоулево тепло, выделяющееся в среде в 1 секунду.

Решение. Искомое тепло Q дается интегралом

$$Q = \int \mathbf{jE}\, dV = -\int \mathbf{j}\nabla\varphi\, dV = -\int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{j})\, dV,$$

взятым по объему среды. Преобразуем этот интеграл в интеграл по поверхности, учитывая, что на внешней границе среды $j_n = 0$, а на поверхностях электродов $\varphi = \text{const} \equiv \varphi_a$. В результате получим

$$Q = \sum_a \varphi_a J_a.$$

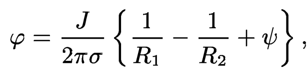
[1]) Подразумевается, что величины x_a и x_b ведут себя одинаковым образом по отношению к изменению знака времени.

2. Определить распределение потенциала в проводящей сфере, в которую ток J входит через один полюс и выходит через противоположный.

Р е ш е н и е. Вблизи полюсов O и O' (рис. 15) потенциал соответственно должен иметь вид

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma R_1} \quad \text{и} \quad \varphi = -\frac{J}{2\pi\sigma R_2},$$

где R_1, R_2 — расстояния до полюсов. Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа, а интегралы $-\sigma\int \nabla\varphi\, d\mathbf{f}$ по бесконечно малым полусферам вокруг точек O и O' равны $\pm J$. Ищем потенциал в произвольной точке P сферы в виде



$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \psi\right\},$$

где ψ есть решение уравнения Лапласа, не имеющее полюсов внутри сферы и на ее поверхности. Из симметрии очевидно, что ψ (как и φ) есть функция только сферических координат r и θ.

На поверхности сферы ($r = a$) должно быть $\partial\varphi/\partial r = 0$. Произведя дифференцирование, найдем отсюда для ψ следующее граничное условие:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad \text{при } r = a.$$

Рис. 15

Если $f(r, \theta)$ есть какое-либо решение уравнения Лапласа, то функция $\int\limits_0^r r^{-1} f(r,\theta)\, dr$ тоже есть решение [1]. Сравнивая с написанным граничным условием, легко прийти к заключению, что ему удовлетворяет решение

$$\psi = \frac{1}{2}\int\limits_0^r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{dr}{r}.$$

Подставив $R_{1,2} = (a^2 + r^2 \mp 2ar\cos\theta)^{1/2}$ и произведя интегрирование, получим окончательно

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2a}\left(\operatorname{Arsh}\frac{a + r\cos\theta}{r\sin\theta} - \operatorname{Arsh}\frac{a - r\cos\theta}{r\sin\theta}\right)\right\}$$

(φ отсчитывается от значения $\varphi = 0$ при $r = 0$).

3. Показать, что распределение тока в проводящей среде отвечает минимуму диссипации энергии.

Р е ш е н и е. Речь идет о минимуме интеграла

$$\int \mathbf{j}\,\mathbf{E}\, dV = \int \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}\, dV$$

[1] В этом легко убедиться как непосредственной проверкой, так и на основании того, что искомое решение $f(r,\theta)$ уравнения Лапласа, зависящее только от переменных r, θ, может быть представлено в виде

$$f = \sum_n c_n r^n P_n(\cos\theta),$$

где c_n — постоянные, а P_n — полиномы Лежандра.

при дополнительном условии $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, выражающем сохранение заряда. Варьируя по $\mathbf{j}$ интеграл

$$\int \left(\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - 2\varphi \operatorname{div}\mathbf{j}\right) dV$$

(2φ — лагранжев неопределенный множитель) и приравнивая вариацию нулю, получим уравнение $\mathbf{j} = -\sigma\nabla\varphi$ или

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0,$$

совпадающее с уравнениями (21.2) и (21.3).

§ 22. Эффект Холла

Если проводник находится во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$, то связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля по-прежнему дается соотношениями

$$j_i = \sigma_{ik}E_k,$$

но компоненты тензора проводимости σ_{ik} являются функциями $\mathbf{H}$ и, что особенно существенно, уже не симметричны по индексам ik. Симметрия этого тензора была доказана в § 21, исходя из принципа симметрии кинетических коэффициентов. Но в магнитном поле, как известно, формулировка этого принципа несколько меняется: одновременно с перестановкой индексов у кинетических коэффициентов должно быть изменено на обратное также и направление магнитного поля (см. V, § 120). Поэтому для компонент тензора $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ будем теперь иметь соотношения

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{22.1}$$

Величины же $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ и $\sigma_{ki}(\mathbf{H})$ отнюдь не равны друг другу.

Как и всякий общий тензор второго ранга, тензор σ_{ik} можно разделить на симметричную и антисимметричную части, которые мы обозначим соответственно как s_{ik} и a_{ik}:

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}. \tag{22.2}$$

По определению,

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(\mathbf{H}), \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ki}(\mathbf{H}), \tag{22.3}$$

а из (22.1) следует, что

$$\begin{gathered} s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(-\mathbf{H}) = s_{ik}(-\mathbf{H}), \\ a_{ik}(\mathbf{H}) = a_{ki}(-\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H}). \end{gathered} \tag{22.4}$$

Таким образом, компоненты тензора s_{ik} являются четными, а тензора a_{ik} — нечетными функциями магнитного поля.

Как известно, всякий антисимметричный тензор второго ранга a_{ik} эквивалентен (дуален) некоторому аксиальному вектору, с которым его компоненты связаны следующим образом:

$$a_{xy} = a_z, \quad a_{xz} = -a_y, \quad a_{yz} = a_x. \tag{22.5}$$

С помощью этого вектора компоненты произведения $a_{ik}E_k$ могут быть написаны в виде компонент векторного произведения $[\mathbf{Ea}]$:

$$j_i = \sigma_{ik}E_k = s_{ik}E_k + [\mathbf{Ea}]_i. \tag{22.6}$$

Джоулево тепло, выделяющееся при прохождении тока, определяется произведением $\mathbf{jE}$. В силу перпендикулярности векторов $[\mathbf{Ea}]$ и $\mathbf{E}$ их произведение обращается тождественно в нуль, так что

$$\mathbf{jE} = s_{ik}E_iE_k, \tag{22.7}$$

т. е. джоулево тепло определяется (при заданной напряженности $\mathbf{E}$) одной лишь симметричной частью тензора проводимости.

Если магнитное поле достаточно слабое, можно разложить компоненты тензора проводимости по его степеням. Ввиду нечетности функции $\mathbf{a}(\mathbf{H})$, в разложение этого вектора войдут только члены нечетных степеней. Первые члены разложения линейны по полю, т. е. имеют вид

$$a_i = \alpha_{ik}H_k. \tag{22.8}$$

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{H}$ оба аксиальны; поэтому постоянные α_{ik} составляют обычный (полярный) тензор. В разложение же четных функций $s_{ik}(\mathbf{H})$ входят только члены с четными степенями. Первый член разложения есть проводимость $\sigma_{ik}^{(0)}$ в отсутствие поля, а первые поправочные члены квадратичны по полю:

$$s_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \beta_{iklm}H_lH_m. \tag{22.9}$$

Тензор β_{iklm} симметричен как по индексам ik, так и по индексам lm.

Таким образом, основной, линейный по полю, эффект влияния магнитного поля заключен в члене $[\mathbf{Ea}]$ (*эффект Холла*). Он состоит, как мы видим, в появлении тока, перпендикулярного к электрическому полю и по величине пропорционального напряженности магнитного поля. Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае произвольной анизотропной среды холловский ток не является единственным, перпендикулярным к $\mathbf{E}$; такие составляющие может иметь и не холловский ток $s_{ik}E_k$.

Эффект Холла имеет и другой аспект, явствующий из обратных формул, выражающих поле $\mathbf{E}$ через плотность тока:

$$E_i = \sigma_{ik}^{-1}j_k.$$

Обратный тензор σ_{ik}^{-1}, как и прямой, можно разложить на симметричную часть (которую мы обозначим как ρ_{ik}) и антисимметричную, дуальную некоторому аксиальному вектору $\mathbf{b}$:

$$E_i = \rho_{ik} j_i + [\mathbf{jb}]_i. \tag{22.10}$$

Тензор ρ_{ik} и вектор $\mathbf{b}$ обладают такими же свойствами, как и s_{ik} и $\mathbf{a}$. В частности, в слабых полях вектор $\mathbf{b}$ линеен по магнитному полю. В формулах (22.10) эффект Холла представляется членом $[\mathbf{jb}]$, т. е. появлением электрического поля, перпендикулярного к току и по величине пропорционального магнитному полю (и току $\mathbf{j}$).

Все написанные выше соотношения очень упрощаются, если проводник изотропен. В этом случае из соображений симметрии очевидно, что вектор $\mathbf{b}$ (или $\mathbf{a}$) может быть направлен только вдоль магнитного поля. Единственными же отличными от нуля компонентами тензора ρ_{ik} являются $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ и ρ_{zz}, где ось z выбрана вдоль направления поля. Обозначив эти две величины через $\rho_\perp$ и $\rho_\|$ и выбрав плоскость xz проходящей через направление тока, будем иметь

$$E_x = \rho_\perp j_x, \quad E_y = -b j_x, \quad E_z = \rho_\| j_z. \tag{22.11}$$

Отсюда видно, что в изотропном проводнике холловское поле есть единственное электрическое поле, перпендикулярное одновременно току и магнитному полю.

В слабых магнитных полях связь векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{H}$ дается (в изотропном теле) просто соотношением

$$\mathbf{b} = -R\mathbf{H}. \tag{22.12}$$

Постоянная R (*постоянная Холла*) может быть как положительной, так и отрицательной. Что касается квадратичных по $\mathbf{H}$ членов в зависимости между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ (входящих через тензор ρ_{ik}), то их вид ясен из того, что единственными векторами, которые можно составить из $\mathbf{j}$ и $\mathbf{H}$ (линейными по $\mathbf{j}$ и квадратичными по $\mathbf{H}$) являются $\mathbf{H}(\mathbf{jH})$ и $\mathbf{j}H^2$. Поэтому общий вид зависимости между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ в изотропном теле с учетом квадратичных по $\mathbf{H}$ членов дается формулой

$$\mathbf{E} = \rho^{(0)}\mathbf{j} + R[\mathbf{Hj}] + \beta_1 \mathbf{j} H^2 + \beta_2 \mathbf{H}(\mathbf{Hj}). \tag{22.13}$$

З а д а ч а

Выразить компоненты обратного тензора σ_{ik}^{-1} через компоненты s_{ik} и $\mathbf{a}$.

Р е ш е н и е. Проще всего производить вычисления, выбрав систему координат x, y, z, в которой тензор s_{ik} приведен к главным осям, после чего по виду получающихся выражений легко заключить об их общей форме в

произвольной системе координат. Определитель тензора:

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} s_{xx} & a_z & -a_y \\ -a_z & s_{yy} & a_x \\ a_y & -a_x & s_{zz} \end{vmatrix} = s_{xx}s_{yy}s_{zz} + s_{xx}a_x^2 + s_{yy}a_y^2 + s_{zz}a_z^2.$$

Очевидно, что в общем случае

$$|\sigma| = |s| + s_{ik}a_i a_k.$$

Составляя также миноры этого определителя, найдем компоненты обратного тензора

$$\sigma_{xx}^{-1} = \rho_{xx} = \frac{s_{yy}s_{zz} + a_x^2}{|\sigma|}, \quad \sigma_{xy}^{-1} = \rho_{xy} + b_z = \frac{a_x a_y - a_z s_{zz}}{|\sigma|}, \quad \ldots$$

Общие выражения, переходящие в эти при нашем выборе системы координат:

$$\rho_{ik} = \frac{1}{|\sigma|}\left\{s_{ik}^{-1}|s| + a_i a_k\right\}, \quad b_i = -\frac{1}{|\sigma|}s_{ik}a_k,$$

чем и решается поставленная задача.

§ 23. Контактная разность потенциалов

Для того чтобы удалить из проводника через его поверхность заряженную частицу, необходимо произвести над ней определенную работу. *Работой выхода* называют работу, которая должна быть произведена над частицей, если ее удаление совершается термодинамически обратимым образом. Эта величина всегда положительна, как это следует непосредственно из того, что точечный заряд притягивается ко всякому нейтральному телу, в том числе ко всякому проводнику (см. § 14). Обозначим эту работу как eW, где e — заряд частицы; знак определенного таким образом *потенциала выхода* W совпадает со знаком заряда удаляемой частицы.

Работа выхода зависит как от рода проводника (и его термодинамического состояния — температуры, плотности), так и от рода заряженной частицы. Например, у одного и того же металла работа выхода различна при удалении заряда в виде электрона проводимости или при удалении иона с его поверхности. Необходимо также подчеркнуть, что работа выхода является величиной, характеризующей поверхность проводника. Поэтому она зависит, например, и от способа обработки и степени «загрязнения» поверхности. Если проводник представляет собой монокристалл, то работа выхода различна и для разных его граней.

Для уяснения физической природы зависимости работы выхода от свойств поверхности установим ее связь с электрической структурой поверхностного слоя вещества. Понимая под $\rho(x)$ плотность зарядов, не усредненную по физически бесконечно ма-

лым элементам длины вдоль оси x (перпендикулярной к плоскости слоя), пишем уравнение Пуассона в поверхностном слое:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho.$$

Пусть области проводника соответствуют $x < 0$. Интегрируя один раз, получим

$$\frac{d\varphi}{dx} = -4\pi \int\limits_{-\infty}^{x} \rho\, dx,$$

после чего следующее интегрирование производим по частям:

$$\varphi - \varphi_{-\infty} = -4\pi x \int\limits_{-\infty}^{x} \rho\, dx + 4\pi \int\limits_{-\infty}^{x} x\rho\, dx.$$

При $x \to \infty$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{x} \rho\, dx$ весьма быстро стремится к нулю (ввиду электронейтральности поверхности незаряженного проводника). Поэтому

$$\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) = 4\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\rho\, dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, представляет собой дипольный момент зарядов, распределенных вблизи поверхности тела. Это распределение имеет характер *двойного слоя*, в котором заряды противоположного знака разделены так, что дипольный момент системы отличен от нуля. Структура двойного слоя, разумеется, зависит от свойств поверхности (ее кристаллографического направления, загрязнений и т. п.). Разность же потенциалов выхода с различных поверхностей данного проводника определяется разницей их дипольных моментов.

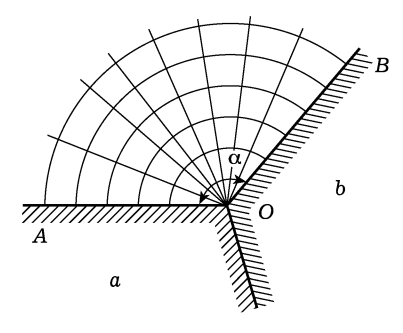


Рис. 16

Если два различных проводника приведены в соприкосновение друг с другом, то между ними может происходить обмен заряженными частицами. При этом заряды будут переходить от тела с меньшей к телу с большей работой выхода до тех пор, пока между обоими проводниками не установится разность потенциалов, препятствующая переходу зарядов — так называемая *контактная разность потенциалов*.

На рис. 16 изображен поперечный разрез двух соприкасающихся проводников (a и b) вблизи их свободных поверхностей AO и OB. Потенциалы этих поверхностей обозначим соответственно как φ_a и φ_b; контактная разность потенциалов есть разность $\varphi_{ab} = \varphi_b - \varphi_a$. Количественная связь между этой разностью и

работами выхода устанавливается условием термодинамического равновесия. Рассмотрим работу, которая должна была бы быть произведена над частицей с зарядом e для того, чтобы удалить его из проводника a через поверхность AO, затем перенести его к поверхности OB и, наконец, ввести внутрь проводника b; в состоянии термодинамического равновесия эта работа должна быть равна нулю [1]). Работы, производимые над частицей на каждом из указанных трех этапов пути, равны соответственно eW_a, $e(\varphi_b - \varphi_a)$ и $-eW_b$. Приравняв их сумму нулю, найдем искомое соотношение

$$\varphi_{ab} = W_b - W_a. \tag{23.1}$$

Таким образом, контактная разность потенциалов между соседними свободными поверхностями двух соприкасающихся проводников равна разности их потенциалов выхода.

Наличие контактной разности потенциалов приводит к появлению электрического поля в пространстве вне проводников. Не представляет труда определить это поле вблизи места соприкосновения. В небольшой области вблизи линии соприкосновения (точка O на рис. 16) пересекающиеся стороны проводников можно рассматривать как плоские. Потенциал поля вне проводников удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0$$

(r, θ — полярные координаты с началом в точке O), а на сторонах AO и OB должен принимать заданные постоянные значения. При этом нас интересует решение, содержащее наиболее низкую степень r: оно будет представлять собой главный член разложения потенциала по степеням малого расстояния r. Таким решением является $\varphi = \mathrm{const}\cdot\theta$. Отсчитывая угол θ от стороны AO и приняв ее потенциал условно равным нулю, получим

$$\varphi = \frac{\varphi_{nb}}{\alpha}\theta, \tag{23.2}$$

где α — угол AOB. Таким образом, эквипотенциальными линиями (в плоскости рисунка) являются прямые лучи, расходящиеся от точки O. Соответственно силовые линии представляют собой семейство дуг окружностей с центром в точке O. Напряженность поля равна

$$E = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{\varphi_{ab}}{\alpha}\frac{1}{r}, \tag{23.3}$$

т. е. убывает обратно пропорционально расстоянию от точки O.

[1]) Разумеется, в действительности переход частицы из одного проводника в другой может произойти только через поверхность их контакта, а не через окружающее пространство. Мы, однако, пользуемся тем, что работа этого перехода не зависит от его пути.

Как уже указывалось, «контактные» разности потенциалов существуют и между различными гранями металлического монокристалла. Поэтому электрическое поле описанного выше характера должно существовать и вблизи ребер кристалла [1]).

Если имеется ряд последовательно соединенных металлических проводников (находящихся при одинаковой температуре), то разность потенциалов между крайними проводниками равна (как это легко заключить на основании формулы (23.1)) просто разности их потенциалов выхода, как и для двух непосредственно соприкасающихся проводников. В частности, если на обоих концах цепи находятся одинаковые металлы, то разность потенциалов между ними равна нулю. Это обстоятельство, впрочем, уже заранее очевидно: если бы между одинаковыми проводниками существовала разность потенциалов, то при замыкании цепи в ней возник бы ток, в противоречии со вторым началом термодинамики.

§ 24. Гальванический элемент

Сделанное в конце предыдущего параграфа замечание теряет свою силу, если в цепи участвуют проводники с носителями тока различной природы (металлы и растворы электролитов). В связи с различием работ выхода одного и того же проводника по отношению к различным заряженным частицам (электронам и ионам) сумма всех контактных разностей потенциалов в цепи здесь отлична от нуля даже при одинаковых проводниках на обоих ее концах. Эту сумму называют действующей в цепи *электродвижущей силой* (ЭДС); она представляет собой не что иное, как разность потенциалов между двумя одинаковыми проводниками, находящимися на концах разомкнутой цепи. При замыкании такой цепи в ней возникает ток; на этом основана работа *гальванических элементов*. Источником энергии, поддерживающим прохождение тока в цепи, являются при этом химические превращения, происходящие в элементе.

При полном обходе по любому замкнутому контуру, проходящему внутри замкнутой цепи, потенциал поля должен, разумеется, вернуться к исходному значению, т. е. его суммарное изменение равно нулю. Рассмотрим, например, контур, проходящий по поверхности проводников. При переходе с одного проводника на другой потенциал испытывает скачок φ_{ab}. Падение же потенциала вдоль длины каждого проводника при наличии тока J (полный ток через сечение) равно RJ, где R — сопротивление проводника. Поэтому суммарное изменение потенциала вдоль цепи

---

[1]) В реальных условиях все эти поля обычно компенсируются полем ионов, «налипающих» из атмосферы на поверхность.

равно
$$\sum \varphi_{ab} - \sum JR.$$

Приравняв это выражение нулю и заметив, что ток J постоянен вдоль всей цепи, а сумма $\sum \varphi_{ab}$ есть электродвижущая сила $\mathscr{E}$, найдем:
$$J\sum R = \mathscr{E}, \tag{24.1}$$
так что ток, возникающий в цепи с гальваническим элементом, равен ЭДС, деленной на полное сопротивление всех проводников в цепи (в том числе, разумеется, и внутреннее сопротивление самого элемента).

Хотя ЭДС гальванического элемента и может быть выражена в виде суммы контактных разностей потенциалов, но очень важно подчеркнуть, что в действительности это есть термодинамическая величина, определяющаяся исключительно объемными состояниями проводников и совершенно не зависящая от свойств их поверхностей раздела. Это ясно уже из того, что $\mathscr{E}$ есть не что иное, как работа (отнесенная к единичному заряду), которая была бы произведена над заряженной частицей при обратимом проведении ее вдоль всей замкнутой цепи.

Для иллюстрации этого обстоятельства рассмотрим гальванический элемент, составленный из двух металлических электродов (металлы A и B), погруженный в раствор электролитов AX и BX (X^- — какой-либо анион). Пусть ζ_A и ζ_B — химические потенциалы металлов A и B, а ζ_{AX}, ζ_{BX} — химические потенциалы электролитов в растворе[1]). Проведение элементарного заряда e вдоль замнутой цепи означает переход иона A^+ из электрода A в раствор, переход иона B^+ из раствора на электрод, причем изменение зарядов электродов компенсируется переходом электрона от электрода A к электроду B по внешней части цепи. Результат этих процессов сводится к тому, что электрод A теряет, а B приобретает по одному нейтральному атому, а в растворе электролита одна молекула BX заменяется на AX. Поскольку работа, производимая при обратимом процессе (при постоянных температуре и давлении), равна изменению термодинамического потенциала системы, то находим соотношение
$$e\mathscr{E}_{AB} = (\zeta_B - \zeta_{BX}) - (\zeta_A - \zeta_{AX}), \tag{24.2}$$
выражающее ЭДС элемента через объемные свойства электродов и раствора электролита.

Форма записи (24.2) позволяет сделать также и следующий вывод. Если в растворе находятся три электролита (AX, BX,

---

[1]) В этом параграфе подразумевается обычное определение химического потенциала на одну частицу.

CX) и в него погружены металлические электроды A, B, C, то ЭДС между каждыми двумя из них связаны соотношением

$$\mathscr{E}_{AB} + \mathscr{E}_{BC} = \mathscr{E}_{AC}. \tag{24.3}$$

С помощью общих термодинамических соотношений можно связать ЭДС гальванического элемента с тепловым эффектом, сопровождающим прохождение тока по цепи, которое в реальных условиях происходит, разумеется, необратимым образом. Пусть Q есть количество тепла, выделяющегося (как в самом элементе, так и во внешней части цепи) при прохождении единичного заряда; это есть не что иное, как термохимическая теплота реакции, происходящей внутри гальванического элемента при прохождении тока. Согласно известной термодинамической формуле (см. V, § 91) она связана с работой $\mathscr{E}$ следующим соотношением:

$$Q = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mathscr{E}}{T}\right). \tag{24.4}$$

Определение стоящей здесь частной производной по температуре зависит от того, в каких условиях происходит процесс; так, если прохождение тока совершается при постоянном давлении (как это обычно и имеет место), то дифференцирование производится при постоянном давлении.

§ 25. Электрокапиллярность

Наличие зарядов на границе между двумя проводящими средами влияет на поверхностное натяжение на ней; это явление называют *электрокапиллярностью*. Фактически речь идет при этом о двух жидких средах — обычно о границе между жидким металлом (ртуть) и раствором электролита.

Обозначим через φ_1 и φ_2 потенциалы обоих проводников, а через e_1 и e_2 — заряды, расположенные у их поверхности соприкосновения. Последние равны по величине и противоположны по знаку, образуя, таким образом, вдоль этой поверхности так называемый *двойной слой*.

Для дифференциала потенциала $\widetilde{\Phi}$ системы двух проводников, с учетом их поверхности раздела, при заданных давлении и температуре, имеем

$$d\widetilde{\Phi} = \alpha\, dS - e_1\, d\varphi_1 - e_2\, d\varphi_2. \tag{25.1}$$

Член $\alpha\, dS$ представляет собой работу обратимого измерения площади S поверхности раздела (α — коэффициент поверхностного натяжения; см. V, § 154).

Вместо термодинамического потенциала $\widetilde{\Phi}$ в (25.1) можно писать только его поверхностную часть $\widetilde{\Phi}_s$, так как объемная часть при заданных давлении и температуре все равно постоянна и не интересует нас здесь. Обозначив $e_1 = -e_2 \equiv e$ и вводя разность потенциалов $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, перепишем (25.1) в виде

$$d\widetilde{\Phi}_s = \alpha\, dS - e\, d\varphi. \tag{25.2}$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}_s}{\partial S}\right)_\varphi = \alpha, \tag{25.3}$$

причем α выражено в функции от φ. Интегрируя это соотношение, найдем, что $\widetilde{\Phi}_s = \alpha S$. Подставив это обратно в (25.2), получим $d(\alpha S) = \alpha\, dS - e\, d\varphi$ или $S\, d\alpha = -e\, d\varphi$, откуда

$$\sigma = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\right)_{P,T}, \tag{25.4}$$

где $\sigma = e/S$ — заряд, приходящийся на 1 см^2 поверхности. Соотношение (25.4) (*G. Lippmann*, *J. W. Gibbs*) является основной формулой теории электрокапиллярных явлений.

В состоянии равновесия термодинамический потенциал Φ должен быть минимален при заданных значениях электрических потенциалов проводников. Рассматривая его как функцию поверхностных зарядов e, напишем необходимые условия минимума:

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}_s}{\partial e} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_s}{\partial e^2} > 0, \tag{25.5}$$

где производные подразумеваются взятыми при постоянной площади S. Для вычисления производных выразим $\widetilde{\Phi}_s$ через термодинамический потенциал $\Phi_s = \Phi_s(e)$ согласно

$$\widetilde{\Phi}_s = \Phi_s(e) - e_1\varphi_1 - e_2\varphi_2 = \Phi_s(e) - e\varphi. \tag{25.6}$$

Условие равенства нулю первой производной дает

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}_s}{\partial e} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial e} - \varphi = 0,$$

после чего условие положительности второй производной принимает вид

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_s}{\partial e^2} = \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial e^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial e} = \frac{1}{S}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} > 0,$$

или

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} > 0. \tag{25.7}$$

Это условие естественно было ожидать, если рассматривать двойной слой у поверхности как «конденсатор» с емкостью $\partial e/\partial\varphi$.

Продифференцировав равенство (25.4) по φ и используя (25.7), мы находим, что

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi^2} < 0. \tag{25.8}$$

Это значит, что в точке, в которой $\partial\alpha/\partial\varphi = -\sigma = 0$, кривая зависимости α от φ имеет максимум.

§ 26. Термоэлектрические явления

Условие отсутствия тока в металле заключается в наличии термодинамического равновесия по отношению к электронам проводимости. Оно требует, как известно, наряду с постоянством (вдоль тела) температуры также и постоянства суммы $e\varphi+\zeta_0$, где ζ_0 — химический потенциал электронов проводимости в металле (при $\varphi = 0$) [1]). Если мы имеем дело с металлом, не однородным по своему составу, то ζ_0 меняется вдоль него даже при постоянной температуре. Поэтому постоянство электрического потенциала φ в этом случае отнюдь не приводит к отсутствию тока в металле, хотя напряженность $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ и равна нулю. Это обстоятельство делает неудобным обычное определение φ (как результата усреднения истинного потенциала), если мы хотим включить в рассмотрение также и неоднородные проводники.

Естественно принять в качестве нового определения потенциала сумму $\varphi + \zeta_0/e$, которую мы и будем обозначать ниже просто как φ [2]). В однородном металле такое изменение сводится к добавлению к потенциалу несущественной постоянной. Соответственно «напряженность» $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ (которой мы и будем пользоваться) совпадает с истинной средней напряженностью лишь в однородном металле, а в общем случае отличается от нее градиентом некоторой функции состояния [3]).

---

[1]) См. V, § 25; мы понимаем здесь под ζ химический потенциал, отнесенный обычным образом к одной частице (электрону).

[2]) Это определение можно сформулировать и иначе: новое значение $e\varphi$ есть изменение свободной энергии при введении (изотермическом) в металл одного электрона; другими словами, $\varphi = \partial F/\partial\rho$, где F — свободная энергия металла, а ρ — заряд электронов проводимости, отнесенные к единичному объему.

[3]) Подчеркнем, что при этом произведение $e\mathbf{E}$ уже не будет силой, действующей на заряд e. Это обстоятельство может сделать такое определение $\mathbf{E}$ (целесообразное в феноменологической теории) неудобным в микроскопической теории, при вычислении кинетических коэффициентов (ср. X, § 44).

При таком определении ток обращается в нуль вместе с напряженностью в термодинамически равновесном (по отношению к электронам проводимости) состоянии, и связь между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ будет даваться формулой $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ (или $j_i = \sigma_{ik}E_k$) даже в неоднородном по своему составу металле.

Рассмотрим теперь неравномерно нагретый металл, в котором, во всяком случае, нет (электронного) термодинамического равновесия. Тогда напряженность $\mathbf{E}$ отлична от нуля даже и в отсутствие тока. В общем случае, когда отлична от нуля как плотность тока $\mathbf{j}$, так и градиент температуры ∇T, связь между этими величинами и напряженностью поля может быть написана в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{j} + \alpha\nabla T. \tag{26.1}$$

Здесь σ — обычная проводимость, а α — еще одна величина, характеризующая электрические свойства металла. Мы предполагаем здесь для простоты, что вещество изотропно (или обладает кубической симметрией), в связи с чем пишем коэффициенты пропорциональности в виде скалярных величин. Линейная зависимость $\mathbf{E}$ от ∇T представляет собой, разумеется, лишь первый член разложения, достаточный ввиду малости градиента температуры (фактически всегда имеющей место).

Та же формула (26.1), написанная в виде

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \alpha\nabla T), \tag{26.2}$$

показывает, что в неравномерно нагретом металле может течь ток и при равной нулю напряженности $\mathbf{E}$.

Наряду с плотностью электрического тока $\mathbf{j}$ рассмотрим также и плотность потока энергии, которую обозначим буквой $\mathbf{q}$. Прежде всего, из этого потока следует выделить величину $\varphi\mathbf{j}$, связанную с тем, что каждая заряженная частица (электрон) переносит с собой энергию $e\varphi$. Разность $\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}$, однако, уже не зависит от самого потенциала и может быть представлена, в общем случае, в виде линейной функции градиентов $\nabla\varphi = -\mathbf{E}$ и ∇T, аналогично формуле (26.2) для плотности тока. Напишем пока эту формулу в виде

$$\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j} = \beta\mathbf{E} - \gamma\nabla T.$$

Принцип симметрии кинетических коэффициентов позволяет связать коэффициент β с коэффициентом α в выражении (26.2).

Для этого вычислим скорость изменения полной энтропии проводника. Количество тепла, выделяющееся в единицу времени в единице объема тела, есть $-\operatorname{div}\mathbf{q}$. Поэтому можно написать

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = -\int \frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{T}\,dV.$$

Далее, пишем, используя уравнение $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$,

$$\frac{1}{T}\operatorname{div}\mathbf{q} = \frac{1}{T}\{\operatorname{div}(\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}) + \operatorname{div}\varphi\mathbf{j}\} = \frac{1}{T}\operatorname{div}(\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}) - \frac{\mathbf{E}\mathbf{j}}{T}.$$

Интеграл от первого члена преобразуем по частям и в результате получаем

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{E}\mathbf{j}}{T}\,dV - \int \frac{(\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j})\nabla T}{T^2}\,dV. \tag{26.3}$$

Эта формула показывает, что, если выбрать в качестве величин $\partial x_a/\partial t$ (см. § 21) компоненты векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j}$, то соответствующими величинами X_a будут компоненты векторов $-\mathbf{E}/T$ и $\nabla T/T^2$. Соответственно этому, в соотношениях

$$\mathbf{j} = \sigma T\frac{\mathbf{E}}{T} - \sigma\alpha T^2\frac{\nabla T}{T^2},$$

$$\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j} = \beta T\frac{\mathbf{E}}{T} - \gamma T^2\frac{\nabla T}{T^2}$$

должны быть равными коэффициенты $\sigma\alpha T^2$ и βT.

Таким образом, $\beta = \sigma\alpha T$, и мы имеем

$$\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j} = \sigma\alpha T\mathbf{E} - \gamma\nabla T.$$

Наконец, выразив здесь $\mathbf{E}$ через $\mathbf{j}$ и ∇T согласно (26.1), получим окончательно следующее выражение:

$$\mathbf{q} = (\varphi + \alpha T)\mathbf{j} - \varkappa\nabla T, \tag{26.4}$$

где введено обозначение $\varkappa = \gamma - T\alpha^2\sigma$. Величина $\varkappa$ является не чем иным, как обычным коэффициентом теплопроводности, определяющим поток тепла в отсутствие электрического тока.

Следует указать, что условие положительности производной $d\mathscr{S}/dt$ не накладывает каких-либо новых ограничений на термоэлектрические коэффициенты. При подстановке (26.1) и (26.4) в (26.3) получается

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \int \left(\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma T} + \frac{\varkappa(\nabla T)^2}{T^2}\right) dV > 0, \tag{26.5}$$

откуда следуют лишь условия положительности коэффициентов тепло- и электропроводности.

В написанных выше формулах молчаливо подразумевалось, что неоднородность давления (или плотности) при постоянной температуре не может привести к возникновению поля (или тока) в проводнике; на этом основании в (26.2) и (26.4) не были написаны члены, пропорциональные ∇p. В действительности наличие таких членов противоречило бы закону возрастания энтропии: в подынтегральном выражении в (26.5) появились бы члены

со знакопеременными произведениями $\mathbf{j}\nabla p$ и $\nabla T\nabla p$, в результате чего интеграл не смог бы быть существенно положительным.

Соотношения (26.1) и (26.4) содержат в себе различные термоэлектрические эффекты. Рассмотрим тепло $-\operatorname{div}\mathbf{q}$, выделяющееся ежесекундно в единице объема проводника. Дифференцируя выражение (26.4), найдем

$$Q = -\operatorname{div}\mathbf{q} = \operatorname{div}(\varkappa\nabla T) + \mathbf{Ej} - \mathbf{j}\nabla(\alpha T),$$

или, подставив сюда (26.1),

$$Q = \operatorname{div}(\varkappa\nabla T) + \frac{j^2}{\sigma} - T\mathbf{j}\nabla\alpha. \tag{26.6}$$

Первый член в этой сумме связан с чистой теплопроводностью, а второй член, пропорциональный квадрату тока, можно назвать джоулевым теплом. Нас интересует здесь третий член, содержащий специфические термоэлектрические эффекты.

Предположим, что проводник однороден по составу, а давление, как это обычно имеет место, постоянно вдоль него. Изменение величины α связано только с градиентом температуры, и можно написать $\nabla\alpha = (d\alpha/dT)\nabla T$. Таким образом, интересующее нас выделение тепла (*эффект Томсона*) равно

$$\rho\mathbf{j}\nabla T, \text{ где } \rho = -T\frac{d\alpha}{dT}. \tag{26.7}$$

Величину ρ называют *коэффициентом Томсона*. Отметим, что этот эффект пропорционален первой степени тока, а не его квадрату, как джоулево тепло. Поэтому он меняет знак при изменении направления тока на обратное. Коэффициент ρ может быть как положительным, так и отрицательным. Если $\rho > 0$, то томсоновское тепло положительно (тепло выделяется) при течении тока в направлении возрастания температуры, а при течении тока в противоположном направлении — тепло поглощается; при $\rho < 0$ соотношения обратны.

Другой тепловой эффект (*эффект Пельтье*) возникает при прохождении тока через контакт (спай) двух различных металлов. На поверхности контакта непрерывны температура, потенциал, а также нормальные компоненты векторов плотности тока и плотности потока энергии. Отмечая индексами 1 и 2 значения величин, относящиеся к двум металлам, и приравнивая значения нормальных компонент $\mathbf{q}$ (26.4) по обеим сторонам контакта, получим ввиду непрерывности φ, T, j_x:

$$\left(-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_1^2 = -j_x T(\alpha_2 - \alpha_1);$$

ось x направлена по нормали к поверхности. Если положительное направление оси x есть направление от металла *1* к метал-

лу *2*, то выражение, стоящее в левой части равенства, есть количество тепла, отводимое в 1 с с 1 см^2 поверхности контакта путем теплопроводности. Этот отвод компенсирует выделяющееся в контакте тепло, представляемое выражением в правой части равенства. Таким образом, на единице площади контакта выделяется (в 1 с) тепло, равное

$$\Pi_{12} j, \text{ где } \Pi_{12} = -T(\alpha_2 - \alpha_1). \tag{26.8}$$

Величину Π_{12} называют *коэффициентом Пельтье*. Как и эффект Томсона, этот эффект пропорционален первой степени тока и меняет знак при изменении направления тока на обратное. Отметим, что коэффициент Пельтье обладает свойством аддитивности, выражающимся равенством $\Pi_{13} = \Pi_{12} + \Pi_{23}$, где индексы 1, 2, 3 относятся к трем различным металлам.

Сравнение формул (26.7) и (26.8) показывает, что коэффициенты Томсона и Пельтье связаны соотношением

$$\rho_2 - \rho_1 = T \frac{d}{dT} \frac{\Pi_{12}}{T}. \tag{26.9}$$

Рис. 17

Далее, рассмотрим разомкнутую цепь с двумя контактами, причем два крайних проводника представляют собой одинаковые металлы (металл *1*, рис. 17). Предположим, что спаи (точки b и c) находятся при различных температурах T_1 и T_2, а температуры обоих концов цепи (точки a и d) одинаковы. Тогда между этими концами существует разность потенциалов, называемая *термоэлектродвижущей силой*; обозначим ее через $\mathscr{E}_T$. Для вычисления этой силы полагаем в (26.1) $\mathbf{j} = 0$ и интегрируем напряженность $\mathbf{E} = \alpha \nabla T$ вдоль всей длины цепи (ось x):

$$\mathscr{E}_T = \int_a^d \alpha \frac{dT}{dx}\, dx = \int_a^d \alpha\, dT.$$

Интегрирование от c до d и от a до b означает интегрирование по температуре от T_2 до T_1 в первом металле, а интегрирование от b до c есть интегрирование по dT в пределах от T_1 до T_2 во втором металле. Поэтому находим

$$\mathscr{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1)\, dT. \tag{26.10}$$

Сравнивая с (26.8), мы видим, что термоэлектродвижущая сила связана с коэффициентом Пельтье следующим соотношением:

$$\mathscr{E}_T = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T}\, dT. \tag{26.11}$$

Формулы (26.9) и (26.11) называют *соотношениями Томсона* (*W. Thomson*, 1854).

В заключение этого параграфа выпишем формулы для тока и потока тепла в анизотропном проводнике. Эти формулы выводятся с помощью принципа симметрии кинетических коэффициентов аналогично выводу формул (26.1), (26.4) и имеют вид

$$\begin{aligned} E_i &= \sigma_{ik}^{-1} j_k + \alpha_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \\ q_i - \varphi j_i &= T \alpha_{ki} j_k - \varkappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \end{aligned} \tag{26.12}$$

Здесь σ_{ik}^{-1} — тензор, обратный тензору проводимости σ_{ik}; тензоры σ_{ik} и $\varkappa_{ik}$ симметричны. Термоэлектрический же тензор α_{ik} в общем случае несимметричен.

§ 27. Термогальваномагнитные явления

Еще более разнообразны явления, возникающие при протекании тока при одновременном наличии электрического и магнитного полей и градиента температуры.

Исследование этих явлений вполне аналогично произведенному в предыдущем параграфе для термоэлектрических явлений. Будем производить его сразу в тензорном виде, применимом и к анизотропным проводникам. Пишем плотность электрического тока $\mathbf{j}$ и потока тепла $\mathbf{q}$ в виде

$$\begin{aligned} j_i &= a_{ik} \frac{E_k}{T} + b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{T}, \\ q_i - \varphi j_i &= c_{ik} \frac{E_k}{T} + d_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{T}, \end{aligned} \tag{27.1}$$

где все коэффициенты являются функциями магнитного поля. Согласно принципу симметрии кинетических коэффициентов имеем

$$a_{ik}(\mathbf{H}) = a_{ki}(-\mathbf{H}), \quad d_{ik}(\mathbf{H}) = d_{ki}(-\mathbf{H}), \quad b_{ik}(\mathbf{H}) = c_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{27.2}$$

Выразив из (27.1) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}$ через $\mathbf{j}$ и ∇T, получим

$$\begin{aligned} E_i &= \sigma_{ik}^{-1} j_k + \alpha_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \\ q_i - \varphi j_i &= \beta_{ik} j_k - \varkappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \end{aligned} \tag{27.3}$$

где тензоры α^{-1}, α, β, $\varkappa$ определенным образом выражаются через тензоры a, b, c, d и обладают следующими свойствами сим-

метрии, возникающими в силу соотношений (27.2):

$$\sigma_{ik}^{-1}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}^{-1}(-\mathbf{H}), \quad \varkappa_{ik}(\mathbf{H}) = \varkappa_{ki}(-\mathbf{H}),$$
$$\beta_{ik}(\mathbf{H}) = T\alpha_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{27.4}$$

Это и есть искомые соотношения в наиболее общем виде. Они обобщают связи, найденные в § 26 для случая отсутствия магнитного поля и в § 22 для случая отсутствия градиента температуры. Подчеркнем, что тензоры α_{ik} и β_{ik} в анизотропном проводнике, вообще говоря, не симметричны и в отсутствие магнитного поля.

Тензоры σ^{-1}, $\varkappa$, $\alpha + \beta T$ можно разложить на симметричную и антисимметричную части, подобно тому, как это было сделано в § 22. В слабом магнитном поле симметричные части можно считать постоянными, не зависящими от $\mathbf{H}$ величинами, а антисимметричные линейны по $\mathbf{H}$. Для изотропного проводника получим с этой точностью следующие выражения:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \alpha\nabla T + R[\mathbf{Hj}] + N[\mathbf{H}\nabla T], \tag{27.5}$$

$$\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j} = \alpha T\mathbf{j} - \varkappa\nabla T + NT[\mathbf{Hj}] + L[\mathbf{H}\nabla T]. \tag{27.6}$$

Здесь σ, $\varkappa$ — обычные коэффициенты электро- и теплопроводности, α — термоэлектрический коэффициент, фигурировавший в (26.1), R — коэффициент Холла, а N, L — новые коэффициенты. Член $N[\mathbf{H}\nabla T]$ можно рассматривать как влияние магнитного поля на термоэлектродвижущую силу (*эффект Нернста*), а член $L[\mathbf{H}\nabla T]$ — как влияние магнитного поля на теплопроводность (*эффект Ледюка–Риги*).

На границе двух сред непрерывны нормальные составляющие векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}$, а потому и вектора

$$-\varkappa\nabla T + \alpha T\mathbf{j} + NT[\mathbf{Hj}] + L[\mathbf{H}\nabla T].$$

Член $NT[\mathbf{Hj}]$ описывает влияние магнитного поля на эффект Пельтье (*эффект Эттингсхаузена*).

Количество тепла, выделяющееся в 1 с в единице объема проводника, есть $Q = -\operatorname{div}\mathbf{q}$. Сюда надо подставить $\mathbf{q}$ из (27.6), после чего заменить $-\nabla\varphi = \mathbf{E}$ выражением из (27.5). Если проводник однороден по своему составу, то величины α, N, L, ... являются функциями только температуры, так что их градиенты пропорциональны ∇T. При вычислении пренебрегаем всеми членами второго порядка по $\mathbf{H}$; в этом приближении можно считать, что $\operatorname{rot}(\mathbf{j}/\sigma) \approx \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$. Кроме того, замечаем, что для

внешнего поля $\mathbf{H}$ (источники которого находятся вне рассматриваемого проводника) имеем $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ [1]). Наконец, как всегда для постоянного тока, $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$. Имея все это в виду, получим после вычисления

$$Q = \frac{j^2}{\sigma} + \operatorname{div}(\varkappa\nabla T) - T\mathbf{j}\nabla\alpha + \frac{1}{\sigma T}\frac{d}{dT}(\sigma N T^2)[\mathbf{j}\mathbf{H}]\nabla T.$$

Третий член в этом выражении описывает эффект Томсона (26.7), а последний член дает изменение этого эффекта благодаря наличию магнитного поля.

§ 28. Диффузионно-электрические явления

Наличие диффузии приводит к возникновению в растворах электролитов специфических явлений, не наблюдающихся в твердых проводниках.

Будем предполагать для упрощения, что температура постоянна вдоль всего раствора. Тем самым мы ограничиваемся рассмотрением чисто диффузионно-электрических явлений, не усложненных термоэлектрическими эффектами.

Вместо давления P и концентрации c раствора удобнее пользоваться в качестве независимых переменных давлением и химическим потенциалом ζ. Последний мы определяем здесь как производную от термодинамического потенциала единицы массы раствора по его концентрации c (при постоянных P и T); при этом под концентрацией мы будем понимать отношение массы электролита к полной массе жидкости в данном элементе объема [2]). Напомним, что постоянство химического потенциала является (наряду с постоянством давления и температуры) одним из условий термодинамического равновесия.

Определение потенциала электрического поля, данное в § 26, должно быть несколько видоизменено в данном случае, поскольку носителями тока являются теперь не электроны проводимости, а ионы растворенного электролита. Именно, рациональное определение (ср. примеч. на с. 151) дается формулой $\varphi = (\partial\Phi/\partial\rho)_c$,

---

[1]) Тем самым мы пренебрегаем слабым эффектом — влиянием на выделение тепла собственного магнитного поля рассматриваемых токов.

[2]) Обычные химические потенциалы определяются как $\zeta_1 = \partial\Phi/\partial n_1$, $\zeta_2 = \partial\Phi/\partial n_2$, где Φ — термодинамический потенциал некоторого произвольного количества раствора, а n_1, n_2 — числа частиц растворенного вещества и растворителя в нем. Если теперь отнести Φ к 1 г раствора, то n_1 и n_2 будут связаны соотношением $n_1 m_1 + n_2 m_2 = 1$ (m_1, m_2 — массы частиц обоего рода), а концентрация $c = n_1 m_1$. Поэтому имеем для введенного здесь химического потенциала:

$$\zeta = \frac{\partial\Phi}{\partial c} = \frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial c} + \frac{\partial\Phi}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial c} = \frac{\zeta_1}{m_1} - \frac{\zeta_2}{m_2}.$$

где Φ — термодинамический потенциал, а ρ — сумма зарядов ионов в единице объема раствора (после дифференцирования надо, разумеется, положить $\rho = 0$ ввиду электронейтральности раствора). Производная берется при постоянной массовой концентрации, т. е. при заданной сумме масс ионов обоих знаков в единице объема [1]).

При наличии градиента химического потенциала в выражении для плотности тока появляется пропорциональный ему дополнительный член:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \beta\nabla\zeta), \tag{28.1}$$

аналогичный дополнительному члену в (26.2). Ниже мы убедимся в том, что при заданном градиенте химического потенциала (и температуры) $\mathbf{j}$ не может зависеть от градиента давления, и потому члена с ∇P в выражении (28.1) нет [2]).

Наряду с электрическим током необходимо рассматривать также и одновременно происходящий перенос массы электролита. При этом надо иметь в виду, что прохождение тока через раствор может сопровождаться макроскопическим движением жидкости. Плотность потока массы электролита, переносимого этим движением вместе со всей жидкостью, равна $\rho c\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ — скорость, ρ — плотность раствора). Кроме того, электролит переносится молекулярным, диффузионным путем. Плотность этого диффузионного потока обозначим буквой $\mathbf{i}$, так что полная плотность потока есть $\rho c\mathbf{v} + \mathbf{i}$. Необратимые процессы диффузии тоже приводят к возрастанию энтропии; скорость изменения полной энтропии определяется формулой [3])

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{Ej}}{T}\,dV - \int \frac{\mathbf{i}\nabla\zeta}{T}\,dV. \tag{28.2}$$

Как и плотность электрического тока, диффузионный поток может быть написан в виде линейной комбинации $\mathbf{E}$ и $\nabla\zeta$ или, что то же, $\mathbf{j}$ и $\nabla\zeta$. С помощью симметрии кинетических коэффициентов один из коэффициентов в этом выражении может быть

---

[1]) В сильном электролите растворенное вещество целиком диссоциировано, так что массовая концентрация может быть представлена в виде $c = m_+n_+ + m_-n_-$, где m_+, m_- — массы катионов и анионов, а n_+, n_- — плотности их числа. При указанном определении потенциала равенство $\varphi = 0$ отвечает соотношению $\zeta_+/m_+ = \zeta_-/m_-$ между химическими потенциалами катионов и анионов; потенциалы ζ_+ и ζ_- связаны с ζ_1 равенством $\zeta_+ + \zeta_- = \zeta_1$.

[2]) Подчеркнем, однако, что при заданном градиенте концентрации $\mathbf{j}$ зависит от градиента давления:

$$\nabla\zeta = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)_{P,T}\nabla c + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial P}\right)_{c,T}\nabla P.$$

[3]) Вывод второго члена в этой формуле см. в VI, § 58.

связан с коэффициентом β в формуле (28.1), вполне аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе для $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}-\varphi\mathbf{j}$. В результате получаем:

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho D}{\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial c}\right)_{P,T}}\nabla\zeta + \beta\mathbf{j}. \tag{28.3}$$

Коэффициент при $\nabla\zeta$ выражен через обычный коэффициент диффузии (здесь ρ — плотность вещества). При $\mathbf{j}=0$ и при постоянном давлении (и температуре) имеем обычный диффузионный поток $\mathbf{i} = -\rho D\nabla c$.

Невозможность существования в выражениях (28.1) и (28.3) членов, пропорциональных градиенту давления, снова (как и в § 26) следует из закона возрастания энтропии: такие члены сделали бы производную полной энтропии (28.2) не существенно положительной величиной.

Формулы (28.1) и (28.3) содержат в себе все диффузионно-электрические явления; на более подробном их рассмотрении мы не будем здесь останавливаться.

Задача

Две параллельные плоские пластинки (из одинакового металла A) погружены в раствор электролита AX. Найти зависимость плотности тока от приложенной к пластинкам разности потенциалов.

Решение. При прохождении тока металл растворяется с одного электрода и осаждается на другом. При этом растворитель (вода) покоится, а через раствор проходит поток массы металла с плотностью $\rho v = jm/e$ (j — плотность электрического тока, m и e — масса и заряд ионов A^+) [1]. С другой стороны, этот поток дается выражением $i+\rho v c$ с i из (28.3); предполагая давление постоянным вдоль жидкости [2], получим уравнение

$$\rho D\frac{dc}{dx} = \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c)\right] j \tag{1}$$

(x — координата в направлении между электродами). Поскольку $j=\mathrm{const}$ вдоль раствора, то имеем отсюда

$$jl = \int\limits_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D\,dc}{\beta - \dfrac{m}{e}(1-c)}, \tag{2}$$

где c_1, c_2 — концентрации у поверхности пластинок, а l — расстояние между ними.

---

[1] Напомним, что определение гидродинамической скорости $\mathbf{v}$ в растворе заключается в том, что $\rho\mathbf{v}$ есть импульс единицы объема жидкости (см. VI, § 58). Поэтому тот факт, что в данном случае движется (относительно электродов) только растворенный металл, несуществен при вычислении $\rho\mathbf{v}$.

[2] Учет изменения давления, вызванного движением жидкости, привел бы к малым величинам высшего порядка.

Разность потенциалов $\mathscr{E}$ между пластинками проще всего определить по полной диссипации энергии Q (в 1 с), которая должна быть равна (будучи отнесена к 1 см^2 поверхности пластинок) $j\mathscr{E}$. Согласно (28.1), (28.2) имеем

$$Q = T\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \int \left\{ \frac{j^2}{\sigma} + \rho D \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left(\frac{dc}{dx} \right)^2 \right\} dx = j\mathscr{E}$$

и, воспользовавшись (1), получим

$$\mathscr{E} = \int\limits_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D\, dc}{\sigma \left[\beta - \dfrac{m}{e}(1-c) \right]} + \int\limits_{c_1}^{c_2} \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c) \right] dc. \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) решают (в неявном виде) поставленную задачу.

Если ток j мал, то мала также и разность концентраций $c_2 - c_1$. Заменив интегралы произведениями подынтегральных выражений на $c_2 - c_1$, получим для эффективного удельного сопротивления раствора

$$\frac{\mathscr{E}}{lj} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho D} \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c) \right]^2 .$$

Первый член в (3) дает падение потенциала $\int j \dfrac{dx}{\sigma}$, связанное с прохождением тока. Второй же член есть электродвижущая сила, обязанная разности концентраций в растворе (в известном смысле аналогичная термо-ЭДС). Это последнее выражение не связано даже с условиями данной конкретной одномерной задачи и представляет собой общее выражение для ЭДС «концентрационного элемента».

ГЛАВА IV

ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 29. Постоянное магнитное поле

Постоянное магнитное поле в материальных средах описывается двумя уравнениями Максвелла, которые получаются путем усреднения микроскопических уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}. \tag{29.1}$$

Среднюю напряженность магнитного поля принято называть *магнитной индукцией* и обозначать как

$$\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}. \tag{29.2}$$

Поэтому результат усреднения первого из уравнений (29.1) будет иметь вид

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{29.3}$$

Во втором же уравнении производная по времени при усреднении исчезает, поскольку среднее поле предполагается постоянным, так что имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}. \tag{29.4}$$

Среднее значение микроскопической плотности тока, вообще говоря, отлично от нуля как в проводниках, так и в диэлектриках. Разница между этими двумя категориями тел заключается лишь в том, что в диэлектриках всегда

$$\int \overline{\rho\mathbf{v}}\, d\mathbf{f} = 0, \tag{29.5}$$

где интеграл берется по полной площади любого поперечного сечения тела; в проводниках же этот интеграл может быть отличным от нуля. Предположим сначала, что в теле (если оно является проводником) отсутствует полный ток, т. е. справедливо соотношение (29.5).

Равенство нулю интеграла (29.5) по любому сечению тела означает, что вектор $\overline{\rho\mathbf{v}}$ может быть написан в виде ротора некоторого другого вектора, который принято обозначать как $c\mathbf{M}$:

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = c\operatorname{rot}\mathbf{M}, \tag{29.6}$$

причем величина $\mathbf{M}$ отлична от нуля только внутри тела (ср. аналогичные рассуждения в § 6). Действительно, интегрируя

по поверхности, ограниченной контуром, охватывающим тело и проходящим везде вне его, получим

$$\int \overline{\rho \mathbf{v}}\, d\mathbf{f} = c \int \operatorname{rot} \mathbf{M}\, d\mathbf{f} = c \oint \mathbf{M}\, d\mathbf{l} = 0.$$

Вектор **M** называют *намагниченностью* тела. Вводя его в уравнение (29.4), получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \tag{29.7}$$

где вектор **H** связан с магнитной индукцией **B** соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}, \tag{29.8}$$

аналогичным соотношению между электрической индукцией **D** и напряженностью **E**. Хотя вектор **H**, по аналогии с **E**, называют обычно *напряженностью* магнитного поля, следует помнить, что в действительности истинное среднее значение напряженности есть **B**, а не **H**.

Для выяснения физического смысла величины **M** рассмотрим полный *магнитный момент*, создаваемый всеми движущимися внутри тела заряженными частицами. По определению магнитного момента (см. II, § 44), это есть интеграл [1])

$$\frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \cdot \overline{\rho \mathbf{v}}]\, dV = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{M}]\, dV.$$

Поскольку вне тела $\rho \mathbf{v} \equiv 0$, то интеграл можно брать по любому объему, выходящему за пределы тела. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\int [\mathbf{r}[\nabla \mathbf{M}]]\, dV = \oint [\mathbf{r}[d\mathbf{f}\, \mathbf{M}]] - \int [[\mathbf{M} \nabla]\mathbf{r}]\, dV.$$

Интеграл по поверхности, проходящей вне тела, обращается в нуль. Во втором же члене имеем

$$[[\mathbf{M} \nabla]\mathbf{r}] = -\mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{M} = -2\mathbf{M}.$$

Таким образом, получаем в результате

$$\frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \cdot \overline{\rho \mathbf{v}}]\, dV = \int \mathbf{M}\, dV. \tag{29.9}$$

Мы видим, что вектор намагниченности представляет собой магнитный момент единицы объема тела [2]).

---

[1]) Для ясности подчеркнем, что в этой формуле **r** — бегущая координата (переменная интегрирования), а не координата отдельной микроскопической частицы; поэтому она не входит под знак усреднения.

[2]) Лишь после установления этого соответствия величина **M** становится полностью определенной. Соотношения же (29.6) внутри и $\mathbf{M} = 0$ вне тела сами по себе еще не определяют эту величину однозначным образом: в области внутри тела можно было бы прибавить к **M** любой вектор вида $\operatorname{grad} f$, не нарушив равенства (29.6) (см. аналогичное замечание по поводу электрической поляризации на с. 60).

К уравнениям (29.3) и (29.7) должно быть присоединено соотношение, связывающее между собой величины **H** и **B**; лишь после этого система уравнений станет полной. В неферромагнитных телах, в не слишком сильных магнитных полях, **B** и **H** связаны друг с другом линейным соотношением. У изотропных тел линейная связь сводится к простой пропорциональности

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \tag{29.10}$$

Коэффициент μ называется *магнитной проницаемостью*, а коэффициент пропорциональности

$$\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi} \tag{29.11}$$

в соотношении $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ — *магнитной восприимчивостью.*

В противоположность диэлектрической проницаемости ε, которая у всех тел превышает 1, магнитная проницаемость может быть как больше, так и меньше единицы. Можно только утверждать, что всегда $\mu > 0$ (о причине этого отличия между μ и ε см. § 32; доказательство неравенства $\mu > 0$ будет дано в § 31). Соответственно магнитная восприимчивость χ может быть как положительной, так и отрицательной.

Другое отличие — количественное — состоит в том, что магнитная восприимчивость огромного большинства тел очень мала по сравнению с их диэлектрической восприимчивостью. Это отличие связано с тем, что намагничение вещества (не ферромагнитного) является релятивистским эффектом второго порядка по v/c (v — электронные скорости в атомах) [1]).

В анизотропных телах, кристаллах, простая пропорциональность (29.10) заменяется линейными соотношениями

$$B_i = \mu_{ik} H_k. \tag{29.12}$$

Тензор магнитной проницаемости μ_{ik} симметричен. Это следует из термодинамических соотношений, которые будут выведены в § 31, точно так же, как в § 13 была доказана симметричность тензора ε_{ik}.

Из уравнений $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ следует (ср. § 6), что на границе двух различных сред должны выполняться условия

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}. \tag{29.13}$$

Эта система уравнений и граничных условий к ним формально совпадает с системой уравнений, определяющих электростатиче-

---

[1]) Один раз отношение v/c входит вместе с **H** в гамильтониан, описывающий взаимодействие тела с магнитным полем, второй раз оно входит через элементарные атомные или молекулярные магнитные моменты.

ское поле в диэлектриках в отсутствие свободных зарядов, отличаясь от них лишь заменой $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ соответственно на $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$. Ввиду уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ можно искать $\mathbf{H}$ в виде $\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi$, и для потенциала ψ получаются те же уравнения, что и для электростатического потенциала.

Решения ряда задач, рассмотренных в гл. II для электростатического поля, непосредственно переносятся, таким образом, на постоянное магнитное поле. В частности, полученные в § 8 формулы для диэлектрического эллипсоида в однородном электрическом поле полностью справедливы (с соответствующим изменением обозначений) и для магнитного эллипсоида в однородном магнитном поле. Так, напряженность $\mathbf{H}^{(i)}$ и индукция $\mathbf{B}^{(i)}$ магнитного поля внутри эллипсоида связаны с напряженностью $\mathfrak{H}$ внешнего поля соотношением

$$H_i^{(i)} + n_{ik}(B_k^{(i)} - H_k^{(i)}) = \mathfrak{H}_i, \tag{29.14}$$

где n_{ik} — тензор коэффициентов размагничивания. Напомним, что это соотношение справедливо при любой связи между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$.

Тангенциальные компоненты магнитной индукции, в противоположность ее нормальной компоненте, испытывают скачок на поверхности раздела двух сред. Величину этого скачка можно связать с плотностью токов, протекающих по поверхности. Для этого проинтегрируем обе части уравнения (29.4) по малому отрезку Δl, пересекающему поверхность раздела в направлении нормали. Длину Δl устремляем затем к нулю; интеграл $\int \overline{\rho\mathbf{v}}\, dl$ может стремиться, однако, при этом к конечной величине. Определенную таким образом величину

$$\mathbf{g} = \int \overline{\rho\mathbf{v}}\, dl \tag{29.15}$$

можно назвать поверхностной плотностью тока; она определяет заряд, протекающий в единицу времени через единицу длины линии, проведенной на поверхности. Выберем направление $\mathbf{g}$ в данной точке поверхности в качестве оси y, а направление нормали — в качестве оси x, направленной от среды *1* к среде *2*. Тогда интегрирование уравнения (29.4) дает

$$\int \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) dx = \frac{4\pi}{c} g_y = \frac{4\pi}{c} g.$$

Ввиду непрерывности B_x производная $\partial B_x/\partial z$ ограничена, и потому интеграл от нее стремится к нулю при стремлении к нулю длины отрезка Δl. Интеграл же от $\partial B_z/\partial x$ дает разность значений B_z на обеих сторонах поверхности. Таким образом,

$$B_{2z} - B_{1z} = -\frac{4\pi}{c} g.$$

Это равенство можно написать в векторном виде как

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{g} = [\mathbf{n}, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] = 4\pi[\mathbf{n}, \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1], \tag{29.16}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, направленной внутрь среды *2*; при последнем преобразовании учтена непрерывность тангенциальной компоненты $\mathbf{H}$.

§ 30. Магнитное поле постоянных токов

Если в проводнике течет отличный от нуля полный ток, то средняя плотность тока в нем может быть представлена в виде суммы

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M} + \mathbf{j}.$$

Первый член, связанный с намагниченностью среды, не дает вклада в полный ток, так что полный перенос заряда через поперечное сечение тела определяется интегралом $\int \mathbf{j}\,d\mathbf{f}$ только от второго члена. Величину $\mathbf{j}$ называют *плотностью тока проводимости* [1]). Именно к ней относится все сказанное в § 21, в частности, энергия, диссипируемая в единицу времени в единице объема, равна $\mathbf{Ej}$.

Распределение тока $\mathbf{j}$ по объему проводника определяется указанными в § 21 уравнениями, в которые не входит создаваемое этими же токами магнитное поле (при условии пренебрежения влиянием поля на свойства проводимости самого металла). Поэтому задача об определении магнитного поля токов должна решаться по заданному распределению последних. Уравнения этого поля отличаются от полученных в § 29 уравнений наличием члена $4\pi\mathbf{j}/c$ вместо нуля в правой части (29.7):

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \tag{30.1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{30.2}$$

Плотность тока проводимости $\mathbf{j}$, пропорциональная напряженности электрического поля, является величиной ограниченной, не обращающейся в бесконечность, в частности и на границе раздела двух сред. Поэтому наличие правой части в уравнении (30.2) не отражается на граничном условии непрерывности тангенциальных компонент $\mathbf{H}$.

[1]) Величину же $c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$ иногда называют плотностью молекулярных токов. Это название, однако, не вполне соответствует истинной физической картине движения зарядов в проводнике. Так, в металле вклад в намагниченность дают не только электроны, движущиеся внутри атомов, но и электроны проводимости.

Для решения уравнений (30.1), (30.2) удобно ввести *векторный потенциал* $\mathbf{A}$, положив

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{30.3}$$

в результате чего уравнение (30.1) удовлетворяется тождественно. Равенством (30.3) векторный потенциал еще не определяется однозначно. К нему можно прибавить, не нарушая (30.3), любой вектор вида $\operatorname{grad} f$. Ввиду этой неоднозначности можно наложить на $\mathbf{A}$ одно дополнительное условие, в качестве которого выберем

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \tag{30.4}$$

Уравнение для $\mathbf{A}$ получается подстановкой (30.3) в (30.2). При линейной связи $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ имеем

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{30.5}$$

В таком виде это уравнение справедливо для любой неоднородной среды.

В однородной среде $\mu = \text{const}$, и поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A}$, то уравнение (30.5) приводится к виду

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu\overline{\mathbf{j}}. \tag{30.6}$$

Если же мы имеем дело с совокупностью двух или более различных соприкасающихся сред, каждая из которых обладает своей магнитной проницаемостью μ, то общее уравнение (30.5) сводится к уравнению вида (30.6) внутри каждого из однородных тел, а на их границах должно выполняться условие непрерывности тангенциальных компонент вектора $(1/\mu)\operatorname{rot}\mathbf{A}$. Кроме того, должны быть непрерывными касательные компоненты самого вектора $\mathbf{A}$, так как их скачок означал бы наличие на границе бесконечной индукции $\mathbf{B}$.

Уравнения поля упрощаются для плоской задачи определения магнитного поля в среде, не ограниченной и однородной в одном направлении (которое мы примем в качестве направления оси z), причем создающие поле токи тоже направлены везде вдоль оси z, а их плотность $j_z = j$ есть функция только от x, y. Сделаем естественное (подтверждающееся результатом) предположение, что векторный потенциал такого поля тоже направлен вдоль оси z: $A_z = A(x, y)$ (условие (30.4) удовлетворяется при этом автоматически), а магнитное поле соответственно везде параллельно плоскости xy. Обозначив через $\mathbf{k}$ единичный вектор вдоль оси z, имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot} A\mathbf{k} = [\operatorname{grad} A\cdot\mathbf{k}],$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right) = \left[\nabla\left[\frac{\nabla A}{\mu}\cdot\mathbf{k}\right]\right] = -\mathbf{k}\operatorname{div}\frac{\nabla A}{\mu}.$$

Поэтому уравнение (30.5) приводится к виду

$$\operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} A}{\mu} = -\frac{4\pi}{c} j(x, y), \tag{30.7}$$

т. е. мы действительно получаем одно уравнение для одной скалярной величины $A(x, y)$. Для кусочно-однородной среды (30.7) сводится к уравнению

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} \mu j(x, y) \tag{30.8}$$

с граничным условием непрерывности A и $\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}$ на поверхности раздела [1]).

Магнитное поле определяется совсем элементарно, если распределение токов симметрично относительно оси z: $j_z = j(r)$ (r — расстояние до оси z). Очевидно, что в этом случае магнитные силовые линии являются окружностями $r = \text{const}$. Абсолютная же величина поля непосредственно определяется из формулы

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j}\, d\mathbf{f}, \tag{30.9}$$

являющейся интегральной формулой уравнения (30.2). Именно,

$$H(r) = \frac{2J(r)}{cr}, \tag{30.10}$$

где $J(r)$ — полный ток, протекающий внутри окружности $r = \text{const}$.

Сведéние векторного уравнения (30.5) к одному скалярному уравнению возможно также и при аксиально-симметричном распределении круговых токов, т. е. при распределении, которое в цилиндрических координатах r, φ, z имеет вид

$$j_r = j_z = 0, \quad j_\varphi = j(r, z).$$

Векторный потенциал ищем в виде $A_r = A_z = 0$, $A_\varphi = A(r, z)$. При этом компоненты магнитной индукции $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA), \quad B_\varphi = 0,$$

[1]) Обратим внимание на то, что плоская задача о постоянном магнитном поле оказывается эквивалентной плоской задаче электростатики об определении электрического поля, создаваемого сторонними зарядами, распределенными в диэлектрической среде с плотностью $\rho_{\text{ст}}(x, y)$. Последняя задача требует решения уравнения

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho_{\text{ст}}$$

(φ — потенциал поля), отличающегося от (30.7) лишь заменой A, j/c, μ соответственно на φ, $\rho_{\text{ст}}$, $1/\varepsilon$; совпадают также граничные условия для A и для φ. Разница, однако, возникает при определении соответственно $\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}$ по φ или A. Векторы $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ и $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ в каждой точке одинаковы по абсолютной величине, но взаимно перпендикулярны по направлению.

и φ-компонента уравнения (30.2) дает

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}rA\right)=-\frac{4\pi}{c}j(r,z). \qquad (30.11)$$

Уравнения магнитного поля токов могут быть решены в общем виде в важном случае, когда магнитными свойствами среды можно пренебречь, т. е. можно положить везде $\mu=1$. Для векторного потенциала тогда во всем пространстве имеет место уравнение

$$\Delta\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

без каких бы то ни было условий на границах раздела различных сред (в том числе на границе проводника, по которому течет ток). Решение этого уравнения, обращающееся на бесконечности в нуль, есть

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}}{R}\,dV, \qquad (30.12)$$

где R — расстояние от точки, в которой мы ищем $\mathbf{A}$ (точка наблюдения), до элемента объема dV (см. II, § 43). При применении операции rot к этому выражению следует помнить, что дифференцирование $\mathbf{j}/R$ под знаком интеграла должно производиться по координатам точки наблюдения, от которых $\mathbf{j}$ не зависит, так что

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{j}}{R}=\left[\operatorname{grad}\frac{1}{R}\cdot\mathbf{j}\right]=-\frac{1}{R^3}[\mathbf{R}\mathbf{j}],$$

где радиус-вектор $\mathbf{R}$ направлен из dV в точку наблюдения. Таким образом,

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}=\frac{1}{c}\int\frac{[\mathbf{j}\mathbf{R}]}{R^3}\,dV. \qquad (30.13)$$

Если проводник, по которому течет ток, достаточно тонок (тонкий провод) и мы интересуемся лишь полем в окружающем его пространстве, то толщиной проводника можно пренебречь. В дальнейшем мы неоднократно будем рассматривать такие, как говорят, *линейные* токи. Интегрирование по объему проводника заменяется в этом случае интегрированием по его контуру. Именно, формулы для линейных токов получаются из формул, относящихся к объемным токам, заменой в последних

$$\mathbf{j}\,dV\to J\,d\mathbf{l},$$

где J — полный ток, протекающий по проводнику. Так, из формул (30.12), (30.13) получим

$$\mathbf{A}=\frac{J}{c}\int\frac{d\mathbf{l}}{R},\quad \mathbf{H}=\frac{J}{c}\int\frac{[d\mathbf{l}\,\mathbf{R}]}{R^3}. \qquad (30.14)$$

Вторая из этих формул выражает собой *закон Био и Савара.*

Такие простые формулы для магнитного поля линейных токов не связаны даже с требованием $\mu = 1$. Поскольку толщиной проводника мы пренебрегаем, то никаких граничных условий на его поверхности писать не надо и магнитные свойства его вещества вообще несущественны (оно может даже быть ферромагнитным). Решение уравнения (30.6) для поля в окружающей проводник среде будет поэтому

$$\mathbf{A} = \frac{\mu J}{c}\int \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu J}{c}\int \frac{[d\mathbf{l}\,\mathbf{R}]}{R^3} \tag{30.15}$$

для любого значения магнитной восприимчивости среды. Таким образом, наличие среды приводит лишь к изменению магнитной индукции в μ раз; напряженность же $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ вообще не изменится.

Задача об определении магнитного поля линейных токов может решаться и как задача теории потенциала. Поскольку объемом проводников мы пренебрегаем, то фактически речь идет об определении поля в пространстве, во всем объеме которого (за исключением только особых линий — линейных токов) токи отсутствуют. Но в отсутствие токов постоянное магнитное поле обладает скалярным потенциалом, удовлетворяющим (в однородной среде) уравнению Лапласа. Между потенциалом магнитного поля и электрическим потенциалом имеется, однако, существенное различие. Потенциал электрического поля всегда является однозначной функцией. Это есть следствие того, что $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ во всем пространстве (в том числе и там, где имеются заряды), и потому изменение потенциала при обходе по любому замкнутому контуру (т. е. циркуляция $\mathbf{E}$ по этому контуру) равно нулю. Циркуляция же магнитного поля по контуру, охватывающему собой линейный ток, отлична от нуля и равна $4\pi J/c$. Поэтому значение потенциала меняется на эту величину при всяком обходе вокруг линии тока, т. е. потенциал магнитного поля является многозначной функцией.

Если система токов сосредоточена в конечной области пространства (а $\mu = 1$ как в проводниках, так и в среде), то вдали от нее векторный потенциал магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathcal{M}\mathbf{R}]}{R^3}, \tag{30.16}$$

где

$$\mathcal{M} = \frac{J}{2c}\int [\mathbf{r}\mathbf{j}]\,dV \tag{30.17}$$

есть полный магнитный момент системы [1]).

[1]) См. II, § 44. В приведенном там выводе использовано в явном виде представление токов как результата движения отдельных заряженных частиц.

Для линейного тока это выражение принимает вид

$$\mathcal{M} = \frac{J}{2c}\oint [\mathbf{r}\,d\mathbf{l}]$$

и может быть преобразовано в интеграл по поверхности, ограниченной контуром тока. Произведение $d\mathbf{f} = [\mathbf{r}\,d\mathbf{l}]/2$ равно по абсолютной величине площади треугольного элемента поверхности, построенного на векторах $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{l}$. Векторный же интеграл $\int d\mathbf{f}$ не зависит от того, по какой именно поверхности (натянутой на заданный контур) он берется. Таким образом, магнитный момент замкнутого линейного тока равен

$$\mathcal{M} = \frac{J}{c}\int d\mathbf{f}. \tag{30.18}$$

В частности, для плоского замкнутого линейного тока магнитный момент равен просто JS/c, где S — площадь ограниченной током части плоскости.

В заключение этого параграфа остановимся еще на вопросе о потоке энергии в проводнике. Диссипируемая в проводнике (в виде джоулева тепла) энергия черпается из энергии электромагнитного поля. В стационарном случае уравнение непрерывности, выражающее собой закон сохранения энергии, имеет вид

$$-\operatorname{div}\mathbf{S} = \mathbf{jE}, \tag{30.19}$$

где $\mathbf{S}$ — плотность потока энергии. Последняя дается внутри проводника выражением

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}], \tag{30.20}$$

формально совпадающим с выражением для вектора Пойнтинга для поля в пустоте. В этом легко убедиться прямой проверкой: вычисление $\operatorname{div}\mathbf{S}$ с использованием уравнений $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ и (30.2) приводит к (30.19).

Независимо от этого вывода, формула (30.20) однозначно следует из очевидного условия непрерывности нормальной компоненты $\mathbf{S}$ на поверхности тела, если при этом учитывать непрерывность $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}_t$ и тот факт, что формула (30.20) справедлива в пустоте вне тела.

З а д а ч и[1])

1. Определить скалярный потенциал магнитного поля замкнутого линейного тока.

Такой вывод обладает, конечно, полной общностью, но формулу (30.16) можно получить и чисто макроскопическим путем (см. задачу 4 к этому параграфу).

[1]) В задачах 1–4 полагаем везде $\mu = 1$.

Р е ш е н и е. Преобразуя интеграл по контуру в интеграл по охватываемой им поверхности, получим

$$\mathbf{A} = \frac{J}{c}\oint \frac{d\mathbf{l}}{R} = \frac{J}{c}\int \left[d\mathbf{f}\,\nabla\frac{1}{R}\right], \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = -\frac{J}{c}\int (d\mathbf{f}\,\nabla)\nabla\frac{1}{R}$$

(при преобразованиях надо учесть, что $\Delta(1/R) = 0$). Сравнивая с $\mathbf{B} = -\operatorname{grad}\psi$, найдем, что скалярный потенциал

$$\psi = \frac{J}{c}\int d\mathbf{f}\,\nabla\frac{1}{R} = -\frac{J}{c}\int\frac{d\mathbf{f}\,\mathbf{R}}{R^3}.$$

Стоящий здесь интеграл представляет собой, геометрически, телесный угол Ω, под которым виден контур из точки наблюдения поля. Упомянутая в тексте многозначность потенциала проявляется в том, что, когда точка наблюдения описывает замкнутый путь, охватывающий провод, угол Ω, достигнув значения 2π, меняет знак, становясь равным -2π.

2. Определить магнитное поле линейного кругового тока (радиуса a).

Р е ш е н и е. Выбираем начало цилиндрической системы координат r, φ, z в центре окружности, причем угол φ отсчитывается от плоскости, проходящей через ось z и точку наблюдения поля. Векторный потенциал имеет только компоненту $A_\varphi = A(r,z)$, и согласно формуле (30.14) пишем

$$A_\varphi = \frac{J}{c}\oint\frac{\cos\varphi\,dl}{R} = \frac{2J}{c}\int\limits_0^\pi \frac{a\cos\varphi\,d\varphi}{(a^2+r^2+z^2-2ar\cos\varphi)^{1/2}}.$$

Вводя новую переменную θ согласно $\varphi = \pi + 2\theta$, можно привести это выражение к виду

$$A_\varphi = \frac{4J}{ck}\sqrt{\frac{a}{r}}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)K - E\right],$$

где

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2+z^2},$$

а K и E — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода:

$$K = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad E = \int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Для компонент индукции находим

$$B_\varphi = 0, \quad B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{J}{c}\frac{2z}{r\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[-K + \frac{a^2+r^2+z^2}{(a-r)^2+z^2}E\right],$$

$$B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) = \frac{J}{c}\frac{2}{\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[K + \frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r)^2+z^2}E\right].$$

Мы воспользовались здесь легко проверяемыми формулами

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}, \qquad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E-K}{k}.$$

На оси ($r = 0$)

$$B_r = 0, \quad B_z = \frac{2\pi a^2 J}{c(a^2+z^2)^{3/2}},$$

что можно получить и непосредственным элементарным расчетом.

3. Определить магнитное поле в цилиндрическом отверстии в цилиндрическом (бесконечно длинном) проводнике, вдоль которого течет ток, равномерно распределенный по его сечению (рис. 18).

Р е ш е н и е. Если бы отверстия не было, поле внутри цилиндра было бы равно

$$H'_x = -\frac{2\pi jy}{c}, \quad H'_y = \frac{2\pi jx}{c}$$

(обозначения размеров и осей координат даны на рисунке).

Если бы по внутреннему цилиндру протекал ток с плотностью $-j$, он создавал бы в той же точке наблюдения поле

$$H''_x = \frac{2\pi jy'}{c}, \quad H''_y = -\frac{2\pi jx'}{c}.$$

Искомое поле в отверстии получается наложением этих двух полей. Заметив, что $x - x' = OO' = h$, $y = y'$, найдем

$$H_x = 0, \quad H_y = \frac{2\pi jh}{c} = \frac{2hJ}{(b^2 - a^2)c},$$

т. е. однородное поле в направлении оси y.

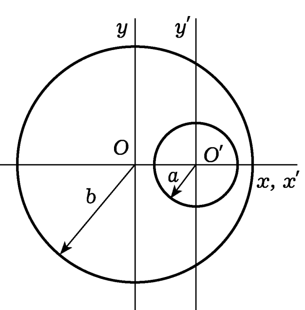


Рис. 18

4. Вывести формулу (30.16) для векторного потенциала поля вдали от токов из формулы (30.12)

Р е ш е н и е. Пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ — радиус-векторы из начала координат, расположенного где-либо в области токов, до точки наблюдения и до элемента dV соответственно. Разлагая подынтегральное выражение по степеням $\mathbf{r}$ и учитывая, что $\int \mathbf{j}\, dV \equiv 0$, получим

$$A_i \approx \frac{R_k}{cR^3} \int x_k j_i \, dV$$

(индекс 0 у R опускаем). Интегрируя по частям тождество

$$\int x_i x_k \operatorname{div} \mathbf{j} \, dV = 0,$$

получим

$$\int (j_i x_k + j_k x_i) \, dV = 0.$$

Поэтому можно переписать A_i в виде

$$A_i = \frac{R_k}{2cR^3} \int (x_k j_i - x_i j_k) \, dV,$$

что совпадает с (30.16).

5. Определить магнитное поле, создаваемое линейным током в магнитно-анизотропной среде (*А.С. Виглин*, 1954).

Р е ш е н и е. В анизотропной среде, окружающей проводник, имеем уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_{ik} \frac{\partial H_k}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

где μ_{ik} — тензор магнитной проницаемости среды. Вместо того чтобы вводить векторный потенциал согласно $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, введем другой вектор, $\mathbf{C}$, определяемый равенством

$$H_i = e_{ikl} \mu_{km} \frac{\partial C_l}{\partial x_m} \tag{2}$$

(e_{ikl} — антисимметрический единичный тензор); выражением (2) уравнение (1) тоже удовлетворяется тождественно. На определенный таким образом вектор $\mathbf{C}$ можно еще наложить дополнительное условие:

$$\operatorname{div}\mathbf{C} \equiv \frac{\partial C_l}{\partial x_l} = 0. \tag{3}$$

Подставив (2) в уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}$, получим

$$e_{ikl}\frac{\partial H_l}{\partial x_k} = -\mu_{kp}\frac{\partial^2 C_i}{\partial x_k \partial x_p} = \frac{4\pi j_i}{c}$$

(при преобразовании использовано равенство

$$e_{ikl}e_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$$

и условие (3)). Полученное таким образом уравнение для $\mathbf{C}$ совпадает по форме с уравнением для потенциала электрического поля, создаваемого зарядами в анизотропной среде (задача 2 § 13). Его решение имеет вид

$$\mathbf{C} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}\,dV}{\sqrt{|\mu|\mu_{ik}^{-1}R_iR_k}}$$

($|\mu|$ — определитель тензора μ_{ik}, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор между точкой наблюдения и dV). Переходя к линейному току, получим окончательно

$$\mathbf{C} = \frac{J}{c\sqrt{|\mu|}}\oint \frac{d\mathbf{l}}{\sqrt{\mu_{ik}^{-1}R_iR_k}}.$$

§ 31. Термодинамические соотношения в магнитном поле

Термодинамические соотношения для магнетика в магнитном поле в своей окончательной форме, как мы увидим, весьма сходны с аналогичными соотношениями для диэлектрика в электрическом поле. Их вывод, однако, существенным образом отличается от того, который был произведен в § 10. Это отличие связано, в конечном итоге, с тем, что магнитное поле, в противоположность электрическому, не производит работы над движущимися в нем зарядами (так как действующая на заряд сила перпендикулярна к его скорости). Поэтому для вычисления изменения энергии среды при включении магнитного поля надо рассматривать электрические поля, индуцирующиеся при изменении магнитного поля, и определять работу, производимую ими над токами (источниками магнитного поля).

Таким образом, необходимо привлечь уравнение, определяющее связь между электрическим и переменным магнитным полями. Это уравнение,

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{31.1}$$

является непосредственным результатом усреднения микроскопического уравнения (1.3).

В течение времени δt поле $\mathbf{E}$ производит над токами $\mathbf{j}$ работу, равную

$$\delta t \int \mathbf{jE}\, dV.$$

Эта же величина, взятая с обратным знаком, есть работа δR, произведенная «над полем» со стороны той внешней электродвижущей силы, которая является источником, поддерживающим протекание токов. Подставив $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}$, получим

$$\delta R = -\delta t \frac{c}{4\pi}\int \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}\, dV = \\ = \delta t \frac{c}{4\pi}\int \operatorname{div}[\mathbf{EH}]\, dV - \delta t \frac{c}{4\pi}\int \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}\, dV.$$

Первый интеграл, будучи преобразован в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, обращается в нуль. Во втором же подставляем $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ из (31.1) и, вводя изменение $\delta\mathbf{B} = \delta t\, \partial\mathbf{B}/\partial t$ магнитной индукции, получаем окончательно

$$\delta R = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\, \delta\mathbf{B}\, dV. \qquad (31.2)$$

Эта формула по виду вполне аналогична выражению (10.2) для работы при бесконечно малом изменении электрического поля. Следует, однако, заметить, что физическая аналогия между этими двумя формулами в действительности не так глубока, поскольку $\mathbf{H}$, в противоположность $\mathbf{E}$, не есть среднее значение истинной микроскопической напряженности поля.

После получения формулы (31.2) все термодинамические соотношения для магнетика в магнитном поле могут быть написаны аналогично тому, как были написаны в § 10 соотношения для диэлектрика в электрическом поле; достаточно заменить в них обозначения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ соответственно на $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$. Выпишем здесь для дальнейших ссылок некоторые из этих формул. Для дифференциалов полных свободной и внутренней энергий имеем

$$\delta\mathscr{F} = -\mathscr{S}\,\delta T + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\,\delta\mathbf{B}\, dV, \\ \delta\mathscr{U} = T\,\delta\mathscr{S} + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\,\delta\mathbf{B}\, dV, \qquad (31.3)$$

а для этих же величин, отнесенных к единице объема:

$$dF = -S\, dT + \zeta\, d\rho + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\, d\mathbf{B}, \\ dU = T\, dS + \zeta\, d\rho + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\, d\mathbf{B}. \qquad (31.4)$$

Наряду с F, U нам понадобятся также термодинамические потенциалы

$$\widetilde{U} = U - \frac{\mathbf{HB}}{4\pi}, \quad \widetilde{F} = F - \frac{\mathbf{HB}}{4\pi}, \qquad (31.5)$$

для которых

$$d\widetilde{F} = -S\,dT + \zeta\,d\rho - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\,d\mathbf{H},$$
$$d\widetilde{U} = T\,dS + \zeta\,d\rho - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\,d\mathbf{H}. \tag{31.6}$$

При линейной связи $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ можно написать выражения для всех величин в конечном виде:

$$U = U_0(S,\rho) + \frac{B^2}{8\pi\mu}, \quad F = F_0(T,\rho) + \frac{B^2}{8\pi\mu},$$
$$\widetilde{U} = U_0(S,\rho) - \frac{\mu H^2}{8\pi}, \quad \widetilde{F} = F_0(T,\rho) - \frac{\mu H^2}{8\pi}. \tag{31.7}$$

Работу δR (или, что то же, изменение $\delta\mathscr{F}$ при постоянной температуре) можно выразить в другом виде, через плотность токов и векторный потенциал магнитного поля. Для этого полагаем $\delta\mathbf{B} = \operatorname{rot}\delta\mathbf{A}$ и пишем

$$(\delta\mathscr{F})_T = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\operatorname{rot}\delta\mathbf{A}\,dV =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}[\mathbf{H}\,\delta\mathbf{A}]\,dV + \frac{1}{4\pi}\int \delta\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H}\,dV.$$

Первый интеграл снова обращается в нуль, а второй дает

$$(\delta\mathscr{F})_T = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\delta\mathbf{A}\,dV. \tag{31.8}$$

Аналогичным преобразованием можно получить

$$(\delta\widetilde{\mathscr{F}})_T = -\frac{1}{c}\int \mathbf{A}\,\delta\mathbf{j}\,dV. \tag{31.9}$$

Полезно отметить, что в математическом формализме макроскопической электродинамики токи — источники магнитного поля — играют роль, аналогичную роли потенциалов (а не зарядов) источников электрического поля. Это правило ясно проявляется при сопоставлении формул (31.8) и (31.9) с аналогичными формулами в электрическом поле

$$(\delta\mathscr{F})_T = \int \varphi\,\delta\rho\,dV, \quad (\delta\widetilde{\mathscr{F}})_T = -\int \rho\,\delta\varphi\,dV \tag{31.10}$$

(см. (10.13), (10.14)). Мы видим, что заряды и потенциалы расположены в этих формулах обратным образом по сравнению с токами и потенциалами в формулах (31.8), (31.9) [1]).

Ввиду полного формального совпадения термодинамических соотношений (выраженных через напряженность и индукцию) в

[1]) Подробнее о смысле этого различия — см. примеч. 2 на с. 184.

электрическом и магнитном полях непосредственно переносятся на магнитное поле также и полученные в § 18 термодинамические неравенства. Мы видели, в частности, что из них следует неравенство $\varepsilon > 0$. В электрическом случае это неравенство не представляло интереса, поскольку оно слабее условия $\varepsilon > 1$, следовавшего из других соображений. Но в магнитном случае аналогичное неравенство

$$\mu > 0$$

весьма существенно, так как оно является единственным ограничением, накладываемым на возможные значения магнитной проницаемости.

§ 32. Полная свободная энергия магнетика

В § 11 были получены выражения для полной свободной энергии $\mathscr{F}$ диэлектрика в электрическом поле. Один из термодинамических аспектов этой величины заключается в том, что ее изменение определяет работу, произведенную электрическим полем над телом при неизменных источниках (зарядах), создающих это поле. В магнитном же поле аналогичную роль играет свободная энергия $\widetilde{\mathscr{F}}$, так как при заданных источниках (токах) поля именно ее изменение дает произведенную над телом работу.

Следующий ниже вывод полностью аналогичен тому, который был произведен в § 11. «Полную» величину $\widetilde{\mathscr{F}}$ мы определяем как

$$\widetilde{\mathscr{F}} = \int \left(\widetilde{F} + \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi} \right) dV, \qquad (32.1)$$

где $\mathfrak{B}$ — магнитное поле, которое создавали бы данные источники в отсутствие намагничивающейся среды. Знак $+$ в скобке (вместо знака $-$ в (11.1)) связан с тем, что значение $\widetilde{\mathscr{F}}$ для магнитного поля в пустоте есть

$$-\int \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi}\, dV$$

(см. (31.7)). Интегрирование в (32.1) производится по всему пространству, включая объем проводников, несущих токи, которые создают поле[1]).

[1]) В § 11 мы считали, что интегрирование в (11.1) производится по всему пространству, исключая объем заряженных проводников, создающих поле. Там можно было так делать, поскольку внутри заряженного проводника электрическое поле все равно отсутствует. Магнитное же поле имеется и внутри проводников, несущих токи, и исключать его при вычислении полной свободной энергии нельзя.

Вычислим изменение $\widetilde{\mathscr{F}}$ (при заданной температуре и без нарушения термодинамического равновесия среды) при бесконечно малом изменении поля. Поскольку $\delta\widetilde{F} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\,\delta\mathbf{H}$, то имеем

$$\delta\widetilde{\mathscr{F}} = -\frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{B}\,\delta\mathbf{H} - \mathfrak{B}\,\delta\mathfrak{B})\,dV = \\ = -\frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{H} - \mathfrak{B})\delta\mathfrak{B}\,dV - \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{B}(\delta\mathbf{H} - \delta\mathfrak{B})\,dV - \\ - \frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{B} - \mathbf{H})\delta\mathfrak{B}\,dV. \quad (32.2)$$

Вводя векторный потенциал $\mathfrak{A}$ поля $\mathfrak{B}$ пишем в первом члене

$$(\mathbf{H} - \mathfrak{B})\delta\mathfrak{B} = (\mathbf{H} - \mathfrak{B})\,\mathrm{rot}\,\delta\mathfrak{A} = \\ = \mathrm{div}\,[\delta\mathfrak{A}(\mathbf{H} - \mathfrak{B})] + \delta\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}(\mathbf{H} - \mathfrak{B}).$$

Но поля $\mathbf{H}$ и $\mathfrak{B}$ создаются, по определению, одними и теми же токами $\mathbf{j}$, распределение которых по объему проводников не зависит (см. § 30) от создаваемого ими же поля, т. е. не зависит от наличия или отсутствия магнетиков в окружающем пространстве. Поэтому $\mathbf{H}$ и $\mathfrak{B}$ удовлетворяют одинаковым уравнениям

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

так что $\mathrm{rot}(\mathbf{H} - \mathfrak{B}) = 0$. Интеграл же от $\mathrm{div}\,[\delta\mathfrak{A}(\mathbf{H} - \mathfrak{B})]$ преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль.

Аналогичным образом убеждаемся в том, что равен нулю и второй член в (32.2), так что

$$\delta\widetilde{\mathscr{F}} = -\frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{B} - \mathbf{H})\delta\mathfrak{B}\,dV = -\int \mathbf{M}\delta\mathfrak{B}\,dV. \quad (32.3)$$

Таким образом, мы получили для $\delta\widetilde{\mathscr{F}}$ выражение, аналогичное выражению (11.3) для $\delta\mathscr{F}$ в электрическом случае. В частности, в однородном внешнем магнитном поле $\mathfrak{B}$ имеем для $d\widetilde{\mathscr{F}}$ выражение, аналогичное (11.5):

$$d\widetilde{\mathscr{F}} = -\mathscr{S}\,dT - \mathscr{M}\,d\mathfrak{B}, \quad (32.4)$$

где $\mathscr{M}$ — полный магнитный момент тела.

Не повторяя дальнейших вычислений, напишем следующие формулы по аналогии с формулами в § 11. При линейной связи $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ имеем

$$\widetilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0(V, T) = -\int \frac{1}{2}\mathfrak{B}\mathbf{M}\,dV. \quad (32.5)$$

В частности, в однородном внешнем поле

$$\widetilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0(V,T) = -\frac{1}{2}\mathfrak{B}\mathscr{M}. \tag{32.6}$$

В общем же случае произвольной зависимости **B** от **H** для вычисления $\widetilde{\mathscr{F}}$ можно пользоваться формулой

$$\widetilde{\mathscr{F}} = \int\left(\widetilde{F} + \frac{\mathbf{HB}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathscr{M}\mathfrak{B}\right) dV = \int\left(F - \frac{\mathbf{HB}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathscr{M}\mathfrak{B}\right) dV, \tag{32.7}$$

аналогичной формуле (11.12) для диэлектриков.

В § 11 были указаны также упрощенные формулы, относящиеся к случаю малой диэлектрической восприимчивости. Аналогичный случай для магнитного поля особенно существен ввиду упоминавшейся уже малости магнитной восприимчивости большинства тел. При этом имеем

$$\widetilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0 = -\frac{\chi}{2}\int \mathfrak{B}^2\, dV. \tag{32.8}$$

Для магнитного поля можно получить также и результаты, аналогичные результатам § 14. Речь идет об изменении термодинамических величин магнетика при бесконечно малом изменении его магнитной проницаемости μ; источники поля предполагаются при этом неизменными. После всего сказанного выше заранее ясно, что вместо изменения $\mathscr{F}$ (как в § 14) надо рассматривать теперь изменение $\widetilde{\mathscr{F}}$. Мы не станем повторять здесь вывода, аналогичного выводу формулы (14.1). Он приводит к тому же результату:

$$\delta\widetilde{\mathscr{F}} = -\int \delta\mu \frac{H^2}{8\pi}\, dV. \tag{32.9}$$

В § 14 на основании формулы (11.7), аналогичной формуле (32.5), было сделано заключение о положительности электрической восприимчивости вещества. В магнитном случае, однако, такой вывод не может быть сделан, и магнитная восприимчивость может иметь оба знака. Причина этого существенного различия заключается в том, что гамильтониан системы движущихся зарядов в магнитном поле содержит не только члены, линейные по полю (как в электрическом случае), но и квадратичные члены. Поэтому при определении изменения свободной энергии тела в магнитном поле с помощью теории возмущений по формуле (14.2) вклад будут давать не только члены второго, но и первого приближения. Никаких общих заключений о знаке изменения при этом нельзя сделать; у парамагнитных тел оно положительно, у диамагнитных — отрицательно.

В § 14 были сделаны заключения о направлении движения тел в электрическом поле. Аналогичные выводы следуют также

и из формулы (32.9). Однако ввиду того, что μ может быть как больше, так и меньше 1, направление движения тел в магнитном поле не универсально. Так, в квазиоднородном поле парамагнитные тела ($\mu > 1$) перемещаются в направлении увеличения напряженности, а диамагнитные тела ($\mu < 1$) — в направлении уменьшения H.

§ 33. Энергия системы токов

Рассмотрим систему проводников с текущими по ним токами. Предположим, что ни сами проводники, ни среда, в которой они находятся, не ферромагнитны, так что везде $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Согласно § 31 полная свободная энергия системы выражается через создаваемое токами магнитное поле следующим соотношением:

$$\mathscr{F} = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{H}\mathbf{B}\, dV. \tag{33.1}$$

Мы опустили здесь постоянную (при заданной температуре тел) величину $\mathscr{F}_0$, не имеющую отношения к токам. Интегрирование в (33.1) производится по всему пространству, как внутри, так и вне проводников.

Эту же энергию можно выразить и через токи интегралом

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c}\int \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV \tag{33.2}$$

(ср. переход от (31.2) к (31.8)). Интегрирование производится здесь уже только по объему проводников, так как вне их $\mathbf{j} = 0$.

В силу линейности уравнений поля магнитное поле можно представить в виде суммы полей, которые создавались бы каждым током в отдельности, если бы в остальных проводниках токи отсутствовали $\mathbf{H} = \sum \mathbf{H}_a$. Тогда полная свободная энергия (33.1) примет вид

$$\mathscr{F} = \sum_a \mathscr{F}_{aa} + \sum_{a>b} \mathscr{F}_{ab}, \tag{33.3}$$

где

$$\mathscr{F}_{aa} = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{H}_a\mathbf{B}_a\, dV, \quad \mathscr{F}_{ab} = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}_a\mathbf{B}_b\, dV \tag{33.4}$$

(в $\mathscr{F}_{ab} = \mathscr{F}_{ba}$ учтено, что $\mathbf{H}_a\mathbf{B}_b = \mu\mathbf{H}_a\mathbf{H}_b = \mathbf{H}_b\mathbf{B}_a$, где μ — магнитная проницаемость в каждой данной точке пространства). Величину $\mathscr{F}_{aa}$ можно назвать собственной свободной энергией токов a-го проводника, а $\mathscr{F}_{ab}$ — энергией взаимодействия проводников a и b. Надо, впрочем, иметь в виду, что такие названия имеют буквальный смысл, лишь если пренебречь магнитными

свойствами вещества как самих проводников, так и среды. В противном случае поле (а потому и энергия) каждого тока зависит также и от расположения и магнитной проницаемости остальных проводников.

Величины (33.4) можно выразить также и через токи $\mathbf{j}_a$ в каждом из проводников, в соответствии с формулой (33.2),

$$\mathscr{F}_{aa} = \frac{1}{2c}\int \mathbf{j}_a \mathbf{A}_a \, dV_a, \quad \mathscr{F}_{ab} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}_a \mathbf{A}_b \, dV_a = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}_b \mathbf{A}_a \, dV_b. \tag{33.5}$$

Интеграл в $\mathscr{F}_{aa}$ берется здесь только по объему a-го проводника, а $\mathscr{F}_{ab}$ представляется в виде любого из двух выражений, в которых интегрирование производится соответственно по объему проводника a или b.

При заданном законе распределения плотности тока по объему проводника значение $\mathscr{F}_{aa}$ зависит только от полной силы тока J_a, протекающего через его поперечное сечение. При этом величине J_a будут пропорциональны как плотность $\mathbf{j}$, так и создаваемое током поле. Поэтому весь интеграл $\mathscr{F}_{aa}$ пропорционален J_a^2. Его пишут в виде

$$\mathscr{F}_{aa} = \frac{1}{2c^2} L_{aa} J_a^2, \tag{33.6}$$

где L_{aa} называют *коэффициентом самоиндукции* проводника. Аналогичным образом энергия взаимодействия двух токов пропорциональна произведению $J_a J_b$:

$$\mathscr{F}_{ab} = \frac{1}{c^2} L_{ab} J_a J_b. \tag{33.7}$$

Величину L_{ab} называют *коэффициентом взаимной индукции* проводников. Таким образом, полная свободная энергия системы токов

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c^2}\sum_a L_{aa} J_a^2 + \frac{1}{c^2}\sum_{a>b} L_{ab} J_a J_b = \frac{1}{2c^2}\sum_a \sum_b L_{ab} J_a J_b. \tag{33.8}$$

Условие положительной определенности этой квадратичной формы накладывает ряд ограничений на значения коэффициентов. В частности, все $L_{aa} > 0$, а

$$L_{aa} L_{bb} > L_{ab}^2.$$

Вычисление энергии токов в общем случае произвольных массивных проводников требует полного решения уравнений поля и представляет собой сложную задачу. Она упрощается, если магнитную проницаемость как самих проводников, так и среды можно положить равной единице. Отметим, что при этом энергия токов вообще перестает зависеть от термодинамического состояния (в частности, от температуры) тел, а потому во всех написанных

выше формулах можно с одинаковым правом говорить как о свободной энергии, так и просто об энергии.

При $\mu=1$ векторный потенциал поля, создаваемого токами $\mathbf{j}$, дается формулой (30.12). Поэтому для собственной энергии проводника получим

$$F_{aa} = \frac{1}{2c^2} \iint \frac{\mathbf{j}\mathbf{j}'}{R}\, dV\, dV', \tag{33.9}$$

где оба интегрирования производятся по объему данного проводника, а R есть расстояние между dV и dV'. Аналогичным образом, взаимная энергия двух проводников

$$\mathscr{F}_{ab} = \frac{1}{c^2} \iint \frac{\mathbf{j}_a\mathbf{j}_b}{R}\, dV_a\, dV_b, \tag{33.10}$$

где dV_a и dV_b элементы объема каждого из проводников.

Особенно просто вычисляется взаимная энергия двух линейных токов. Переход от объемных токов к линейным в формуле (33.10) осуществляется заменой $\mathbf{j}_a\, dV_a$ и $\mathbf{j}_b\, dV_b$ соответственно на $J_a\, d\mathbf{l}_a$ и $J_b\, d\mathbf{l}_b$, и мы находим, что коэффициент взаимной индукции есть

$$L_{ab} = \oint\oint \frac{d\mathbf{l}_a\, d\mathbf{l}_b}{R}.$$

В этом приближении, следовательно, L_{ab} зависит только от формы, размеров и взаимного расположения обоих контуров и не зависит от распределения тока по сечению проводов. Подчеркнем, что для получения такой простой формулы в случае линейных проводников не требуется даже предположения о том, что везде $\mu = 1$. В приближении, в котором мы пренебрегаем толщиной проводов, магнитные свойства их материала вообще не влияют на создаваемое ими поле, а потому и на их взаимную энергию. Отличная же от 1 магнитная проницаемость μ среды, окружающей провода, согласно (30.15) просто увеличивает в μ раз векторный потенциал (а с ним и индукцию) магнитного поля. Во столько же раз увеличится, следовательно, и коэффициент взаимной индукции, так что будет

$$L_{ab} = \mu \oint\oint \frac{d\mathbf{l}_a\, d\mathbf{l}_b}{R}. \tag{33.11}$$

Что касается коэффициента самоиндукции линейных проводников, то его вычисление представляет значительно бóльшие трудности; этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.

Полную энергию системы линейных токов можно написать еще и в другом виде. Для этого вернемся к интегралу (33.2), который для линейных токов принимает вид

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \oint \mathbf{A}\, d\mathbf{l}_a, \tag{33.12}$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал полного поля в точке $d\mathbf{l}_a$ a-го проводника. Основная погрешность, которую мы допускаем при переходе от (33.2) к (33.12), заключается в пренебрежении изменением поля (в том числе собственного поля данного тока) вдоль поперечного сечения провода. Каждый из стоящих в (33.12) контурных интегралов преобразуется в интеграл по поверхности:

$$\oint \mathbf{A}\, d\mathbf{l}_a = \int \operatorname{rot}\mathbf{A}\, d\mathbf{f}_a = \int \mathbf{B}\, d\mathbf{f}_a,$$

т. е. представляет собой поток магнитной индукции (или, как говорят, *магнитный поток*) через контур a-го тока. Будем обозначать этот поток через Φ_a. Таким образом,

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c}\sum_a J_a\Phi_a. \tag{33.13}$$

Аналогичным образом выражается через магнитный поток свободная энергия $\tilde{\mathscr{F}}$ линейного тока J во внешнем магнитном поле, т. е. энергия, в которую не включается собственная энергия источников поля. Очевидно, что

$$\tilde{\mathscr{F}} = \frac{1}{c}J\Phi, \tag{33.14}$$

где Φ есть поток внешнего поля через контур тока J. Если внешнее поле однородно (а у среды $\mu = 1$), то $\Phi = \mathfrak{B}\int d\mathbf{f}$. Вводя магнитный момент тока согласно (30.18), получим $\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{M}\mathfrak{B}$.

Зная энергию системы токов как функцию их размеров, формы и взаимного расположения, можно определить действующие на проводники силы просто путем дифференцирования по соответствующим координатам. При этом, однако, возникает вопрос о том, какие характеристики токов надо при дифференцировании полагать постоянными. Наиболее удобно производить вычисления при постоянных токах. Но в этом случае роль свободной энергии играет величина $\widetilde{\mathscr{F}}$. Поэтому обобщенная сила F_q , действующая «вдоль» обобщенной координаты q, есть

$$F_q = -\left(\frac{\partial\widetilde{\mathscr{F}}}{\partial q}\right)_{J,T}.$$

Индексы у производной означают, что дифференцирование производится при постоянных силах тока и постоянной температуре тел. Поскольку мы опускаем в свободной энергии постоянную часть, не зависящую от токов, то $\mathscr{F}$ и $\widetilde{\mathscr{F}}$ различаются только знаком, так что

$$F_q = -\left(\frac{\partial\widetilde{\mathscr{F}}}{\partial q}\right)_J = \left(\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial q}\right)_J = \frac{1}{2c^2}\sum_{ab} J_aJ_b\frac{\partial L_{ab}}{\partial q} \tag{33.15}$$

(индекс T у производных здесь и ниже для краткости опускаем).

В частности, силы, действующие на проводник со стороны его собственного магнитного поля, определяются по формуле

$$F_q = \frac{1}{2c^2} J^2 \frac{\partial L}{\partial q}, \tag{33.16}$$

где L — самоиндукция проводника. Характер действия этих сил заранее очевиден из следующих соображений. При заданном значении силы тока (и температуры) величина $\widetilde{\mathscr{F}}$ стремится к минимуму. Поскольку в данном случае $\widetilde{\mathscr{F}} = -LJ^2/2c^2$, то это значит, что действующие на проводник силы будут стремиться увеличить его коэффициент самоиндукции. Но последний как величина с размерностью длины пропорционален размерам проводника. Таким образом, под влиянием магнитного поля объем проводника увеличивается.

Для тока во внешнем магнитном поле имеем [1])

$$\widetilde{\mathscr{F}} = -\mathscr{F} = -\mathscr{M}\mathfrak{B}. \tag{33.17}$$

Во всех написанных выше формулах для энергии предполагается линейная связь между индукцией и напряженностью магнитного поля. В общем же случае произвольной связи можно установить аналогичные дифференциальные соотношения. Изменение свободной энергии при бесконечно малом изменении поля (при постоянной температуре) есть согласно (31.8)

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\,\delta\mathbf{A}\,dV$$

или, для системы линейных токов,

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{c}\sum_c J_a \oint \delta\mathbf{A}\,d\mathbf{l}_a.$$

Поступая далее так же, как при переходе от (33.12) к (33.13), получим [2])

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{c}\sum_a J_a \delta\Phi_a. \tag{33.18}$$

---

[1]) Отсутствие здесь (по сравнению с формулой (32.6)) множителя 1/2 связано с тем, что магнитный момент тока в (33.17) есть постоянная величина, не зависящая от поля, между тем как фигурирующий в (32.6) магнитный момент магнетика сам возникает только под действием поля.

[2]) Отметим очевидную аналогию между формулами (33.18) в магнитном и (10.13) в электрическом случаях. При этом роль зарядов в магнитном случае играют потоки индукции. Эта аналогия имеет наглядное физическое истолкование. Подобно тому, как электрическое поле может поддерживаться без затраты энергии извне зарядами на изолированных проводниках, магнитное поле можно поддерживать без подвода энергии извне сверхпроводящими соленоидами, магнитные потоки через которые остаются постоянными. Естественно поэтому, что изменение свободной энергии $\mathscr{F}$ в электрическом и магнитном случаях определяется соответственно изменениями зарядов или потоков индукции.

Аналогичным образом найдем из (31.9)

$$\delta\widetilde{\mathscr{F}} = -\frac{1}{c}\sum_a \Phi_a \delta J_a. \tag{33.19}$$

Можно сказать, что для системы линейных токов $\mathscr{F}$ является термодинамическим потенциалом по отношению к магнитным потокам, а $\widetilde{\mathscr{F}}$ — по отношению к силам токов, причем эти два потенциала связаны друг с другом соотношением

$$\widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} - \frac{1}{c}\sum_a J_a \Phi_a. \tag{33.20}$$

Таким образом, при любых магнитных свойствах вещества справедливы термодинамические соотношения

$$\frac{1}{c}J_a = \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \Phi_a}, \quad \frac{1}{c}\Phi_a = -\frac{\partial \widetilde{\mathscr{F}}}{\partial J_a}. \tag{33.21}$$

Если применить эти формулы к случаю линейной связи, когда $\mathscr{F}$ дается формулой (33.8), то мы получим

$$\Phi_a = \frac{1}{c}\sum_b L_{ab} J_b. \tag{33.22}$$

Таким образом, коэффициенты индукции оказываются коэффициентами пропорциональности между магнитным потоком и силами токов, создающих магнитное поле. Произведение $L_{ab}J_b/c$ есть магнитный поток, создаваемый током J_b $(b \neq a)$ через контур тока J_a, а $L_{aa}J_a/c$ — поток через тот же контур, создаваемый самим током J_a.

§ 34. Самоиндукция линейных проводников

При вычислении коэффициента самоиндукции линейного проводника нельзя полностью пренебречь его толщиной, как мы это делали для вычисления взаимной индукции двух проводников. Сделав так, мы получили бы из (33.9) самоиндукцию в виде

$$L = \oint\oint \frac{d\mathbf{l}\, d\mathbf{l}'}{R},$$

где оба интеграла берутся по одному и тому же контуру; но этот интеграл логарифмически расходится при $R \to 0$.

Точное значение самоиндукции проводника зависит от распределения тока в нем, которое может быть различным в зависимости от способа возбуждения тока, т. е. от того, каким образом приложена к нему электродвижущая сила. Но для линейного

провода самоиндукция оказывается не зависящей от закона распределения тока по его сечению [1]) с довольно большой степенью точности.

Представим самоиндукцию в виде суммы $L = L_e + L_i$, где L_e и L_i связаны с энергией магнитного поля соответственно вне и внутри проводника. У линейного провода основную часть самоиндукции составляет «внешняя» часть L_e. Это связано с тем, что основная часть магнитной энергии замкнутого линейного контура заключена в поле вне провода на больших (по сравнению с его толщиной) расстояниях. Действительно, энергия, приходящаяся на единицу длины неограниченно длинного прямого провода, дается интегралом

$$\frac{\mu_e}{8\pi}\int H^2\cdot 2\pi r\,dr = \frac{\mu_e}{8\pi}\int\left(\frac{2J}{cr}\right)^2\cdot 2\pi r\,dr = \frac{\mu_e J^2}{c^2}\int\frac{dr}{r}$$

(r — расстояние от оси провода, μ_e — магнитая проницаемость внешней среды). Этот интеграл логарифмически расходится при больших r. Для замкнутого линейного контура эта расходимость, разумеется, исчезнет — интеграл «обрежется» на расстояниях порядка величины размеров контура. Мы получим приближенное значение энергии, умножив написанный интеграл на полную длину провода l и взяв для верхнего предела значение l (нижний же предел равен радиусу a провода):

$$\frac{\mu_e J^2}{c^2}\,l\ln\frac{l}{a}.$$

Отсюда самоиндукция

$$L = 2\mu_e l\ln\frac{l}{a}. \tag{34.1}$$

Это выражение обладает, как говорят, *логарифмической точностью*; его относительная погрешность — порядка величины $1/\ln(l/a)$, а отношение l/a предполагается настолько большим, что и его логарифм велик [2]).

[1]) Точнее, от распределений, при которых плотность тока существенно меняется лишь на расстояниях, сравнимых с толщиной a провода. Если же распределение таково, что плотность тока заметно меняется на расстояниях, малых по сравнению с a (как это имеет место в силу специальных причин при так называемом скин-эффекте или у сверхпроводников), то самоиндукция провода меняется.

[2]) Сделанное выше утверждение о независимости самоиндукции от распределения тока относится в действительности не только к приближенному выражению (34.1), но и к следующему приближению, в котором учитываются члены, не содержащие большого логарифма (что эквивалентно учету в аргументе логарифма коэффициента при l/a); см. задачи к этому параграфу.

Особым случаем линейных проводников является катушка (*соленоид*), в которой провод намотан по спирали с очень близко расположенными друг к другу витками. Пренебрегая толщиной провода и расстояниями между витками, мы получим просто цилиндрическую проводящую поверхность, по которой течет «поверхностный» ток проводимости. Уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$ внутри проводника заменяется при таком рассмотрении граничным условием

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{g}, \tag{34.2}$$

где $\mathbf{g}$ — поверхностная плотность тока, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ — напряженности поля по обе стороны поверхности соленоида, а нормаль $\mathbf{n}$ направлена внутрь среды *2* (ср. вывод формулы (29.16)).

Если соленоид представляет собой бесконечный цилиндр, то создаваемое им магнитное поле определяется совсем просто. Поверхностные токи циркулярны, а их плотность $g = nJ$, где J — ток текущий по проводу, а n — число витков на единицу длины соленоида. Поле вне цилиндра равно нулю, а внутри имеется однородное поле, направленное вдоль оси цилиндра и равное

$$H = \frac{4\pi}{c}nJ.$$

Действительно, такое поле очевидным образом удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ во всем пространстве вне проводящей поверхности, а также граничному условию (34.2) на ней.

Соответственно, энергия поля, отнесенная к единице длины цилиндра, есть

$$\frac{\mu_e H^2}{8\pi}\pi b^2 = \frac{2\pi^2 n^2 b^2 \mu_e}{c^2}J^2$$

(b — радиус цилиндра, μ_e относится к среде, заполняющей соленоид). Пренебрегая искажением поля на концах, можно применить эту формулу и к соленоиду конечной большой (по сравнению с b) длины h. Тогда для самоиндукции получим

$$L = 4\pi^2 n^2 b^2 h\mu_e = 2\pi\mu_e nbl, \tag{34.3}$$

где $l = 2\pi bnh$ — полная длина провода в катушке. Увеличение самоиндукции соленоида по сравнению с самоиндукцией невитого провода той же длины (ср. (34.3) с (34.1)) является естественным следствием взаимной индукции между близко расположенными витками.

Задачи[1])

1. Определить самоиндукцию замкнутого тонкого провода с круговой формой сечения.

---

[1]) В задачах 1–6 полагаем магнитную проницаемость среды $\mu_e = 1$.

Решение. Магнитное поле внутри провода можно принять таким, как внутри бесконечно прямого цилиндра:

$$H = \frac{2Jr}{ca^2}$$

(r — расстояние от оси провода, a — его радиус). Отсюда находим внутреннюю часть самоиндукции:

$$L_i = \frac{2c^2}{J^2}\frac{\mu_i}{8\pi}\int H^2\,dV = \frac{l\mu_i}{2}, \tag{1}$$

где l — длина рассматриваемого замкнутого провода.

Для вычисления L_e замечаем, что поле вне тонкого провода не зависит от распределения тока по его сечению. В частности, энергия $\mathscr{F}_e$ внешнего магнитного поля не изменится, если предположить, что ток течет только по поверхности провода. Но тогда внутри провода будет $\mathbf{H} = 0$ и можно вычислять энергию $\mathscr{F}_e$, как полную энергию, по формуле (33.2).

Ввиду предположенного поверхностного распределения токов интеграл в этой формуле фактически сводится к линейному интегралу по контуру осевой линии провода, так что внешняя часть самоиндукции

$$L_e = \frac{2c^2}{J^2}\frac{J}{2c}\oint \mathbf{A}\Big|_{r=a} dl,$$

где значение $\mathbf{A}$ в подынтегральном выражении берется на поверхности провода. При переходе к этой формуле учтено также, что в рассматриваемом приближении поле постоянно вдоль контура кругового сечения провода.

После того, как задача оказалась сведенной к вычислению $\mathbf{A}\,|_{r=a}$, сделаем другое предположение о распределении тока: пусть весь ток J течет вдоль осевой линии провода. Значение поля на поверхности провода в рассматриваемом приближении от этого не изменится (оно не изменилось бы вовсе у прямого провода кругового сечения). Тогда согласно формуле (30.14) имеем

$$\mathbf{A}\Big|_{r=a} = \frac{J}{c}\oint \frac{d\mathbf{l}}{R}\Big|_{r=a},$$

где R — расстояние от элемента $d\mathbf{l}$ осевой линии провода до данной точки его поверхности. Разобьем интеграл на две части, в которых соответственно $R > \Delta$ и $R < \Delta$, где Δ — некоторая длина, малая по сравнению с размерами контура тока, но большая по сравнению с радиусом a провода[1]). В интеграле по области $R > \Delta$ можно пренебречь a и понимать R как расстояние между двумя точками контура тока. Интеграл же по области $R < \Delta$ можно считать направленным по касательной к данной точке контура. Обозначив единичный вектор в этом направлении через $\mathbf{t}$, пишем

$$\int\limits_{R<\Delta} \frac{d\mathbf{l}}{R}\Big|_{r=a} \approx \mathbf{t}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dl}{\sqrt{a^2+l^2}} = 2\mathbf{t}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\Delta}{a} \approx 2\mathbf{t}\ln\frac{2\Delta}{a}.$$

Это выражение можно снова переписать в виде интеграла

$$2\mathbf{t}\ln\frac{2\Delta}{a} \approx \int\limits_{\Delta>R>a/2} \frac{d\mathbf{l}}{R},$$

[1]) Аналогичный метод был применен в задаче 4 § 2 для вычисления емкости тонкого кольца.

где теперь уже R снова понимается как расстояние между точками контура тока. Таким образом, складывая с интегралом по области $R > \Delta$, получим выражение

$$\mathbf{A}\big|_{r=a} = \frac{J}{c} \int\limits_{R>a/2} \frac{d\mathbf{l}}{R},$$

из которого произвольный параметр Δ, как и должно быть, выпадает.

Таким образом, окончательно имеем

$$L_e = \iint\limits_{R>a/2} \frac{d\mathbf{l}\, d\mathbf{l}'}{R}. \tag{2}$$

Интегрирование распространяется здесь по всем парам точек контура, расстояние между которыми превышает $a/2$.

2. Определить самоиндукцию тонкого кольца (радиуса b) из провода кругового сечения (радиуса a).

Р е ш е н и е. Подынтегральное выражение в формуле (2) задачи 1 зависит только от центрального угла φ, на который опирается хорда R окружности кольца, причем $R = 2b\sin(\varphi/2)$, а $d\mathbf{l}\, d\mathbf{l}' = dl \cdot dl' \cos\varphi$. Поэтому имеем

$$L_e = 2\int\limits_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos\varphi \cdot 2\pi b \cdot b\, d\varphi}{2b\sin\dfrac{\varphi}{2}} = 4\pi b\left[-\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{4} - 2\cos\frac{\varphi_0}{2}\right].$$

Нижний предел интегрирования определяется из $2b\sin(\varphi_0/2) = a/2$, откуда $\varphi_0 \approx a/2b$. Подставив это значение и сложив с $L_i = \pi b\mu_i$, получим с требуемой точностью $L = 4\pi b\left(\ln\dfrac{8b}{a} - 2 + \dfrac{\mu_i}{4}\right)$. В частности, при $\mu_i = 1$ $L = 4\pi b\left(\ln\dfrac{8b}{a} - \dfrac{7}{4}\right)$.

3. Определить растяжение кольцевого провода (с $\mu_i = 1$) под действием магнитного поля протекающего по нему тока.

Р е ш е н и е. Внутренние напряжения, действующие вдоль оси провода и перпендикулярно к ней, определяются согласно (33.16) формулами

$$\pi a^2\sigma_{\|} = \frac{J^2}{2c^2}\frac{\partial L}{\partial(2\pi b)}, \quad 2\pi ab\sigma_{\perp} = \frac{J^2}{2c^2}\frac{\partial L}{\partial a}.$$

Подставив L из предыдущей задачи, получим

$$\sigma_{\|} = \frac{J^2}{\pi a^2c^2}\left(\ln\frac{8b}{a} - \frac{3}{4}\right), \quad \sigma_{\perp} = -\frac{J^2}{a^2c^2}.$$

Отсюда искомое относительное удлинение кольца

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{E}(\sigma_{\|} - 2\sigma\sigma_{\perp}) = \frac{J^2}{\pi a^2c^2E}\left(\ln\frac{8b}{a} - \frac{3}{4} + 2\pi\sigma\right)$$

(E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона материала провода; см. VII, § 5).

4. Определить самоиндукцию единицы длины двойного провода, состоящего из двух параллельных прямых проволок (с $\mu_i = 1$) кругового сечения (радиусов a и b), отстоящих на расстояние h между их осями, причем по этим проволокам текут равные и противоположные токи J (рис. 19).

Р е ш е н и е. Векторный потенциал магнитного поля каждого из токов направлен параллельно осям проводов, и потому векторные потенциалы обоих полей складываются просто алгебраически. Для магнитного поля провода *1* с равномерно распределенным током $+J$ имеем (в цилиндрических координатах)

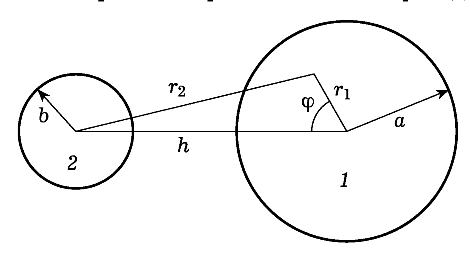


Рис. 19

$$A_z = \frac{J}{c}\left(C - \frac{r^2}{a^2}\right) \text{ при } r < a,$$

$$A_z = \frac{J}{c}\left(C - 1 - 2\ln\frac{r}{a}\right) \text{ при } r > a,$$

где C — произвольная постоянная; на границе провода A_z непрерывно. Аналогичные формулы для поля провода *2* получаются заменой a на b и изменением знака J. Интегрирование по площади сечения провода *1* в формуле (33.2) дает

$$\frac{J^2}{2c^2\pi a^2}\int\left\{\left(C - \frac{r_1^2}{a^2}\right) - \left(C - 1 - 2\ln\frac{r_2}{b}\right)\right\} df_1 =$$

$$= \frac{J^2}{2c^2\pi a^2}\int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi}\left\{1 - \frac{r_1^2}{a^2} + \ln\frac{h^2 + r_1^2 - 2hr_1\cos\varphi}{b^2}\right\} r_1\, d\varphi\, dr_1 =$$

$$= \frac{J^2}{2c^2}\left(\frac{1}{2} + 2\ln\frac{h}{b}\right).$$

Интегрирование же по сечению провода *2* дает такое же выражение с a вместо b. Поэтому искомая самоиндукция единицы длины двойного провода

$$L = 1 + 2\ln\frac{h^2}{ab}.$$

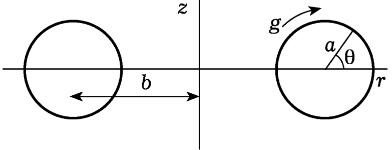


Рис. 20

5. Определить самоиндукцию тороидального соленоида.

Р е ш е н и е. Рассматриваем соленоид как тороидальную проводящую поверхность, по которой циркулируют поверхностные токи с плотностью

$$g = \frac{NJ}{2\pi r}$$

(N — полное число витков провода, J — ток в нем; координаты и размеры показаны на рис. 20). Магнитное поле вне соленоида $\mathbf{H}_e = 0$, а внутри

$$H_{ir} = H_{iz} = 0, \quad H_{i\varphi} = \frac{2NJ}{cr}$$

(r, z, φ — цилиндрические координаты). Действительно, это решение удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ и граничному условию (34.2) [1]).

[1]) Оно справедливо и для кольцеобразного соленоида с произвольной, некруговой формой сечения.

Энергия магнитного поля внутри соленоида

$$\int \frac{H_i^2}{8\pi}\,dV = \frac{N^2J^2}{c^2}\oint \frac{z\,dr}{r};$$

интегрирование производится по контуру сечения тора и легко осуществляется путем введения угла θ согласно $z = a\sin\theta$, $r = b + a\cos\theta$. В результате получаем для самоиндукции:

$$L = 4\pi N^2(b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

6. Определить поправку первого порядка по l/h к выражению (34.3) (с $\mu_e = 1$) для самоиндукции цилиндрического соленоида, связанную с искажением поля вблизи его концов.

Р е ш е н и е. Самоиндукция соленоида вычисляется как двойной интеграл по его поверхности:

$$L = \frac{1}{J^2}\iint \frac{\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2}{R}\,df_1\,df_2,$$

где $\mathbf{g}$ — поверхностная плотность тока ($g = nJ$). В цилиндрических координатах

$$L = 2\pi b^2n^2\int\limits_0^h\int\limits_0^h\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi\,dz_1\,dz_2}{\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + 4b^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}} = 8\pi b^2n^2\int\limits_0^h\int\limits_0^\pi\frac{(h - \zeta)\cos\varphi\,d\varphi\,d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + 4b^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}}$$

(φ — угол между диагональными плоскостями, проходящими через df_1 и df_2). Интегрируя по $d\zeta$, получим при $h \gg b$

$$L \approx 8\pi b^2n^2\int\limits_0^\pi\left[h\ln\frac{h}{b\sin(\varphi/2)} - h + 2b\sin\frac{\varphi}{2}\right]\cos\varphi\,d\varphi$$

и окончательно

$$L = 4\pi^2b^2n^2\left(h - \frac{8}{3\pi}b\right).$$

7. Определить, во сколько раз изменится самоиндукция плоского линейного контура, если поместить его на плоскую поверхность полубесконечной среды с магнитной проницаемостью μ_e. Внутренней частью самоиндукции провода пренебрегаем.

Р е ш е н и е. Из соображений симметрии очевидно, что в отсутствие среды магнитное поле тока симметрично относительно плоскости контура, а магнитные силовые линии пересекают эту плоскость нормально к ней; назовем это поле $\mathbf{H}_0$. Мы удовлетворим уравнениям поля и граничным условиям на поверхности полубесконечной среды, если положим в пустом полупространстве $\mathbf{H} = \dfrac{2\mu_e}{\mu_e + 1}\mathbf{H}_0$, а в среде $\mathbf{B} = \mu_e\mathbf{H} = \dfrac{2\mu_e}{\mu_e + 1}\mathbf{H}_0$. Действительно, этим обеспечивается непрерывность B_n и $\mathbf{H}_t$ на граничной плоскости, а циркуляция $\mathbf{H}$ по любой силовой линии будет равна циркуляции $\mathbf{H}_0$ по той же линии. Отсюда легко заключить, что при введении среды полная энергия поля, а следовательно, и самоиндукция контура, умножается на

$$\frac{2\mu_e}{\mu_e + 1}.$$

§ 35. Силы в магнитном поле

Для определения сил, действующих на вещество в магнитном поле, нам почти не понадобится производить новых вычислений ввиду полной аналогии с электрическим случаем. Аналогия связана, прежде всего, с тем, что выражения для термодинамических величин в магнитном поле отличаются от выражений в электрическом поле лишь заменой букв **E**, **D** соответственно на **H**, **B**. При вычислении тензора напряжений в § 15 была использована потенциальность электрического поля, являющаяся следствием уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$. Магнитное же поле удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{35.1}$$

сводящемуся к $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ лишь в отсутствие токов проводимости. Но при вычислении тензора напряжений вообще следует всегда полагать $\mathbf{j} = 0$. Поскольку $\mathbf{j}$ связано с производными от магнитного поля, то учет токов при вычислении напряжений означал бы введение в тензор напряжений σ_{ik} исчезающе малых поправок, связанных с неоднородностью поля (ср. примеч. на с. 97).

Таким образом, все полученные в § 15 и 16 формулы для тензора напряжений непосредственно переносятся на магнитное поле. Так, в жидкой среде при линейной связи $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ имеем

$$\sigma_{ik} = -P_0(\rho, T)\delta_{ik} - \frac{H^2}{8\pi}\left[\mu - \rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right]\delta_{ik} + \frac{\mu H_i H_k}{4\pi}. \tag{35.2}$$

Объемные силы вычисляются отсюда согласно $f_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$. Если среда является проводящей и в ней течет ток, то вычисление отличается от произведенного в § 15 тем, что вместо уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ имеем уравнение (35.1).

Дифференцируя (35.2) и учитывая при этом равенство $\operatorname{div}\mathbf{B} = \operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) = 0$, находим

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0 + \frac{1}{8\pi}\nabla\left[H^2\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu - \frac{\mu}{8\pi}\nabla H^2 + \frac{\mu}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}.$$

Но, согласно известной формуле векторного анализа

$$(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}H^2 - [\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}) = \frac{1}{2}\operatorname{grad}H^2 + \frac{4\pi}{c}[\mathbf{jH}],$$

и окончательно

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0 + \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[H^2\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu + \frac{\mu}{c}[\mathbf{jH}]. \tag{35.3}$$

По сравнению с аналогичной формулой (15.12) здесь добавляется еще один (последний) член. Было бы, однако, неправильным думать, что появление этого члена означает физическую возможность отделить в $\mathbf{f}$ силу, связанную с током проводимости, от других эффектов. Дело в том, что ввиду уравнения (35.1) ток $\mathbf{j}$ неотделим от неоднородности поля, а производные от поля по координатам входят и в другие члены в (35.3). При заметно отличной от 1 магнитной проницаемости вещества все члены в (35.3), вообще говоря, одного порядка величины.

Но если, как это обычно бывает, μ близко к 1, то при наличии тока проводимости последний член в (35.3) дает основной вклад в силу, по сравнению с которым остальные члены являются лишь несущественной малой поправкой. Тогда при вычислении сил можно полагать $\mu = 1$, и мы имеем просто

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}] \tag{35.4}$$

(член $-\nabla P_0$ здесь и ниже нас не интересует, и мы его опускаем). При $\mu = 1$ свойства вещества вообще никак не отражаются на магнитных явлениях и выражение (35.4) для силы в равной степени относится как к жидким, так и твердым проводникам. Полная сила, действующая в магнитном поле на проводник с током, дается интегралом

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}\int [\mathbf{jH}]\, dV. \tag{35.5}$$

Формулу (35.4) можно, разумеется, весьма просто получить и непосредственно на основании известного выражения лоренцевой силы. Макроскопическая сила, действующая в магнитном поле на неподвижное тело, есть не что иное, как усредненное значение лоренцевых сил, действующих на составляющие тело заряженные частицы со стороны микроскопического поля $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\,\overline{[\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{h}]}.$$

Но при $\mu = 1$ поле $\mathbf{h}$ совпадает со средним полем $\mathbf{H}$, а среднее значение $\rho\mathbf{v}$ совпадает с плотностью тока проводимости.

При движении проводника силы (35.4) производят над ним некоторую механическую работу. На первый взгляд может показаться, что здесь имеется противоречие с тем, что лоренцевы силы не производят над движущимися зарядами никакой работы. В действительности, конечно, никакого противоречия нет, так как в движущемся проводнике в работу лоренцевых сил входит не только механическая работа, но и работа электродвижущих сил, индуцированных в проводнике при его движении. Эти две работы равны по величине и противоположны по знаку (см. примеч. на с. 320).

В выражении (35.4) **H** есть истинное значение магнитного поля, создаваемого как посторонними источниками, так и самими токами, на которые эта сила действует. Однако при вычислении полной силы согласно (35.5) можно понимать под **H** лишь внешнее поле $\mathfrak{H}$, в которое вносится проводник с током. Собственное поле, производимое данным проводником, в силу закона сохранения импульса не может дать вклад в действующую на него самого полную силу.

Вычисление сил особенно просто для линейного проводника. Магнитные свойства его вещества вообще несущественны, а если в среде $\mu = 1$, то полная действующая на него сила дается линейным интегралом

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} \oint [d\mathbf{l} \cdot \mathfrak{H}]. \tag{35.6}$$

Это выражение можно представить и в виде интеграла по поверхности, охватываемой контуром тока. Заменяя согласно теореме Стокса $d\mathbf{l}$ оператором $[d\mathbf{f} \cdot \nabla]$, получим

$$\oint [d\mathbf{l} \cdot \mathfrak{H}] = \int [[d\mathbf{f} \cdot \nabla]\mathfrak{H}].$$

Далее пишем

$$[[d\mathbf{f} \cdot \nabla]\mathfrak{H}] = -d\mathbf{f} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \nabla(d\mathbf{f} \cdot \mathfrak{H}) = \\ = -d\mathbf{f} \operatorname{div} \mathfrak{H} + [d\mathbf{f} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{H}] + (d\mathbf{f}\nabla)\mathfrak{H}.$$

Но $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$, а в пространстве вне токов также и $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$. Таким образом,

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} \int (d\mathbf{f}\, \nabla)\mathfrak{H}. \tag{35.7}$$

В частности, в квазиоднородном внешнем поле можно вынести $\mathfrak{H}$ вместе с оператором ∇ из-под знака интеграла. Вводя также магнитный момент тока согласно (30.18), мы придем тогда к естественному результату:

$$\mathbf{F} = (\mathscr{M}\nabla)\mathfrak{H}. \tag{35.8}$$

Поскольку $\mathscr{M}$ в этой формуле есть постоянная величина, то можно написать **F** также и в виде

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} (\mathscr{M}\mathfrak{H}) \tag{35.9}$$

(что находится в соответствии с выражением (33.17) для энергии тока). Момент же сил, действующих на ток в квазиоднородном поле, как легко убедиться, равен обычному выражению

$$\mathbf{K} = [\mathscr{M}\mathfrak{H}]. \tag{35.10}$$

Задача

Определить силу, действующую на линейный прямой провод с током J, расположенный параллельно бесконечному круговому цилиндру (с магнитной проницаемостью μ) радиуса a на расстоянии l от его оси.

Решение. Ввиду указанного на с. 168 соответствия между плоскими задачами электро- и магнитостатики, поле тока определяется путем изменения обозначений в решении задачи 3 § 7. Поле в пространстве вокруг цилиндра совпадает с полем, которое создавалось бы в пустоте током J и токами $+J'$ и $-J'$, проходящими соответственно через точки A и O' (см. рис. 12), причем

$$J' = J\frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Поле же внутри цилиндра совпадает с полем, которое создавалось бы током

$$J'' = J\frac{2}{\mu + 1},$$

проходящим через точку O. Сила, действующая на единицу длины проводника,

$$F = \frac{1}{c}JB = \frac{2JJ'}{c^2}\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'}\right) = \frac{2J^2a^2(\mu - 1)}{b(b^2 - a^2)(\mu + 1)c^2}.$$

Аналогичным образом найдем (см. задачу 4 § 7), что линейный проводник, проходящий внутри цилиндрического отверстия в магнитной среде, притягивается к ближайшей части поверхности отверстия с силой

$$F = \frac{2J^2b(\mu - 1)}{(a^2 - b^2)(\mu + 1)c^2}.$$

§ 36. Гиромагнитные явления

Равномерное вращение тела (не имеющего магнитной структуры) приводит к его намагничению, линейно зависящему от угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ (*эффект Барнетта*). С феноменологической точки зрения, линейная связь между магнитным моментом тела $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ и вектором $\boldsymbol{\Omega}$ возможна, поскольку оба они меняют знак при обращении времени. Поскольку же оба являются аксиальными векторами, то такая зависимость возможна и в изотропном теле (где она сводится к простой пропорциональности между $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ и $\boldsymbol{\Omega}$).

Наряду с этим эффектом должен существовать и обратный: свободно подвешенное тело при намагничении начинает вращаться (*эффект Эйнштейна–де Хааса*). Между обоими эффектами имеется простая термодинамическая связь. Ее можно получить следующим образом.

Как известно (см. V, § 26), термодинамическим потенциалом по отношению к угловой скорости (при заданных температуре и объеме тела) является свободная энергия $\widetilde{\mathcal{F}}'$ тела во вращающейся вместе с ним системе координат. При этом момент им-

пульса тела $\mathbf{L}$ равен

$$\mathbf{L} = -\frac{\partial \widetilde{\mathscr{F}}'}{\partial \boldsymbol{\Omega}}. \tag{36.1}$$

Гиромагнитные явления описываются введением в свободную энергию дополнительного выражения, представляющего собой первый член ее разложения по степеням $\boldsymbol{\Omega}$ и намагниченности $\mathbf{M}$ в каждой точке тела, содержащего одновременно как $\boldsymbol{\Omega}$, так и $\mathbf{M}$. Этот член линеен по $\boldsymbol{\Omega}$ и по $\mathbf{M}$, т. е. имеет вид

$$\widetilde{\mathscr{F}}'_{\text{г.м}} = -\int \lambda_{ik}\Omega_i M_k\, dV = -\lambda_{ik}\Omega_i \mathscr{M}_k, \tag{36.2}$$

где λ_{ik} — постоянный тензор, в общем случае не симметричный.

Согласно (36.1) и (36.2) момент импульса, приобретаемый телом в результате намагничения, связан с его полным магнитным моментом соотношением

$$(L_{\text{г.м}})_i = \lambda_{ik}\mathscr{M}_k.$$

Обычно пользуются вместо λ_{ik} обратным тензором, определенным согласно

$$g_{ik} = \frac{2mc}{e}\lambda_{ik}^{-1}$$

(e и m — заряд и масса электрона); безразмерные величины g_{ik} называют *гиромагнитными коэффициентами*. Тогда

$$\mathscr{M}_i = \frac{e}{2mc} g_{ik}(L_{\text{г.м}})_k. \tag{36.3}$$

С другой стороны, выражение (36.2) показывает, что в отношении своего влияния на магнитные свойства вращение тела эквивалентно воздействию внешнего поля с напряженностью $\mathfrak{H}_i = \lambda_{ki}\Omega_k$ или

$$\mathfrak{H}_i = \frac{2mc}{e} g_{ki}^{-1}\Omega_k. \tag{36.4}$$

Тем самым мы имеем принципиальную возможность вычислить вызываемое вращением намагничение. Так, если магнитная восприимчивость тела χ_{ik} мала, то приобретаемый им магнитный момент не зависит от его формы и равен

$$\mathscr{M}_i = \chi_{ik}\mathfrak{H}_k = \frac{2mc}{e}\chi_{ik} g_{ik}^{-1}\Omega_i.$$

Формулы (36.3) и (36.4) отвечают соответственно эффектам Эйнштейна–де Хааса и Барнетта. Мы видим, что оба эффекта определяются одним и тем же тензором g_{ik}.

ГЛАВА V

ФЕРРОМАГНЕТИЗМ И АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМ

§ 37. Магнитная симметрия кристаллов

Между электрическими и магнитными свойствами кристаллов существует глубокое отличие, связанное с разницей в поведении зарядов и токов по отношению к изменению знака времени.

Как известно, ввиду инвариантности уравнений движения по отношению к изменению знака времени, формальная замена t на $-t$, примененная к какому-либо термодинамически равновесному состоянию тела, должна приводить к состоянию, которое тоже является одним из возможных равновесных состояний. В связи с этим возникают две возможности: состояния, переходящие друг в друга при замене t на $-t$, либо совпадают, либо не совпадают.

Будем обозначать в этом параграфе через $\rho(x, y, z)$ и $\mathbf{j}(x, y, z)$ истинную (микроскопическую) плотность зарядов и плотность токов в каждой точке кристалла, усредненную только по времени (но не по «физически бесконечно малым» объемам, как это делается в макроскопической теории). Это — те функции, которые определяют собой соответственно электрическую и магнитную структуру кристалла.

Замена t на $-t$ меняет знак $\mathbf{j}$. Если в результате этого преобразования состояние тела не меняется, то это значит, что $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, т. е. $\mathbf{j} = 0$. Таким образом, имеется причина, в силу которой могут существовать тела со строго равной нулю функцией $\mathbf{j}(x, y, z)$. Вместе с плотностью тока в таких телах строго обращаются в нуль средние (по времени) значения магнитного поля и магнитных моментов в каждой точке тела (разумеется, речь идет везде о состояниях тела в отсутствие внешнего магнитного поля). О таких телах можно сказать, что они не обладают никакой *магнитной структурой*. Фактически к этой категории относится огромное большинство тел.

Плотность же зарядов ρ при преобразовании $t \to -t$ вообще не меняется. Поэтому нет никаких причин, в силу которых эта функция могла бы тождественно обратиться в нуль. Другими словами, не существует кристаллов, которые не обладали бы «электрической структурой». В этом заключается упомянутое выше существенное отличие между электрическими и магнитными свойствами кристаллов.

Обратимся к кристаллам, у которых замена t на $-t$ меняет состояние и потому $\mathbf{j} \neq 0$. О таких телах мы будем говорить, как о телах с магнитной структурой.

Прежде всего отметим, что хотя $\mathbf{j}$ и не равно нулю, но никакого полного тока (в равновесном состоянии тела) не может быть, т. е. интеграл $\int \mathbf{j}\, dV$, взятый по объему элементарной ячейки, должен всегда обращаться в нуль[1]). В противном случае этот ток создавал бы макроскопическое магнитное поле и кристалл обладал бы магнитной энергией (на единицу объема), быстро возрастающей с увеличением размеров тела. Ввиду энергетической невыгодности такого состояния оно, очевидным образом, не может соответствовать термодинамическому равновесию.

В то же время токи $\mathbf{j}$ могут создавать отличный от нуля макроскопический магнитный момент, т. е. интеграл $\int [\mathbf{rj}]\, dV$ (снова взятый по объему элементарной ячейки) может быть отличен от нуля. Соответственно этому, среди тел, в которых $\mathbf{j} \neq 0$, можно различать два типа: тела с отличным от нуля макроскопическим магнитным моментом и тела, в которых такой момент отсутствует. Первые называются *ферромагнитными*, а вторые — *антиферромагнитными*.

Возникает вопрос о возможных типах (группах) симметрии распределения токов $\mathbf{j}(x, y, z)$. Эта симметрия складывается, прежде всего, из обычных элементов — поворотов, отражений и трансляций, соответственно чему среди возможных групп симметрии $\mathbf{j}$ во всяком случае имеется 230 обычных кристаллографических пространственных групп. Этим, однако, далеко не исчерпывается список искомых групп. Как уже было указано, замена t на $-t$ меняет знак вектора $\mathbf{j}$. В связи с этим возникает новый возможный элемент симметрии — симметрии по отношению к преобразованию, заключающемуся в изменении направления всех токов на обратное; обозначим условно это преобразование буквой R. Если распределение токов обладает элементом симметрии R самим по себе, то это значит, что $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, т. е. $\mathbf{j} = 0$, и тело вообще не обладает магнитной структурой. Отличная от нуля функция $\mathbf{j}(x, y, z)$ может, однако, обладать симметрией по отношению к различным комбинациям преобразования R с другими элементами симметрии — поворотами, отражениями и трансляциями. Таким образом, задача об определении возможных типов симметрии распределения токов (*магнитных пространственных групп*) за-

---

[1]) Подчеркнем, что речь идет об истинной элементарной ячейке, учитывающей магнитную структуру кристалла. Эта «магнитная ячейка» может отличаться от чисто кристаллографической, учитывающей лишь симметрию распределения зарядов в решетке (ср. ниже, § 38).

ключается в построении всех возможных групп, составленных как из преобразований, имеющихся в обычных пространственных группах, так и из преобразований, получающихся комбинированием преобразований обычного типа с преобразованием R.

Если симметрия распределения токов задана, то тем самым будет определена и кристаллографическая симметрия расположения частиц в данном кристалле, совпадающая с симметрией функции $\rho(x, y, z)$. Она будет определяться той пространственной группой, которая получится из группы симметрии $\mathbf{j}$, если формально считать преобразование R тождественным (каковым оно и является в применении к функции ρ).

Знание полной группы симметрии функции $\mathbf{j}(x, y, z)$, однако, не нужно, если мы интересуемся лишь макроскопическими свойствами тела. Эти свойства зависят только от направления в кристалле, а трансляционная симметрия кристаллической решетки не имеет к ним отношения. С чисто структурной кристаллографической точки зрения «симметрия направлений» в кристалле дается, как известно, 32 кристаллическими классами. Это есть группы симметрии, составленные из одних только чистых поворотов и отражений; они получаются из пространственных групп, если в последних считать все трансляции тождественным преобразованием, а винтовые оси и плоскости скольжения рассматривать как простые оси и плоскости симметрии. С точки зрения же магнитных свойств макроскопическая симметрия должна классифицироваться по группам, составленным из поворотов, отражений и их комбинаций с элементом R. Эти группы можно назвать *магнитными кристаллическими классами*. Они находятся в таком же отношении к магнитным пространственным группам, как обычные кристаллические классы к обычным пространственным группам.

К их числу относятся, прежде всего, 32 обычных класса, дополненных элементом R, и те же 32 класса без элемента R. Первые являются, в частности, группами макроскопической симметрии всех тел, не обладающих магнитной структурой. Но этими же классами симметрии могут обладать и тела с магнитной структурой. Для этого надо, чтобы в магнитную пространственную группу симметрии этого тела сам элемент R входил не как таковой, а только в комбинации с трансляциями.

Кроме того, имеется 58 классов, в которые элемент R входит только в комбинации с поворотами или отражениями. Каждый из них, если заменить в нем операцию R тождественным преобразованием, превращается в один из обычных кристаллических классов.

Следует отметить, что возникновение магнитной структуры (ферро- или антиферромагнитной) всегда связано со сравнитель-

но слабыми взаимодействиями[1]). Поэтому кристаллографическая структура магнитного тела представляет собой небольшое искажение по сравнению со структурой немагнитной фазы, из которой магнитная фаза обычно возникает при понижении температуры. В этом отношении ферромагнетик, в частности, отличается от обычных пироэлектрических тел, но аналогичен сегнетоэлектрикам.

Заданием магнитного кристаллического класса определяется характер всех макроскопических магнитных свойств тела. Наиболее важным из них является наличие или отсутствие макроскопического магнитного момента, т. е. спонтанной (без внешнего поля) намагниченности. Магнитный момент $\mathbf{M}$ есть векторная величина, которая при поворотах и отражениях ведет себя как аксиальный вектор (векторное произведение двух полярных векторов), а при применении операции R меняет знак. Кристалл будет обладать спонтанной намагниченностью, если в нем есть хотя бы одно такое направление, что лежащий в нем вектор $\mathbf{M}$ с указанными свойствами остается инвариантным при всех преобразованиях данного магнитного кристаллического класса.

Снова подчеркнем отличие от электрических (на этот раз — макроскопических) свойств. Характер последних полностью определяется обычным кристаллографическим классом. В частности, для того чтобы тело было пироэлектрическим, достаточно, чтобы его кристаллический класс допускал существование полярного вектора $\mathbf{P}$ (электрический момент). В то же время было бы совершенно неправильным делать заключения о существовании или отсутствии макроскопического магнитного момента на основании поведения аксиального вектора $\mathbf{M}$ по отношению к преобразованиям чисто структурного кристаллического класса данного тела, отвечающего симметрии функции $\rho(x, y, z)$ (мы вернемся еще к этому вопросу в следующем параграфе, после фактического построения магнитных классов).

Вместо симметрии функции $\mathbf{j}(x, y, z)$ можно говорить о симметрии распределения микроскопической плотности магнитного момента $\mathbf{M}(x, y, z) = [\mathbf{rj}(x, y, z)]$. В свою очередь, последнюю обычно можно рассматривать как симметрию расположения и ориентаций средних (по времени) значений магнитных моментов атомов (ионов) $\boldsymbol{\mu}$ в кристаллической решетке. В теле без магнитной симметрии эти средние значения равны нулю. В ферромагнетике сумма атомных моментов в каждой элементарной ячейке отлична от нуля, а в антиферромагнетике — равна нулю.

---

[1]) Обычно обменное взаимодействие между магнитными моментами атомов приводит к насыщению валентных связей и образованию немагнитных структур. К возникновению магнитной структуры приводит только относительно слабое обменное взаимодействие глубоко расположенных d- и f-электронов атомов элементов переходных групп системы Менделеева.

О совокупности атомов в кристаллической решетке, обладающих одинаковыми значениями $\boldsymbol{\mu}$, говорят как о *магнитной подрешетке*. Очевидно, что антиферромагнетик содержит по крайней мере две подрешетки со взаимно антипараллельными и равными по величине значениями $\boldsymbol{\mu}$. Если направления моментов $\boldsymbol{\mu}$ всех подрешеток параллельны или антипараллельны, антиферромагнетик называют *коллинеарным*; в противном случае говорят о *неколлинеарном* антиферромагнетике.

Ферромагнетик тоже может содержать несколько подрешеток. В узком смысле под ферромагнетиками понимают тела, у которых все средние атомные магнитные моменты параллельны. Если же кристалл содержит две или более подрешеток с несовпадающими по направлению (или величине) атомными моментами, его называют *ферримагнетиком*; в отличие от антиферромагнетиков, векторная сумма $\mathbf{M}$ магнитных моментов подрешеток в этих телах отлична от нуля. Ферромагнетик может быть как коллинеарным (если магнитные моменты всех подрешеток в нем параллельны или антипараллельны), так и неколлинеарным.

До сих пор мы говорили о магнитной симметрии твердых кристаллов. Что касается жидких тел, то, разумеется, возможно существование однородных ферромагнитных жидкостей. Отметим также возможность существования жидкости, не обладающей средним магнитным моментом, но имеющей анизотропную корреляционную функцию спинов составляющих ее частиц. Такая жидкость являлась бы спиновым аналогом нематических жидких кристаллов, о которых шла речь в V, § 140 (*А.Ф. Андреев*, 1984.)

§ 38. Магнитные классы и пространственные группы

Покажем, каким образом фактически строятся магнитные группы симметрии; начнем с магнитных классов.

Как уже указывалось в предыдущем параграфе, магнитные классы можно разделить на три типа. К типу I относятся 32 обычных кристаллических класса, не содержащих элемента R вовсе. К типу II относятся те же 32 класса, дополненных элементом R. Каждый такой класс содержит все элементы обычного класса (точечной группы $\boldsymbol{G}$), а также все эти же элементы, умноженные на R; обозначив магнитный класс символом $\boldsymbol{M}$, можно написать

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{G} + R\boldsymbol{G} \tag{38.1}$$

(преобразование R, разумеется, коммутативно со всеми пространственными поворотами и отражениями; поэтому $RG = GR$, где G — любой элемент группы $\boldsymbol{G}$).

Эти два типа классов являются, в известном смысле, тривиальными. К нетривиальному типу III относятся 58 магнитных классов, в которые элемент R входит только в комбинациях с

поворотами или отражениями. Каждый из них, если заменить в нем операцию R тождественным преобразованием, переходит в один из обычных кристаллических классов $\boldsymbol{G}$. Построение всех магнитных классов этого типа осуществляется на основании следующих соображений.

Обозначим символом $\boldsymbol{H}$ совокупность элементов группы $\boldsymbol{G}$, которые остаются (при построении магнитного класса $\boldsymbol{M}$) не умноженными на R. По самому определению такой совокупности, она содержит единичный элемент E (в противном случае $\boldsymbol{M}$ содержала бы элемент R сам по себе, т. е. относилась бы к типу II), а произведения любой пары ее элементов дают элементы той же совокупности. Другими словами, $\boldsymbol{H}$ есть подгруппа группы $\boldsymbol{G}$. Все остальные элементы группы $\boldsymbol{G}$ входят в $\boldsymbol{M}$ умноженными на R; поскольку $R^2 = E$, то все попарные произведения этих элементов группы являются элементами группы $\boldsymbol{H}$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{H}$ — подгруппа группы $\boldsymbol{G}$ (и тем самым группы $\boldsymbol{M}$) индекса 2 [1]). Другими словами, структура магнитного класса $\boldsymbol{M}$ типа III может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{H} + RG_1\boldsymbol{H}, \tag{38.2}$$

где G_1 — какой-либо элемент группы $\boldsymbol{G}$, не входящий в $\boldsymbol{H}$. Очевидно, что группа $\boldsymbol{M}$ и группа $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H} + G_1\boldsymbol{H}$ изоморфны.

Таким образом, задача о построении всех магнитных классов сводится к нахождению подгрупп индекса 2 всех кристаллических классов. В свою очередь, последняя задача легко решается с помощью таблиц характеров неприводимых представлений точечных групп. Каждое неединичное одномерное представление группы содержит равное число характеров $+1$ и -1; элементы с характерами $+1$ составляют подгруппу индекса 2. При переходе к магнитному классу эти элементы остаются неизменными, а все остальные умножаются на R.

Проиллюстрируем эту процедуру на примере точечной группы $\boldsymbol{C}_{4v}$. Таблица характеров ее неприводимых представлений (см. III, § 95) имеет следующий вид:

	E	C_2	$2C_4$	$2\sigma_v$	$2\sigma'_v$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	1	-1	1	-1
B_2	1	1	-1	-1	1
E	2	-2	0	0	0

[1]) Это значит, что подгруппа $\boldsymbol{H}$ содержит вдвое меньше элементов, чем группа $\boldsymbol{G}$. Указанное утверждение — следствие общей довольно очевидной теоремы: подгруппа $\boldsymbol{H}$ группы $\boldsymbol{G}$ имеет индекс 2, если и только если произведение любых двух элементов группы $\boldsymbol{G}$, не входящих в $\boldsymbol{H}$, есть элемент из $\boldsymbol{H}$.

Неединичные одномерные представления: A_2, B_1, B_2. В представлении A_2 элементы с характерами $+1$ образуют подгруппу $\boldsymbol{C}_4$. Соответствующий магнитный класс, который обозначим символом $\boldsymbol{C}_{4v}(\boldsymbol{C}_4)$, составлен из элементов

$$E,\ C_2,\ 2C_4,\ 2R\sigma_v,\ 2R\sigma'_v.$$

В представлениях B_1, B_2 элементы с характерами $+1$ образуют подгруппы $\boldsymbol{C}_{2v}$, отличающиеся лишь расположением плоскостей σ_v по отношению к фиксированной системе координат. Эти подгруппы кристаллографически неразличимы, и им отвечает один и тот же магнитный класс $\boldsymbol{C}_{4v}(\boldsymbol{C}_{2v})$ с элементами

$$E,\ C_2,\ 2RC_4,\ 2\sigma_v,\ 2R\sigma'_v.$$

Перебрав таким образом все 32 кристаллических класса, получим 58 магнитных классов типа III, перечисленных в табл. 1.

Таблица 1.

Магнитные классы

$\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{C}_1)$	$\boldsymbol{C}_{3v}(\boldsymbol{C}_3)$
$\boldsymbol{C}_s(\boldsymbol{C}_1)$	$\boldsymbol{D}_3(\boldsymbol{C}_3)$
$\boldsymbol{C}_2(\boldsymbol{C}_1)$	$\boldsymbol{D}_{3d}(\boldsymbol{D}_3, \boldsymbol{S}_6, \boldsymbol{C}_{3v})$
$\boldsymbol{C}_{2h}(\boldsymbol{C}_i, \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{C}_s)$	$\boldsymbol{C}_{3h}(\boldsymbol{C}_3)$
$\boldsymbol{C}_{2v}(\boldsymbol{C}_s, \boldsymbol{C}_2)$	$\boldsymbol{C}_6(\boldsymbol{C}_3)$
$\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{C}_2)$	$\boldsymbol{D}_{3h}(\boldsymbol{C}_{3h}, \boldsymbol{C}_{3v}, \boldsymbol{D}_3)$
$\boldsymbol{D}_{2h}(\boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{C}_{2h}, \boldsymbol{C}_{2v})$	$\boldsymbol{C}_{6h}(\boldsymbol{C}_6, \boldsymbol{S}_6, \boldsymbol{C}_{3h})$
$\boldsymbol{C}_4(\boldsymbol{C}_2)$	$\boldsymbol{C}_{6v}(\boldsymbol{C}_6, \boldsymbol{C}_{3v})$
$\boldsymbol{S}_4(\boldsymbol{C}_2)$	$\boldsymbol{D}_6(\boldsymbol{C}_6, \boldsymbol{D}_3)$
$\boldsymbol{D}_{2d}(\boldsymbol{S}_4, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{C}_{2v})$	$\boldsymbol{D}_{6h}(\boldsymbol{D}_6, \boldsymbol{C}_{6h}, \boldsymbol{C}_{6v}, \boldsymbol{D}_{3d}, \boldsymbol{D}_{3h})$
$\boldsymbol{D}_4(\boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{D}_2)$	$\boldsymbol{T}_h(\boldsymbol{T})$
$\boldsymbol{C}_{4v}(\boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{C}_{2v})$	$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{T})$
$\boldsymbol{C}_{4h}(\boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{C}_{2h}, \boldsymbol{S}_4)$	$\boldsymbol{T}_d(\boldsymbol{T})$
$\boldsymbol{D}_{4h}(\boldsymbol{D}_4, \boldsymbol{C}_{4h}, \boldsymbol{D}_{2h}, \boldsymbol{C}_{4v}, \boldsymbol{D}_{2d})$	$\boldsymbol{O}_h(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{T}_h, \boldsymbol{T}_d)$
$\boldsymbol{S}_6(\boldsymbol{C}_3)$	

Каждый класс $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{H})$ определяется исходной точечной группой $\boldsymbol{G}$ и ее подгруппой $\boldsymbol{H}$ — одной из перечисленных в скобках после символа группы $\boldsymbol{G}$. Кристаллические классы $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_3$, $\boldsymbol{T}$ не имеют подгрупп индекса 2, и потому нет построенных на их базе магнитных классов. Отметим также, что поворот C_3 никогда не входит в магнитный (нетривиальный) класс умноженным на R; поворот C_3R после трехкратного повторения привел бы к преобразованию R, отсутствующему в классах этого типа[1]).

[1]) В абстрактной теории симметрии о магнитной симметрии говорят как об антисимметрии. Идея антисимметрии была выдвинута независимо Хеешем (*H. Heesh*, 1929) и *А.В. Шубниковым* (1945). Классы антисимметрии были найдены *Шубниковым* (1951) как группы симметрии геометрических

В предыдущем параграфе уже отмечалось, что о возможности существования ферромагнетизма нельзя судить по кристаллографическому классу. Для иллюстрации рассмотрим тетрагональную решетку из одинаковых атомов с магнитными моментами, направленными вдоль тетрагональной оси [1]). Ее магнитный кристаллический класс: $\boldsymbol{D}_{4h}(\boldsymbol{D}_4)$, содержащий преобразования [2])

$$E,\ C_2,\ 2C_4,\ 2U_2R,\ 2U_2'R,$$
$$I,\ \sigma_h,\ 2S_4,\ 2\sigma_vR,\ 2\sigma_v'R.$$

Все эти преобразования оставляют инвариантным аксиальный вектор $\mathbf{M}$, направленный вдоль оси четвертого порядка. Между тем, кристаллический класс $\boldsymbol{D}_{4h}$ сам по себе не допускал бы существования аксиального вектора: все его компоненты M_x, M_y, M_z меняли бы знак, например, при повороте вокруг той или иной оси второго порядка.

Перейдем к пространственным магнитным группам. Они находятся в таком же отношении к обычным кристаллическим пространственным группам, как магнитные классы к кристаллическим классам: первые сводятся к последним, если заменить преобразование R тождественным преобразованием. Пространственных магнитных групп имеется всего 1651; как и магнитные классы, они подразделяются на три типа.

К типу I относятся 230 групп, совпадающих с кристаллографическими и не содержащих преобразования R вовсе, а к типу II — те же 230 групп, дополненных элементом R.

К нетривиальному типу III относятся 1191 групп, содержащие преобразование R лишь в комбинации с какими-либо поворотами, отражениями или трансляциями. Они имеют структуру (38.2), где $\boldsymbol{H}$ — какая-либо подгруппа индекса 2 кристаллической пространственной группы $\boldsymbol{G}$, а G_1 — элемент из $\boldsymbol{G}$, не входящий

фигур (многогранников) с гранями, окрашенными в два цвета; элементу R соответствует при этом операция изменения цвета граней. Как группы магнитной симметрии, эти классы были получены *Б.А. Тавгером* и *В.М. Зайцевым* (1956). Изложенный здесь способ их вывода принадлежит *В.Л. Инденбому* (1959).

[1]) Такова, например, решетка ферромагнитной фазы железа. В кристаллографическом отношении она представляет собой слабо искаженную (вдоль одной из осей четвертого порядка) кубическую решетку. Искажение — результат магнитострикции, возникающей в силу самого наличия магнитной структуры.

[2]) Обозначения элементов симметрии аналогичны обозначениям, принятым в III, § 93, 94. В частности, U_2, U_2' — повороты на 180° вокруг горизонтальных осей, перпендикулярных оси 4-го порядка, σ_h — отражение в горизонтальной плоскости, σ_v, σ_v' — отражения в вертикальных плоскостях, проходящих через оси C_4 и U_2, U_2'. Символы U_2R, σR и т. п. обозначают плоскости и оси симметрии, которые входят в данный класс в комбинации с преобразованием R.

в $\boldsymbol{H}$. Очевидно, что подгруппа $\boldsymbol{H}$ должна совпадать с исходной пространственной группой $\boldsymbol{G}$ либо по своей трансляционной симметрии, либо по своему классу; в первом случае она имеет вдвое меньше «поворотных» элементов (поворотов и отражений), чем группа $\boldsymbol{G}$, а во втором — вдвое меньше трансляций. Соответственно этому, тип III можно подразделить еще на два подтипа.

К подтипу IIIа отнесем магнитные пространственные группы, для которых G_1 в (38.2) есть какое-либо «поворотное» преобразование кристаллической группы $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H} + G_1\boldsymbol{H}$, не входящее в $\boldsymbol{H}$. Трансляционная симметрия (решетка Бравэ) пространственной группы $\boldsymbol{M}$ этого типа совпадает с трансляционной симметрией группы $\boldsymbol{G}$; другими словами, элементарная ячейка магнитной структуры совпадает с чисто кристаллографической элементарной ячейкой. Эти пространственные магнитные группы (их всего 674) относятся к магнитным классам типа III.

К подтипу IIIб отнесем магнитные пространственные группы, для которых в качестве G_1 в (38.2) может быть выбрана чистая трансляция на один из основных периодов группы $\boldsymbol{G}$. Элементарная ячейка магнитной структуры по объему вдвое больше кристаллографической элементарной ячейки. Совокупность чистых трансляций и трансляций, умноженных на R, образует *магнитную решетку Бравэ*; всего имеется 22 различных таких решетки. Пространственные магнитные группы типа IIIб (их имеется всего 517) относятся к магнитным классам типа II [1]).

З а д а ч а

Перечислить магнитные классы, допускающие ферромагнетизм.

Р е ш е н и е. Классы типа II не допускают ферромагнетизма. Подчеркнем, что тем самым не допускают ферромагнетизма все пространственные группы типов II и IIIб, содержащие в себе умноженные на R трансляции (эти преобразования заведомо меняют знак $\mathbf{M}$); другими словами, для существования ферромагнетизма во всяком случае необходимо, чтобы магнитная элементарная ячейка совпадала с кристаллографической [2]).

Из классов типа I (совпадающих с обычными кристаллическими классами) существование аксиального вектора $\mathbf{M}$ допускается классами:

$\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_i$ — $\mathbf{M}$ в любом направлении;
$\boldsymbol{C}_s$ — $\mathbf{M}$ в плоскости симметрии;
$\boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{C}_{2h}$, $\boldsymbol{C}_4$, $\boldsymbol{S}_4$, $\boldsymbol{C}_{4h}$, $\boldsymbol{C}_3$, $\boldsymbol{C}_6$, $\boldsymbol{S}_6$, $\boldsymbol{C}_{3h}$, $\boldsymbol{C}_{6h}$ — $\mathbf{M}$ вдоль оси симметрии.

---

[1]) Построение всех магнитных пространственных групп (как групп антисимметрии) осуществлено *А.М. Заморзаевым* (1953) и *Н.В. Беловым*, *Н.Н. Нероновой*, *Т.С. Смирновой* (1955); составленные последними авторами таблицы этих групп — см. Труды Института кристаллографии. 1955. Т. 11. С. 33 (английский перевод — в книге *Shubnikov A.V.*, *Belov N.V.* Coloured symmetry. — N.Y.: Pergamon Press, 1964). Наиболее полные таблицы магнитных пространственных групп и их свойств — *Копцик В.А.* Шубниковские группы. — М: Изд-во МГУ, 1966.

[2]) Снова напомним (ср. примеч. 1 на с. 204), что речь идет о симметрии решетки, уже искаженной самим существованием магнитной структуры.

Для существования ферромагнетизма в классах типа III во всяком случае необходимо, чтобы они не содержали элемента IR, меняющего знак вектора **M** при любом его направлении. Из числа этих классов допускают ферромагнетизм следующие:

$\boldsymbol{C}_2(\boldsymbol{C}_1)$, $\boldsymbol{C}_{2h}(\boldsymbol{C}_i)$ — **M** перпендикулярен оси C_2R;
$\boldsymbol{C}_s(\boldsymbol{C}_1)$ — **M** в плоскости σR;
$\boldsymbol{C}_{2v}(\boldsymbol{C}_s)$ — **M** в плоскости $\sigma_v R$ перпендикулярно оси C_2R;
$\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{C}_2)$, $\boldsymbol{C}_{2v}(\boldsymbol{C}_2)$, $\boldsymbol{D}_{2h}(\boldsymbol{C}_{2h})$ — **M** вдоль оси C_2;
$\boldsymbol{D}_4(\boldsymbol{C}_4)$, $\boldsymbol{C}_{4v}(\boldsymbol{C}_4)$, $\boldsymbol{D}_{2d}(\boldsymbol{S}_4)$, $\boldsymbol{D}_{4h}(\boldsymbol{C}_{4h})$, $\boldsymbol{D}_3(\boldsymbol{C}_3)$, $\boldsymbol{C}_{3v}(\boldsymbol{C}_3)$, $\boldsymbol{D}_{3d}(\boldsymbol{S}_6)$, $\boldsymbol{D}_{3h}(\boldsymbol{C}_{3h})$, $\boldsymbol{D}_6(\boldsymbol{C}_6)$, $\boldsymbol{C}_{6v}(\boldsymbol{C}_6)$, $\boldsymbol{D}_{6h}(\boldsymbol{C}_{6h})$ — **M** вдоль оси C_4, C_3 или C_6.

§ 39. Ферромагнетик вблизи точки Кюри

Между магнитными свойствами ферромагнетиков и электрическими свойствами сегнетоэлектриков имеется далеко идущая аналогия. Те и другие обладают, в макроскопических объемах, спонтанной поляризацией — магнитной или электрической. Исчезновение этой поляризации при изменении температуры в обоих случаях происходит путем фазового перехода второго рода (точку перехода между ферро- и парамагнитной фазами называют *точкой Кюри*).

В то же время между ферромагнитными и сегнетоэлектрическими явлениями имеются и существенные отличия, связанные с разницей в характере микроскопических сил взаимодействия, приводящих к установлению спонтанной поляризации. У сегнетоэлектриков взаимодействие молекул в кристаллической решетке существенно анизотропно, в результате чего вектор спонтанной поляризации относительно прочно связан с определенными направлениями в кристалле.

Возникновение же магнитной структуры, в том числе ферромагнитной, связано в основном с обменным взаимодействием атомов, которое вообще не зависит от направления суммарного магнитного момента относительно решетки [1]). Правда, наряду с обменным существует также и непосредственное магнитное взаимодействие между атомными магнитными моментами. Это взаимодействие, однако, представляет собой эффект $\sim v^2/c^2$ (v — атомные скорости), поскольку сами магнитные моменты атомов

[1]) Обменное взаимодействие является, как известно, специфическим квантовым эффектом, возникающим в связи с той или иной симметрией волновых функций системы частиц по отношению к их перестановкам. Перестановочная симметрия волновых функций, а с нею и обменное взаимодействие, зависит только от полного спина системы, но не от его направления (см. III, § 60). Роль обменного взаимодействия в ферромагнетиках была впервые отмечена *Я.И. Френкелем*, *Я.Г. Дорфманом* и *В. Гейзенбергом* (1928).

содержат множители $1/c$. К этой же категории относится и взаимодействие магнитных моментов атомов с электрическим полем кристаллической решетки. Все эти взаимодействия (которые можно назвать *релятивистскими* ввиду наличия в них множителя $1/c^2$) являются слабыми по сравнению с обменным взаимодействием и, таким образом, приводят лишь к сравнительно слабой зависимости энергии кристалла от направления намагниченности. Такое соотношение между обменными и релятивистскими взаимодействиями будет предполагаться везде ниже в этой главе [1]).

Следовательно, намагниченность ферромагнетика является величиной, которая в первом приближении, т. е. по отношению к основному (обменному) взаимодействию, сохраняется. Это обстоятельство придает более глубокий физический смысл термодинамической теории, в которой намагниченность $\mathbf{M}$ рассматривается как независимая переменная, фактическое значение которой (как функции температуры, поля и т. п.) определяется затем соответствующими условиями теплового равновесия [2]).

Обозначим через $\Phi(\mathbf{M}, \mathbf{H})$ термодинамический потенциал единицы объема вещества, рассматриваемый как функция независимой переменной $\mathbf{M}$ (наряду с другими термодинамическими переменными). Будем пока пренебрегать релятивистскими взаимодействиями, т. е. учитывать лишь основное, обменное взаимодействие. Тогда $\Phi(\mathbf{M}, 0)$ может быть функцией только абсолютной величины, но не направления вектора $\mathbf{M}$.

Для того чтобы найти термодинамические величины при отличном от нуля поле $\mathbf{H}$, поступаем точно так, как при выводе (19.3): исходим из соотношения $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\mathbf{H} = -\mathbf{B}/4\pi$ и находим

$$\widetilde{\Phi}(\mathbf{M}, \mathbf{H}) = \Phi(M, 0) - \mathbf{MH} - \frac{H^2}{8\pi}. \qquad (39.1)$$

---

[1]) Порядок величины отношения релятивистских взаимодействий к обменному характеризуется отношением $U_{\text{ан}}/NT_c$, где $U_{\text{ан}}$ — энергия магнитной анизотропии (см. следующий параграф), N — число атомов в единице объема, T_c — температура точки Кюри. Для ферромагнетиков оно составляет обычно $10^{-2} - 10^{-5}$. В ряде ферромагнетиков (редкоземельных металлах и их соединениях), однако, это отношение может оказаться значительно больше и даже достигать значений порядка единицы, — как ввиду «аномально» большой энергии анизотропии, так и ввиду относительной слабости обменных взаимодействий. Возможности макроскопической теории в применении к таким магнетикам, разумеется, более ограничены. Детальное обсуждение микроскопических механизмов различных взаимодействий в конкретных магнетиках выходит за рамки этой книги.

[2]) По своей макроскопической магнитной симметрии и по своему поведению в не слишком сильных магнитных полях коллинеарные ферримагнетики неотличимы от ферромагнетиков в узком смысле этого слова (см. конец § 37). Излагаемая ниже теория относится к обеим этим категориям магнетиков.

Для потенциала Φ имеем отсюда

$$\Phi(\mathbf{M}, \mathbf{B}) = \Phi + \frac{\mathbf{HB}}{4\pi} = \Phi(M, 0) + \frac{H^2}{8\pi} = \Phi(M, 0) + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M})^2. \tag{39.2}$$

При пренебрежении магнитной анизотропией ферромагнетика направления векторов **M** и **H**, разумеется, совпадают; поэтому в формулах (39.1), (39.2) можно писать вместо векторов их абсолютные величины.

Вблизи точки Кюри намагниченность **M** мала. Рассмотрим свойства ферромагнетика в этой области в рамках общей теории фазовых переходов второго рода Ландау [1]). Следуя этой теории, разложим $\Phi(M, 0)$ в ряд по степеням вектора **M**, играющего роль параметра порядка. Разложение изотропной функции по степеням векторной величины может содержать лишь члены четных степеней:

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 + AM^2 + BM^4 - MH - \frac{H^2}{8\pi}, \tag{39.3}$$

где Φ_0, A, B, — функции только температуры и давления [2]).

Точка Кюри $T = T_c(P)$ определяется обращением в нуль коэффициента A, причем $A > 0$ при $T > T_c$ и $A < 0$ при $T < T_c$ (такое температурное расположение фаз имеет место во всех известных ферромагнетиках, хотя и не является термодинамически обязательным). Вблизи точки Кюри имеем

$$A = a(T - T_c), \tag{39.4}$$

где $a > 0$ — не зависящая от температуры постоянная. Выражение (39.3), (39.4) отличается от (19.3) лишь смыслом величин: M вместо P_z и H вместо E_z. Поэтому приведем следующие из (39.3), (39.4) выводы, не повторяя всех изложенных в § 19 рассуждений.

Спонтанная намагниченность в ферромагнитной фазе меняется с температурой по закону

$$M = \sqrt{\frac{a}{2B}(T_c - T)}. \tag{39.5}$$

Выше точки Кюри спонтанная намагниченность отсутствует, а

---

[1]) Свойства ферромагнетика во флуктуационной области вблизи точки Кюри будут рассмотрены в § 47.

[2]) Тот факт, что разложение содержит члены только четных степеней по компонентам вектора **M**, имеет и другую, более глубокую, причину, не связанную с обменным приближением: величина **M** нечетна по отношению к обращению времени, между тем как термодинамический потенциал должен быть, разумеется, инвариантен по отношению к этому преобразованию.

магнитная восприимчивость равна

$$\chi = \frac{1}{2a(T - T_c)}, \tag{39.6}$$

т. е. имеет место парамагнетизм с восприимчивостью, обратно пропорциональной $T - T_c$ (*закон Кюри–Вейсса*). Ниже точки Кюри имеем

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{H \to 0} = \frac{1}{4a(T_c - T)}. \tag{39.7}$$

Напомним, однако, что эта величина не является здесь восприимчивостью в обычном смысле слова (т. е. коэффициентом пропорциональности между M и H), так как $M \neq 0$ и при $H = 0$.

Фактически восприимчивость (39.7) может достигать значений порядка единицы лишь в непосредственной близости к точке Кюри. Отвлекаясь от этой области, мы можем считать, что намагниченность M весьма слабо меняется под влиянием магнитного поля и может рассматриваться при заданной температуре как постоянная величина, что и будет предполагаться в следующих параграфах.

И в этом отношении имеется различие между ферромагнетиками и сегнетоэлектриками, у которых $\partial P/\partial E$, вообще говоря, не мало даже вдали от точки Кюри. Причина снова лежит в малости атомных магнитных моментов по сравнению с электрическими дипольными моментами молекул.

В § 19 было отмечено, что наложение электрического поля размывает дискретную точку фазового перехода второго рода в сегнетоэлектриках. То же самое относится, конечно, и к ферромагнетику в магнитном поле. Поскольку в обменном приближении направления **M** и **H** совпадают, то в этом приближении размытие перехода имеет место при любом кристаллографическом направлении **H**.

§ 40. Энергия магнитной анизотропии

Как уже было указано, анизотропия магнитных свойств ферромагнетика связана со сравнительно слабыми релятивистскими взаимодействиями между его атомами. В макроскопической теории эта анизотропия описывается путем введения в термодинамический потенциал соответствующих членов — *энергии магнитной анизотропии*, зависящей от направления намагничения.

Вычисление энергии анизотропии, исходя из микроскопической теории, требовало бы применения квантовомеханической теории возмущений, в которой роль возмущающей энергии играют члены в гамильтониане кристалла, описывающие релятивистские взаимодействия. Но общий вид искомых выражений может

быть установлен и без проведения этих вычислений, на основании простых соображений симметрии.

Гамильтониан релятивистских взаимодействий содержит члены первой и второй степени по операторам векторов спина электронов (спин-орбитальное и спин-спиновое взаимодействия). Малость тех и других определяется отношением v^2/c^2, где v — порядок величины скоростей атомных электронов, а c — скорость света. Ряд теории возмущений для энергии анизотропии есть разложение по этой малости, но ввиду указанной зависимости оператора возмущения от операторов спина, энергия анизотропии автоматически получается в виде ряда по степеням направляющих косинусов вектора намагниченности, т. е. компонент единичного вектора $\mathbf{m}$ в направлении $\mathbf{M}$. С другой стороны, энергия анизотропии $U_{\text{ан}}$, как и сам потенциал Φ (ср. примеч. на с. 208), инвариантна по отношению к обращению времени, между тем как намагниченность $\mathbf{M}$ при этом преобразовании меняет знак. Отсюда следует, что энергия анизотропии должна быть четной функцией компонент $\mathbf{m}$.

Для одно- и двухосных кристаллов разложение энергии анизотропии начинается с членов второй степени по компонентам $\mathbf{m}$. Представим эти члены в виде

$$U_{\text{ан}} = K_{ik} m_i m_k, \tag{40.1}$$

где K_{ik} — симметричный тензор второго ранга, компоненты которого имеют (как и сама $U_{\text{ан}}$) размерность плотности энергии. В одно- и двухосных кристаллах такой тензор имеет соответственно две и три независимые компоненты. Однако в данном случае надо еще иметь в виду, что одна квадратичная комбинация, именно $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$, не зависит от направления вектора $\mathbf{m}$ и потому может быть исключена из энергии анизотропии. Следовательно, выражение (40.1) для одно- и двухосных кристаллов содержит соответственно всего один или два независимых коэффициента.

Так, для одноосных кристаллов энергию анизотропии можно написать в виде

$$U_{\text{ан}} = K(m_x^2 + m_y^2) = K \sin^2\theta \tag{40.2}$$

или в эквивалентном виде [1])

$$U_{\text{ан}} = -K m_z^2 = -K\cos^2\theta,$$

---

[1]) Эти два выражения отличаются друг от друга не зависящей от направления величиной K. Переход от одного из них к другому означает включение этой величины в изотропную часть Φ; в частности, меняется коэффициент A в разложении (39.3).

где θ — угол между $\mathbf{m}$ и осью z, выбранной вдоль главной оси симметрии кристалла. Если коэффициент (функция температуры) $K > 0$, то энергия анизотропии минимальна при намагничении вдоль оси z; эта ось будет, как говорят, *направлением легкого намагничения*, а о таком ферромагнетике говорят, что он относится к типу «*легкая ось*». Если же $K < 0$, то направление легкого намагничения лежит в плоскости xy (базисная плоскость кристалла); такой ферромагнетик относится, как говорят, к типу «*легкая плоскость*» [1]). Выражение (40.2) изотропно в плоскости xy. Эта изотропия, однако, нарушается в членах более высокого порядка в разложении $U_{\text{ан}}$, которыми и определяется (при $K < 0$) направление легкого намагничения в плоскости xy. Вид этих членов зависит от конкретной кристаллической системы, к которой относится кристалл.

Для тетрагональных кристаллов члены четвертого порядка содержат два независимых инварианта $(m_x^2+m_y^2)^2$ и $m_x^2m_y^2$ (оси x и y выбраны вдоль двух осей 2-го порядка в базисной плоскости). К анизотропии в базисной плоскости приводит второй из них.

В гексагональном кристалле энергия анизотропии содержит в четвертом порядке всего один член, пропорциональный $(m_x^2 + m_y^2)^2$; в этом приближении энергия анизотропии записывается как

$$U_{\text{ан}} = K_1 \sin^2\theta + K_2 \sin^4\theta \tag{40.3}$$

(коэффициент K из (40.2) обозначен здесь как K_1). Анизотропия в базисной плоскости, однако, появляется лишь в членах 6-го порядка; анизотропным инвариантом этого порядка является

$$\frac{1}{2}[(m_x + im_y)^6 + (m_x - im_y)^6] = \sin^4\theta\cos 6\varphi \tag{40.4}$$

(ось x выбрана вдоль одной из осей 2-го порядка в базисной плоскости; от нее же отсчитывается азимутальный угол φ).

Наконец, ромбоэдрическая симметрия допускает два члена четвертого порядка с инвариантами

$$(m_x^2 + m_y^2)^2 = \sin^4\theta, \tag{40.5}$$

$$\frac{1}{2}m_z[(m_x + im_y)^3 + (m_x - im_y)^3] = \cos\theta\sin^3\theta\cos 3\varphi \tag{40.6}$$

(ось y — вдоль одной из осей 2-го порядка; угол φ отсчитывает-

[1]) Примером одноосного ферромагнетика является гексагональный кобальт. У него K меняет знак при температуре ~ 530 K, причем $K > 0$ и $K < 0$ соответственно ниже и выше этой температуры. Экстраполированное к 0 K значение $K \approx 0{,}8 \cdot 10^7$ эрг/см^3. Значение же $NT_c \sim 2 \cdot 10^{10}$ эрг/см^3.

ся от оси x). Наличие множителя m_z во втором из инвариантов приводит к выходу направления легкого намагничения на малый угол из базисной плоскости; ввиду малости m_z, определение направления легкого намагничения требовало бы одновременного учета членов как 4-го, так и 6-го порядков (среди которых есть член с инвариантом (40.4)).

Перейдем к ферромагнитным кристаллам кубической системы. Их свойства существенно отличаются от свойств одноосных (и двухосных) кристаллов. Дело в том, что единственной комбинацией второго порядка, инвариантной по отношению к преобразованиям кубической симметрии, которую можно составить из компонент вектора $\mathbf{m}$, является квадрат $\mathbf{m}^2 = 1$. Поэтому первым неисчезающим членом в разложении энергии анизотропии у кубического кристалла является член не второго, а четвертого порядка. В связи с этим эффекты магнитной анизотропии у кубических кристаллов, вообще говоря, слабее, чем в одно- и двухосных кристаллах.

Кубическая симметрия допускает всего один независимый инвариант четвертого порядка, зависящий от направления $\mathbf{m}$. Энергия анизотропии кубического ферромагнетика может быть представлена в виде

$$U_{\text{ан}} = K(m_x^2 m_y^2 + m_x^2 m_z^2 + m_y^2 m_z^2) \tag{40.7}$$

или

$$U_{\text{ан}} = -\frac{1}{2}K(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4);$$

эквивалентность обоих выражений очевидна из того, что их разность есть не зависящая от направления величина $K/2$.

При $K > 0$ (например, у железа) энергия анизотропии достигает одинаковых по величине минимальных значений при трех расположениях вектора $\mathbf{m}$ — параллельно трем ребрам куба (оси x, y, z; кристаллографические направления [100], [010], [001]). Таким образом, в этом случае кристалл имеет три эквивалентные оси легкого намагничения.

Если же $K < 0$ (например, у никеля), то энергия анизотропии минимальна при $m_x^2 = m_y^2 = m_z^2 = 1/3$, т. е. когда вектор $\mathbf{m}$ направлен вдоль какой-либо из четырех пространственных диагоналей куба (кристаллографические направления [111], [$\bar{1}$11] и т. д.). Они и являются в этом случае направлениями легкого намагничения [1]).

---

[1]) Для примера укажем, что у железа и никеля значение $K/3$ (разность $U_{\text{ан}}$ для наиболее легкого и наиболее трудного направлений намагничения), экстраполированное к 0 K, составляет около $2 \cdot 10^5$ эрг/см^3.

Следующему после (40.7) приближению в энергии анизотропии кубического кристалла отвечают члены шестого порядка. Исключив из их числа не зависящий от направления инвариант $(\mathbf{m}^2)^3$ и выражение, отличающееся от (40.7) лишь множителем $\mathbf{m}^2$, мы останемся всего с одним инвариантом, в качестве которого можно выбрать $m_x^2 m_y^2 m_z^2$. Тогда

$$U_{\text{ан}} = K_1(m_x^2 m_y^2 + m_x^2 m_z^2 + m_y^2 m_z^2) + K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2. \tag{40.8}$$

Следует отметить, что ферромагнитный кубический кристалл, спонтанно намагниченный вдоль какой-либо из своих осей легкого намагничения, теряет, строго говоря, кубическую симметрию (в связи с чем происходит и соответствующее смещение атомов, т. е. искажение кристаллической решетки). Кристалл, намагниченный вдоль направления ребра куба, становится слабо тетрагональным, а при намагничении вдоль пространственной диагонали куба — ромбоэдрическим. В этом отношении кубические кристаллы отличаются от одноосных кристаллов с направлением легкого намагничения вдоль главной оси симметрии; очевидно, что намагничение в этом направлении не меняет симметрии кристалла.

Подчеркнем снова, что рассмотренное в этом параграфе разложение энергии анизотропии ферромагнетика по степеням компонент единичного вектора $\mathbf{m}$ не есть разложение по самой намагниченности $\mathbf{M}$ (которая, вдали от точки Кюри, отнюдь не мала) — сходимость ряда связана лишь со слабостью релятивистских взаимодействий. Но вблизи точки Кюри, где величина $\mathbf{M}$ мала, оно становится разложением по $\mathbf{M}$. В рамках теории Ландау отсюда следовало бы, что в одноосном кристалле отношение K/M^2 (K из (40.2)) должно стремиться при $T \to T_c$ к отличному от нуля конечному значению. Для пояснения этого утверждения рассмотрим, например, переход из парамагнитной фазы в ферромагнитную типа легкая ось. Согласно (39.3) и (40.2), квадратичные члены разложения термодинамического потенциала по степеням компонент $\mathbf{M}$ имеют вид

$$AM_z^2 + \left(A + \frac{K}{M^2}\right)(M_x^2 + M_y^2).$$

Точка перехода определяется обращением в нуль коэффициента при M_z^2; коэффициент же при $M_x^2 + M_y^2$ остается конечным.

Аналогичным образом, в кубическом ферромагнетике должно было бы стремиться к конечному значению отношение K/M^4 (K из (40.7)).

Во флуктуационной области, однако, указанное поведение коэффициентов анизотропии, вообще говоря, нарушается.

§ 41. Кривая намагничения ферромагнетиков

Рассмотрим связь между намагниченностью одноосного ферромагнетика и магнитным полем в нем; для определенности будем считать, что ферромагнетик относится к типу «легкая ось». Энергию анизотропии будет удобно переписать здесь в виде

$$U_{\text{ан}} = \frac{\beta M^2}{2}\sin^2\theta, \tag{41.1}$$

введя безразмерный коэффициент $\beta > 0$ (согласно $K = \beta M^2/2$) [1].

Напомним, что абсолютную величину намагниченности **M** мы считаем не зависящей от **H**, так что речь идет только о поворотах этого вектора [2]. Из соображений симметрии очевидно, что вектор **M** будет лежать в плоскости, проходящей через ось z и направление **H** (постольку, поскольку в энергии анизотропии не учитываются члены высших порядков, анизотропные в плоскости xy); выберем эту плоскость в качестве плоскости xz. Термодинамический потенциал с учетом энергии анизотропии равен [3]

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi} &= \Phi_0(M) + \frac{\beta}{2}M_x^2 - \mathbf{HM} - \frac{H^2}{8\pi} = \\ &= \Phi_0(M) + \frac{\beta M^2}{2}\sin^2\theta - M(H_x\sin\theta + H_z\cos\theta) - \frac{H^2}{8\pi}.\end{aligned} \tag{41.2}$$

Зависимость **M** от **H** определяется условием равновесия $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\theta = 0$, откуда

$$\beta M \sin\theta\cos\theta = H_x\cos\theta - H_z\sin\theta. \tag{41.3}$$

По отношению к неизвестной $\xi = \sin\theta$ это есть алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(\beta M\xi - H_x)^2(1-\xi^2) = H_z^2\xi^2$$

---

[1] Излагаемое ниже исследование основано на выражении (41.1) для энергии анизотропии. Следует, однако, указать, что разложение, первым членом которого является это выражение, в реальных случаях обычно обладает довольно плохой сходимостью. Поэтому для удовлетворительного количественного описания явлений приходится учитывать еще и член следующего (четвертого) порядка.

[2] Помимо рассматриваемого здесь процесса вращения вектора **M**, в ферритах в очень сильных полях возможен еще и другой процесс: антипараллельные магнитные моменты поворачиваются навстречу друг другу, становясь параллельными. Это происходит, однако, лишь в «обменных» полях $H \sim T_c/\mu$; так, для феррита $FeO{\cdot}Fe_2O_3$ ($T_c \approx 580$ K, $\mu \sim \mu_B$) эти поля $H \sim 10^7$ Э.

[3] Включив $U_{\text{ан}}$ в термодинамический потенциал $\widetilde{\Phi}$, мы тем самым подразумеваем, что константы анизотропии определены при заданных упругих напряжениях.

с отличными от нуля коэффициентами при нечетных степенях ξ. Это уравнение имеет либо два, либо четыре вещественных корня (причем все они < 1). Поскольку все эти корни соответствуют экстремумам функции $\widetilde{\Phi}(\theta)$, то ясно, что в первом случае эта функция имеет один минимум и один максимум, а во втором — два минимума и два максимума. Другими словами, в первом случае заданному значению поля $\mathbf{H}$ соответствует одно направление намагничения. Во втором же случае при заданном $\mathbf{H}$ возможны два различных направления $\mathbf{M}$, из которых одно (соответствующее меньшему из минимумов $\widetilde{\Phi}$) термодинамически вполне устойчиво, а второе (соответствующее большему из минимумов $\widetilde{\Phi}$) термодинамически метастабильно.

Тот или другой случай имеет место в зависимости от значений H_x и H_z. При постепенном изменении этих параметров один случай переходит в другой в момент, когда один из максимумов сливается с одним из минимумов. При этом кривая $\widetilde{\Phi}(\theta)$ имеет вместо экстремума точку перегиба, т. е. вместе с $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\theta$ обращается в нуль также и вторая производная $\partial^2\widetilde{\Phi}/\partial\theta^2$. Написав уравнение (41.3) в виде

$$\frac{H_x}{\sin\theta} - \frac{H_z}{\cos\theta} = \beta M$$

и продифференцировав его еще раз по θ, получим

$$\frac{H_x}{\sin^3\theta} = -\frac{H_z}{\cos^3\theta}.$$

Исключив θ из этих двух уравнений, получим

$$H_x^{2/3} + H_z^{2/3} = (\beta M)^{2/3}. \qquad (41.4)$$

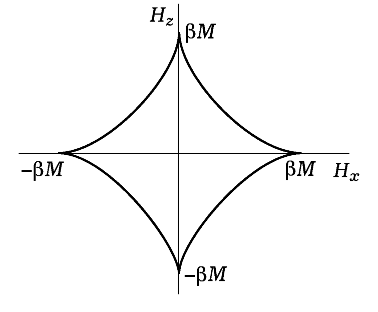


Рис. 21

На диаграмме H_x, H_z уравнение (41.4) определяет изображенную на рис. 21 замкнутую кривую (астроида). Она делит плоскость H_xH_z на две части, из которых в одной возможно, а в другой невозможно существование метастабильных состояний. Уже без дополнительного исследования очевидно, что областью отсутствия метастабильных состояний является область, внешняя по отношению к кривой. Это ясно из того, что при $H \to \infty$ устойчивым может быть только одно направление $\mathbf{M}$ вдоль поля $\mathbf{H}$.

Наличие метастабильных состояний приводит к возможности существования *гистерезиса* — проходящему через эти состояния необратимому изменению намагниченности при изменении внешнего магнитного поля. Поэтому изображенная на рис. 21 кривая

представляет собой абсолютную границу гистерезиса, — при значениях поля, лежащих вне этой кривой, гистерезис во всяком случае невозможен [1]).

Особого рассмотрения требуют состояния, в которых напряженность **H** перпендикулярна к оси легкого намагничения ($H_x = H$, $H_z = 0$). Термодинамический потенциал

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{H^2}{8\pi} + \frac{\beta M^2}{2}\sin^2\theta - HM\sin\theta. \qquad (41.5)$$

Если $H > \beta M$, то $\widetilde{\Phi}$ имеет лишь один минимум — при $\theta = \pi/2$, т. е. намагниченность направлена вдоль поля. Если же $H < \beta M$, то $\widetilde{\Phi}$ имеет минимум при

$$M_x = M\sin\theta = \frac{H}{\beta}, \qquad (41.6)$$

чему соответствуют два возможных расположения вектора **M** (под углами θ и $\pi - \theta$), симметричные относительно оси x. Таким образом, в этом случае имеются два равновесных состояния, причем с одинаковыми значениями $\widetilde{\Phi}$ и потому в равной степени устойчивые.

Это обстоятельство весьма существенно, так как приводит к возможности существования двух соприкасающихся фаз, в которых напряженность **H** одинакова, а намагниченность **M** (а потому и индукция **B**) различна. В результате появляется новая возможность для уменьшения полного термодинамического потенциала тела: его объем можно разбить на ряд отдельных областей, в каждой из которых намагниченность имеет одно из своих двух допустимых направлений; эти области называют *областями спонтанной намагниченности* или *доменами*. Фактическое определение термодинамически равновесной структуры ферромагнетика требует рассмотрения тела в целом, с учетом его конкретной формы и размеров; мы вернемся еще к этому вопросу в § 44.

Рассмотрим участок тела, малый по сравнению с его полным объемом, но большой по сравнению с размерами доменов. Напряженность H_x можно считать постоянной вдоль всего этого участка; а через $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{B}}$ обозначим значения **M** и **B**, усредненные по его объему. Вместе с H_x постоянна и поперечная составляющая $M_x = H_x/\beta$ намагниченности. Продольная же составляющая M_z

[1]) Во всем изложении в этой главе мы ограничиваемся рассмотрением только термодинамически равновесных состояний ферромагнетиков и, соответственно, обратимых процессов в них. В частности, мы совершенно не касаемся механизма гистерезисных явлений, которые могут быть связаны с дефектами кристалла, внутренними напряжениями в образце, поликристалличностью и т. п. причинами.

в различных доменах отличается знаком, так что ее среднее значение во всяком случае не превосходит $|M_z|$. Учитывая также, что везде $H_z = 0$, имеем для средней индукции:

$$\overline{B}_x = H_x\left(1 + \frac{4\pi}{\beta}\right), \quad \overline{B}_z < 4\pi\sqrt{M^2 - \frac{H_x^2}{\beta^2}}. \tag{41.7}$$

Этими формулами определяется область значений средней индукции, соответствующая доменной структуре одноосного ферромагнетика.

Исследование зависимости **M** от **H** для кубического кристалла может быть в принципе произведено аналогично тому, как это было сделано выше для одноосного кристалла. Однако, ввиду большей сложности уравнений, получение явных аналитических формул оказывается здесь невозможным, и мы не будем больше останавливаться на этом вопросе.

Задачи

1. Одноосный ферромагнитный кристалл имеет форму эллипсоида вращения (причем его ось легкого намагничения совпадает с осью вращения) и помещен во внешнее магнитное поле $\mathfrak{H}$. Определить область значений $\mathfrak{H}$, при которых тело будет обладать доменной структурой.

Решение. Согласно общим свойствам эллипсоидальных тел в однородном внешнем поле (§ 8), усредненные по доменной структуре индукция $\overline{\mathbf{B}}$ и напряженность $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ связаны с $\mathfrak{H}$ соотношением

$$n\overline{B}_z + (1-n)H_z = \mathfrak{H}_z, \quad \frac{1-n}{2}\overline{B}_x + \frac{1+n}{2}H_x = \mathfrak{H}_x,$$

где n — коэффициент размагничивания вдоль главной оси эллипсоида (ось z). Положив $H_z = 0$ и используя формулы (41.7), получим

$$H_x = \frac{\mathfrak{H}_x}{1 + 2\pi(1-n)/\beta}, \quad \overline{B}_z = \frac{\mathfrak{H}_z}{n} < 4\pi\sqrt{M^2 - \frac{H_x^2}{\beta^2}}.$$

Исключив отсюда H_x, найдем искомое неравенство

$$\frac{\mathfrak{H}_z^2}{(4\pi n)^2} + \frac{\mathfrak{H}_x^2}{[\beta + 2\pi(1-n)]^2} < M^2,$$

определяющее область существования доменной структуры.

2. Для поликристаллического тела в сильном ($H \gg 4\pi M$) магнитном поле определить усредненную по кристаллитам намагниченность; кристаллиты обладают одноосной симметрией.

Решение. Пусть в пределах одного кристаллита θ и ψ — углы между его направлением легкого намагничения и соответственно векторами **M** и **H**. Заранее очевидно, что в сильном поле направление **M** будет близким к направлению **H**, т. е. угол $\vartheta = \theta - \psi$ мал. Написав в (41.2) $\mathbf{MH} = MH\cos(\theta - \psi)$ и приравняв нулю производную $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\theta$, получим

$$\vartheta \approx \sin\vartheta = -\frac{\beta M}{H}\sin\theta\cos\theta.$$

Средняя намагниченность направлена, очевидно, вдоль **H** и равна

$$\overline{M} = M\overline{\cos\vartheta} = M\left(1 - \frac{1}{2}\overline{\vartheta^2}\right) = M\left[1 - \frac{\beta^2 M^2}{2H^2}\overline{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right],$$

где черта означает усреднение по кристаллитам. Предполагая все направления оси легкого намагничения кристаллитов равновероятными, получим

$$\overline{M} = M\left(1 - \frac{\beta^2 M^2}{15H^2}\right).$$

Таким образом, средняя намагниченность приближается к насыщению по закону $\overline{M} - M \backsim H^{-2}$.

3. То же при кубической симметрии кристаллитов.

Р е ш е н и е. Условия минимальности выражения

$$-\frac{\beta}{4}(M_x^4 + M_y^4 + M_z^4) - (H_x M_x + H_y M_y + H_z M_z)$$

(в (40.7) положено $K = \beta M^4/2$) при дополнительном условии $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = \text{const}$ гласят:

$$\beta M_x^3 + H_x = \lambda M_x, \quad \beta M_y^3 + H_y = \lambda M_y, \quad \beta M_z^3 + H_z = \lambda M_z,$$

где λ — лагранжев неопределенный множитель. При большом H имеем отсюда

$$M_x \approx \frac{1}{\lambda}H_x + \frac{\beta}{\lambda^4}H_x^3 + \ldots,$$

а складывая квадраты этих равенств, найдем $M^2 \approx H^2/\lambda^2$, т. е. $\lambda \approx H/M$. Угол ϑ между **M** и **H** находим как

$$\vartheta^2 \approx \sin^2\vartheta = \frac{[\mathbf{MH}]^2}{M^2 H^2} = \frac{\beta^2 M^6}{H^{10}} \sum H_x^2 H_y^2 (H_x^2 - H_y^2)^2,$$

где суммирование производится по циклическим перестановкам индексов x, y, z. Усреднение этого выражения по ориентациям кристаллитов эквивалентно усреднению по направлениям вектора **H**. Последнее производится путем интегрирования по сферическим углам, определяющим направление **H**, и в результате получается:

$$\overline{M} = M\left(1 - \frac{1}{2}\overline{\vartheta^2}\right) = M\left(1 - \frac{2\beta^2 M^6}{105H^2}\right).$$

§ 42. Магнитострикция ферромагнетиков

Изменение намагниченности ферромагнетика в магнитном поле приводит к его деформированию (*магнитострикция*). Это явление может быть связано как с обменными, так и с релятивистскими взаимодействиями в теле. Поскольку обменная энергия зависит лишь от абсолютной величины намагниченности, то и ее изменение может быть связано лишь с изменением величины M в магнитном поле. Хотя последнее, вообще говоря, относительно весьма мало, но, с другой стороны, сама обменная энергия велика по сравнению с энергией анизотропии. Поэтому эффекты

магнитострикции, связанные с обоими видами взаимодействий, могут оказаться сравнимыми.

Такое положение имеет место в одноосных кристаллах. Заметные деформации, возникающие от изменения направления $\mathbf{M}$, имеют место в полях $H \sim \beta M$; изменение же величины M становится существенным при полях $H \sim 4\pi M$. Если эти области практически совпадают, то при рассмотрении магнитострикции одноосных ферромагнетиков необходимо, вообще говоря, учитывать оба эффекта вместе. Мы не станем останавливаться здесь на получении соответствующих, довольно сложных формул.

В кубических кристаллах положение иное в связи с относительной малостью энергии анизотропии (как величины четвертого порядка). Существенная магнитострикция, связанная с изменением направления $\mathbf{M}$, имеет место уже в сравнительно слабых полях, в которых изменением абсолютной величины M можно еще полностью пренебречь. Рассмотрим эти эффекты.

Изменение энергии релятивистских взаимодействий в деформированном теле описывается введением в термодинамический потенциал $\widetilde{\Phi}$ дополнительных *магнитоупругих* членов, зависящих от компонент тензора упругих напряжений σ_{ik} и от направления вектора $\mathbf{M}$ (*Н.С. Акулов*, 1928). Первые неисчезающие члены такого рода линейны по σ_{ik} и квадратичны по направляющим косинусам вектора $\mathbf{M}$ (последнее — снова в силу симметрии по отношению к изменению знака времени). В общем случае имеем, следовательно, для магнитоупругой энергии выражение вида

$$U_{\text{м.у}} = -a_{iklm}\sigma_{ik}m_l m_m, \tag{42.1}$$

где a_{iklm} — безразмерный тензор четвертого ранга, симметричный по парам индексов ik и lm (но не по отношению к перестановке пары ik с парой lm). Вблизи точки Кюри, где разложение по степеням направляющих косинусов вектора $\mathbf{M}$ эквивалентно разложению по степеням его компонент, величины a_{iklm}/M^2 стремятся к постоянным пределам.

При подсчете числа независимых компонент тензора a_{iklm} снова следует иметь в виду, что члены в (42.1), содержащие компоненты $\mathbf{m}$ в комбинации $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2$, не зависят от направления $\mathbf{m}$ и потому могут быть исключены из магнитоупругой энергии [1]). Имея это в виду, найдем, что у кубического кристалла магнитоупругая энергия содержит два независимых коэффи-

[1]) Возникающий в связи с этим некоторый произвол в выборе a_{iklm} выражает собой условность выбора направления $\mathbf{m}$, при котором (в отсутствие приложенных извне механических сил) мы считаем кристалл недеформированным.

циента; запишем ее в виде

$$U_{\text{м.у}} = -a_1(\sigma_{xx}m_x^2 + \sigma_{yy}m_y^2 + \sigma_{zz}m_z^2) - \\ - 2a_2(\sigma_{xy}m_xm_y + \sigma_{xz}m_xm_z + \sigma_{yz}m_ym_z). \quad (42.2)$$

Тензор деформации получается дифференцированием $\widetilde{\Phi}$ по соответствующим компонентам σ_{ik}:

$$u_{ik} = -\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\sigma_{ik}},$$

причем в $\widetilde{\Phi}$ надо включить (с обратным знаком — см. примеч. на с. 104) также и обычную упругую энергию. У кубического кристалла последняя содержит три независимых упругих коэффициента и может быть представлена, например, в виде

$$U_{\text{упр}} = \frac{\mu_1}{2}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + \\ + \frac{\mu_2}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + \mu_3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2), \quad (42.3)$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — положительные величины. Для тензора деформации получаем [1])

$$u_{xx} = (\mu_1 + \mu_2)\sigma_{xx} + \mu_2(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + a_1m_x^2, \\ u_{xy} = \mu_3\sigma_{xy} + a_2m_xm_y \quad (42.4)$$

и аналогично для остальных компонент.

Эти формулы содержат в себе все магнитострикционные эффекты (в рассматриваемой области полей). В частности, в отсутствие внутренних напряжений формулы

$$u_{xx} = a_1m_x^2, \quad u_{xy} = a_2m_xm_y, \quad \ldots \quad (42.5)$$

определяют изменение деформации при изменении направления намагниченности. Напомним, что абсолютная величина деформации в известном смысле условна ввиду условности выбора того направления **m**, для которого деформация принимается отсутствующей.

Тензор напряжений, определенный в результате решения конкретной задачи (например, для зажатого кристалла), по порядку величины $\sigma \sim a/\mu$, где a и μ — порядки величины соответственно коэффициентов a_{iklm} и упругих коэффициентов. В этом смысле магнитоупругая энергия (как всегда, на единицу

[1]) При дифференцировании Φ надо иметь в виду замечание, сделанное в примеч. на с. 113.

объема) — величина порядка a^2/μ. Коэффициенты a — величины первого порядка по релятивистскому спин-спиновому взаимодействию, так что магнитоупругая энергия — второго порядка по нему. В одноосном кристалле энергия анизотропии — первого порядка по релятивистскому взаимодействию, и потому, как правило, велика по сравнению с магнитоупругой энергией. В кубических же кристаллах энергия анизотропии — второго порядка по указанному взаимодействию, и в этом смысле сравнима, вообще говоря, с магнитоупругой энергией [1]). В этой связи может возникнуть необходимость одновременного учета обоих видов энергии (например, при исследовании кривой намагничения), что существенно усложняет задачу.

Рассмотрим теперь магнитострикцию магнетика в таких сильных полях ($H \gg 4\pi M$), при которых несущественна энергия анизотропии и доменная структура уже отсутствует, так что направление **M** можно считать совпадающим с направлением **H**.

Ввиду пренебрежения энергией анизотропии конкретная симметрия кристалла становится несущественной, так что следующие ниже формулы в равной мере применимы к любому ферромагнетику.

Пусть тело находится в однородном внешнем магнитном поле $\mathfrak{H}$. Его полный термодинамический потенциал Φ [2]) дается формулой

$$\widetilde{\Phi} = -\mathscr{M}\mathfrak{H} = -MV\mathfrak{H}, \tag{42.6}$$

где $\mathscr{M} = MV$ — полный магнитный момент тела, однородно намагниченного в направлении, совпадающем с направлением поля; мы опустили здесь член Φ_0, не связанный с магнитным полем. Тензор деформации, усредненный по объему тела, определяется формулой

$$\overline{u}_{ik} = -\frac{1}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ik}},$$

откуда

$$\overline{u}_{ik} = \frac{\mathfrak{H}}{V}\frac{\partial(VM)}{\partial\sigma_{ik}}. \tag{42.7}$$

Таким образом, деформация определяется зависимостью намагниченности от внутренних напряжений.

При кубической симметрии кристалла всякий характеризующий его свойства симметрический тензор второго ранга сводится

---

[1]) Но и в кубических кристаллах магнитоупругая энергия может оказаться малой по сравнению с энергией анизотропии. Так, у железа (при комнатной температуре) их отношение $\sim 10^{-2}$.

[2]) Здесь подразумевается то определение Φ, о котором шла речь в § 12. Им нельзя пользоваться для существенно неоднородно деформированных тел.

к скаляру, из которого он получается умножением на δ_{ik}. Это относится и к тензору $\partial(VM)/\partial\sigma_{ik}$, так что магнитострикционная деформация сводится в этом случае к всестороннему сжатию или растяжению.

Если мы интересуемся только изменением δV полного объема тела, то его можно получить просто дифференцированием Φ по давлению:

$$\delta V = \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial P} = -\mathfrak{H}\frac{\partial(MV)}{\partial P}, \tag{42.8}$$

где P надо понимать как равномерно приложенное к телу всестороннее давление.

Задачи

1. Найти относительное растяжение ферромагнитного кубического кристалла в зависимости от направления намагниченности $\mathbf{m}$ и направления измерения $\mathbf{n}$.

Решение. Относительное растяжение в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$ выражается через тензор деформации формулой

$$\frac{\delta l}{l} = u_{ik}n_i n_k.$$

Подставив сюда u_{ik} (в отсутствие внутренних напряжений) из (42.5), получим

$$\frac{\delta l}{l} = a_1(m_x^2n_x^2 + m_y^2n_y^2 + m_z^2n_z^2) + a_2(m_xm_yn_xn_y + m_xm_zn_xn_z + m_ym_zn_yn_z).$$

Напомним, что безусловный смысл имеет не сама эта величина, а лишь разности ее значений при различных направлениях $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$. Так, если $\mathbf{m}$ направлено вдоль оси x, то разность значений $\delta l/l$ вдоль осей x и y равна a_1. Если $\mathbf{m}$ направлено вдоль одной из пространственных диагоналей, то разность значений $\delta l/l$ в этом же направлении и вдоль трех других пространственных диагоналей равна $4a_2/9$.

2. Определить изменение объема при магнитострикции ферромагнитного эллипсоида во внешнем поле $\mathfrak{H} \sim 4\pi M$, параллельном одной из его осей; ферромагнетик предполагается кубическим [1]).

Решение. При пренебрежении энергией анизотропии область существования доменной структуры определяется неравенством $\overline{B} < 4\pi M$ при $H = 0$ (черта означает усреднение по объему тела: ср. § 41). В эллипсоиде $n\overline{B} + (1-n)\overline{H} = \mathfrak{H}$, и, положив $H = 0$, найдем, что доменная структура существует при

$$\mathfrak{H} < 4\pi n M.$$

При этом $n\overline{B} = 4\pi n\overline{M} = \mathfrak{H}$, т. е. средняя намагниченность

$$\overline{M} = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi n}.$$

Отсюда термодинамический потенциал

$$\widetilde{\Phi} = -V\int_0^{\mathfrak{H}} \overline{M}\,d\mathfrak{H} = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi n}V. \tag{1}$$

[1]) В одноосном ферромагнетике при $\mathfrak{H} \sim 4\pi M$ надо было бы учитывать энергию анизотропии, чего не надо делать в кубическом кристалле.

Если же $\mathfrak{H} > 4\pi nM$, то эллипсоид намагничен целиком вдоль поля $\overline{M} = M$. При этом

$$\widetilde{\Phi} = -M\mathfrak{H}V + 2\pi M^2 Vn \tag{2}$$

(при $\mathfrak{H} = 4\pi Mn$ выражения (1) и (2) совпадают).

Искомое изменение объема получается дифференцированием $\widetilde{\Phi}$ по давлению:

$$\delta V = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi n}\frac{\partial V}{\partial P} \qquad \text{при } \mathfrak{H} < 4\pi nM,$$

$$\delta V = -\mathfrak{H}\frac{\partial(MV)}{\partial P} + 2\pi n\frac{\partial(M^2V)}{\partial P} \qquad \text{при } \mathfrak{H} > 4\pi nM.$$

При $\mathfrak{H} \gg 4\pi nM$ мы возвращаемся к приведенной в тексте формуле (42.8).

§ 43. Поверхностное натяжение доменной стенки

Как уже было указано в § 41, существует широкая область состояний, в которых ферромагнетик должен иметь доменную структуру, т. е. распадаться на участки с различными направлениями намагниченности. Это относится, в частности, к ферромагнитному телу, не находящемуся во внешнем магнитном поле.

С термодинамической точки зрения соприкасающиеся домены представляют собой различные фазы ферромагнетика, отличающиеся направлением своей спонтанной намагниченности. Рассмотрим, прежде всего, свойства межфазных границ (или, как говорят, *доменных стенок*) как таковых и определим их поверхностное натяжение (*Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*, 1935).

Межфазные границы представляют собой в действительности сравнительно узкие переходные слои, в которых направление намагниченности непрерывно меняется от направления в одном к направлению в другом домене. «Ширина» такого слоя и ход изменения $\mathbf{M}$ в нем определяются условиями термодинамического равновесия. При этом должна быть учтена дополнительная энергия, связанная с неоднородностью намагничения. Наибольший вклад в эту *энергию неоднородности* дает обменное взаимодействие. С макроскопической точки зрения она может быть выражена через производные от $\mathbf{M}$ по координатам. Это можно сделать в общем виде, предполагая градиент направления $\mathbf{M}$ сравнительно малым; это условие означает, что существенное изменение направления магнитных моментов происходит лишь на расстояниях, больших по сравнению с межатомными расстояниями. Его выполнение в данном случае очевидно, так как существенное различие в направлениях соседних атомных магнитных моментов привело бы к весьма большому увеличению обменной энергии и потому термодинамически невыгодно.

Обозначим плотность энергии неоднородности через $U_{\text{неодн}}$. Линейных по первым производным членов вида $a_{ik}(M)\partial M_i/\partial x_k$ в ее разложении не может быть — уже в силу требования симметрии по отношению к обращению времени (эта операция меняет знак вектора $\mathbf{M}$, энергия же должна оставаться неизменной). Симметрия кристалла могла бы допустить существование членов, содержащих произведения производных $\partial M_i/\partial x_k$ на компоненты самого вектора $\mathbf{M}$. Нас интересует здесь обменная энергия неоднородности; соответствующие члены в $U_{\text{неодн}}$ должны быть инвариантны по отношению к одновременному одинаковому повороту векторов $\mathbf{M}$ во всем пространстве (при неизменной системе координат) [1]). Тогда члены с указанными произведениями могут иметь лишь вид

$$a_i(M)M_i\frac{\partial M_l}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\mathbf{a}(M)\nabla M^2.$$

Такие члены, однако, не могут иметь реального смысла энергии неоднородности, даже если допустить изменение вдоль кристалла не только направления, но и величины вектора $\mathbf{M}$. Дело в том, что реальный термодинамический смысл имеет не сама величина $U_{\text{неодн}}$, а лишь ее интеграл по объему тела; но при таком интегрировании члены написанного вида свелись бы к выражениям, зависящим только от значений намагниченности на поверхности тела, но не от хода ее изменения в объеме [2]).

По этой же причине можно не писать в $U_{\text{неодн}}$ среди членов следующего порядка малости членов, линейных по вторым производным от $\mathbf{M}$ по координатам: при интегрировании по объему они преобразуются в выражения, квадратичные по первым производным. Именно квадратичные выражения и являются главными неисчезающими членами в разложении обменной энергии неоднородности. Наиболее общий вид этих членов:

$$U_{\text{неодн}} = \frac{1}{2}\alpha_{ik}\frac{\partial M_l}{\partial x_i}\frac{\partial M_l}{\partial x_k}, \tag{43.1}$$

где α_{ik} — симметричный тензор; для устойчивости ферромагнитного упорядочения это выражение должно быть существенно положительным, т. е. главные значения тензора α_{ik} должны быть положительными. В кубическом кристалле тензор α_{ik} сводится

---

[1]) Это значит, что скалярное выражение $U_{\text{неодн}}$ должно быть составлено таким образом, чтобы «магнитные» и «координатные» векторные индексы сворачивались бы каждые только между собой, но не друг с другом.

[2]) Симметрия кристалла может, однако, допускать существование членов вида $a_{ikl}M_i\partial M_k/\partial x_l$ не обменной природы. Это приводило бы к изменению характера ферромагнитного упорядочения в кристалле — см. § 52.

к скаляру ($\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$, $\alpha > 0$), так что [1]

$$U_{\text{неодн}} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}. \tag{43.2}$$

В одноосном кристалле тензор α_{ik} имеет две независимые компоненты и энергия неоднородности имеет вид

$$U_{\text{неодн}} = \frac{\alpha_1}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\alpha_2}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z}\right)^2. \tag{43.3}$$

Подчеркнем, что вдали от точки Кюри выражения (43.1)–(43.3) следует рассматривать как первые члены разложения по степеням производных от единичного вектора $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$, а не самой намагниченности $\mathbf{M}$. Лишь вблизи этой точки оно становится разложением по производным именно от $\mathbf{M}$. Соответственно этому, в рамках теории Ландау коэффициенты α_{ik} в этих выражениях должны были бы стремиться при $T \to T_c$ к отличным от нуля конечным значениям (о роли флуктуаций в этом отношении — см. § 47).

Рассмотрим в качестве примера границу раздела между фазами в одноосном кристалле типа «легкая ось», предполагая при этом, что вектор $\mathbf{M}$ параллелен (или антипараллелен) оси легкого намагничения (оси z).

Структура переходного слоя определяется условием минимальности его полной свободной энергии [2]. При этом обменная энергия действует в направлении увеличения толщины слоя (т. е. более плавного изменения направления $\mathbf{M}$ в нем). В противоположном же направлении действует энергия анизотропии, поскольку всякое отклонение $\mathbf{M}$ от направления легкого намагничения увеличивает ее.

Выберем ось x в направлении, перпендикулярном к плоскости слоя; распределение $\mathbf{M}$ зависит только от этой координаты. Поворот вектора $\mathbf{M}$ вдоль толщины слоя должен происходить в плоскости yz, т. е. везде $M_x = 0$. Это ясно из следующих простых соображений. Энергии неоднородности и анизотропии в одноос-

---

[1] По порядку величины (например, для железа) $\alpha \sim 10^{-12}$ см.

[2] В пренебрежении магнитострикцией нет необходимости различать свободную энергию $\widetilde{\mathscr{F}}$ и термодинамический потенциал $\widetilde{\Phi}$. Если же иметь в виду учет упругой и магнитоупругой энергий неоднородной деформации (что может оказаться необходимым в некоторых случаях — см. задачу 2), то следует говорить о полной свободной энергии. Напомним в этой связи, что уравнения равновесия среды получаются путем варьирования именно ее полной свободной энергии по компонентам вектора деформации $\mathbf{u}$ (ср. вывод, изложенный в конце § 15 для жидкости; уравнение равновесия $\mathbf{f} = 0$ получается приравниванием нулю вариации $\delta\mathscr{F}$).

ном кристалле вообще не зависят от того, в какой плоскости происходит поворот намагниченности. Наличие же отличной от нуля составляющей M_x неизбежно привело бы к возникновению магнитного поля, что заведомо термодинамически невыгодно ввиду связанной с ним дополнительной магнитной энергии. Действительно, из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = dB_x/dx = 0$ следует, что вдоль переходного слоя $B_x = \mathrm{const}$, а поскольку в глубине доменов $M_x = 0$, $H_x = 0$, то $B_x = 0$ везде. Поэтому вместе с компонентой $M_x \neq 0$ должно появиться и поле $H_x = -4\pi M_x$. В свободной же энергии $\widetilde{F}$ соответственно появляется член [1])

$$-M_x H_x - \frac{H_x^2}{8\pi} = \frac{H_x^2}{8\pi} > 0.$$

Пусть θ — угол между $\mathbf{M}$ и осью z. Тогда компоненты $\mathbf{M}$:

$$M_x = 0, \quad M_y = M\sin\theta, \quad M_z = M\cos\theta.$$

Сумма энергий неоднородности (43.3) и анизотропии (41.1) дается интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\alpha_1}{2}(M_y'^2 + M_z'^2) + \frac{\beta}{2}M_y^2\right] dx = \frac{M^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1\theta'^2 + \beta\sin^2\theta)\, dx \tag{43.4}$$

(штрих означает дифференцирование по x). Остальные члены в свободной энергии не зависят от структуры слоя и потому могут быть опущены.

Для определения функции $\theta(x)$, минимизирующей этот интеграл, запишем соответствующее уравнение Эйлера

$$\alpha_1\theta'' - \beta\sin\theta\cos\theta = 0.$$

Предполагая толщину переходного слоя малой по сравнению с шириной самих доменов, можно писать граничные условия к этому уравнению в виде

$$\theta(+\infty) = 0, \quad \theta(-\infty) = \pi, \quad \theta'(\pm\infty) = 0. \tag{43.5}$$

Они выражают собой тот факт, что соседние домены намагничены во взаимно противоположных направлениях. Первый интег-

---

[1]) Точнее говоря, в данном случае следует рассматривать термодинамический потенциал $\mathscr{F}'$ — ср. конец § 44. При заданном значении $B_n = B_x$ этот потенциал должен иметь минимум по отношению к M_x или H_x. Но при $B_x = 0$ потенциалы $\widetilde{F}$ и F' совпадают.

рал уравнения Эйлера, удовлетворяющий этим условиям [1]):

$$\theta'^2 - \frac{\beta}{\alpha_1}\sin^2\theta = 0. \tag{43.6}$$

Интегрируя еще раз, находим

$$\cos\theta = \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha_1}}\,x\right), \tag{43.7}$$

чем и определяется ход изменения намагниченности в переходном слое. Его ширина $\delta \sim \sqrt{\alpha_1/\beta}$.

С учетом равенства (43.6) интеграл (43.4) становится равным

$$M^2\alpha_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta'^2\,dx = M^2\sqrt{\alpha_1\beta}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta = 2M^2\sqrt{\alpha_1\beta}.$$

Если рассматривать границу раздела между доменами как геометрическую поверхность, то эта величина есть поверхностное натяжение, которое должно быть приписано границе для учета энергии, необходимой для ее образования. Обозначим поверхностное натяжение доменной стенки как $M^2\Delta$, где Δ имеет размерность длины. Тогда

$$\Delta = 2\sqrt{\alpha_1\beta}. \tag{43.8}$$

З а д а ч и

1. Определить поверхностное натяжение доменной стенки в кубическом ферромагнетике с осями легкого намагничения вдоль ребер куба (оси x, y, z). Домены намагничены параллельно и антипараллельно оси z, а доменная стенка расположена: а) параллельно плоскости (100); б) параллельно плоскости (110) (*Е.М. Лифшиц*, 1944; *L. Néel*, 1944).

Р е ш е н и е. а) Доменная стенка параллельна плоскости yz, все величины в ней зависят только от координаты x, а поворот вектора $\mathbf{M}$ происходит в плоскости yz (к аргументации, приведенной в тексте параграфа для одноосных кристаллов, добавляется еще и то, что отклонение $\mathbf{M}$ из плоскости yz привело бы в данном случае к увеличению энергии анизотропии). Пренебрегая энергией магнитострикции и воспользовавшись для энергии неоднородности формулой (43.2) и формулой (40.7) для энергии анизотропии (обозначив в ней $K = \beta M^2/2$), найдем свободную энергию стенки в виде

$$\frac{M^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\alpha\theta'^2 + \beta\sin^2\theta\cos^2\theta)\,dx$$

---

[1]) Это выражение можно, конечно, написать сразу (не выписывая уравнения Эйлера), если заметить, что интеграл в (43.4) имеет вид интеграла действия для одномерного движения частицы в поле с потенциальной энергией $-\beta\sin^2\theta$ (причем θ играет роль координаты, а x — роль времени). Тогда (43.6) выражает собой «сохранение энергии частицы».

(θ — угол между $\mathbf{M}$ и осью z). Первый интеграл уравнения Эйлера задачи о минимизации этого функционала, удовлетворяющий граничным условиям (43.5):

$$\alpha\theta'^2 - \beta\sin^2\theta\cos^2\theta = 0,$$

или

$$\theta' = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sin^2\theta|\cos\theta|$$

(написав $|\cos\theta|$, мы обеспечиваем монотонное изменение угла θ в переходном слое). Это уравнение не имеет решения, которое могло бы описывать структуру доменной стенки конечной толщины (для этого необходим учет энергии магнитострикции — см. задачу 2), но оно достаточно для вычисления поверхностного натяжения, оказывающегося конечным уже при сделанных пренебрежениях:

$$\Delta_{(100)} = \sqrt{\alpha\beta}\cdot 2\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \sqrt{\alpha\beta}.$$

б) Доменная стенка проходит через ось z под углом 45° к осям x и y. Необходимость избежать появления значительного магнитного поля по-прежнему стремится удержать вектор $\mathbf{M}$ в плоскости стенки. Но магнитная анизотропия в этом случае несколько выводит $\mathbf{M}$ из указанной плоскости. Тем не менее, ввиду предполагаемой малости энергии анизотропии в кубическом кристалле, это отклонение будет малым и им можно, с достаточной точностью, пренебречь. Тогда

$$M_x = M_y = \frac{M}{\sqrt{2}}\sin\theta, \quad M_z = M\cos\theta$$

(θ — снова угол между $\mathbf{M}$ и осью z) и энергия анизотропии:

$$U_{\text{ан}} = \frac{\beta M^2}{8}\sin^2\theta(3\cos^2\theta + 1).$$

Выпишем сразу первый интеграл уравнения Эйлера вариационной задачи:

$$\theta'^2 = A\sin^2\theta(\cos^2\theta + B), \tag{1}$$

где $A = 3\beta/(4\alpha)$, $B = 1/3$, а штрих означает дифференцирование по координате, нормальной плоскости стенки (обозначим ее буквой ξ). Отсюда, снова с учетом условий (43.5), находим уравнение структуры стенки

$$\operatorname{sh}\xi\sqrt{A(1+B)} = \sqrt{\frac{1+B}{B}}\operatorname{ctg}\theta, \tag{2}$$

т. е.

$$\operatorname{sh}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,\xi = 2\operatorname{ctg}\theta.$$

Для поверхностного натяжения находим

$$\Delta = \alpha\sqrt{A}\left\{\sqrt{1+B} + B\operatorname{Arsh}\frac{1}{\sqrt{B}}\right\}, \tag{3}$$

т. е. при указанных значениях A и B:

$$\Delta_{(110)} = 1{,}38\sqrt{\alpha\beta}.$$

2. Найти структуру доменной стенки в плоскости (100), поверхностное натяжение которой вычислено в задаче 1а (*Е.М. Лифшиц*, 1944).

Р е ш е н и е. Как уже было упомянуто, конечное значение ширины данной стенки получается только при учете энергии магнитострикции. Структура стенки определяется условием минимальности свободной энергии $\widetilde{\mathscr{F}}$, плотность которой $\widetilde{F}$ должна быть выражена через u_{ik} (ср. примеч. на с. 225). Соответствующие выражения магнитоупругой и упругой энергий имеют вид, аналогичный (42.2), (42.3) (с другими коэффициентами):

$$U_{\text{м. у}} = b_1\left(u_{yy}m_y^2 + u_{zz}m_z^2\right) + 2b_2u_{yz}m_ym_z,$$

$$U_{\text{упр}} = \frac{\lambda_1}{2}\left(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2\right) + \frac{\lambda_2}{2}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})^2 + \lambda_3\left(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2\right)$$

(здесь уже положено $m_x = 0$).

Вместе с распределением намагниченности может зависеть только от x также и деформация в переходном слое. Отсюда следует, что y-, z-компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ должны иметь вид: $u_y = \text{const}\cdot y$, $u_z = \text{const}\cdot z$; если бы вместо const стояли функции x, то u_{xy}, u_{xz} оказались бы зависящими от y или z. Таким образом, u_{yy}, u_{zz}, u_{yz}, — постоянные. Далее, из общих уравнений упругого равновесия $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0$ следует, что $\sigma'_{ik} = 0$; поскольку при $x = \pm\infty$, где деформация отсутствует, должно быть $\sigma_{ik} = 0$, то $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$ везде. Вычислив эти компоненты тензора напряжений как производные $\sigma_{ik} = \partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}$, найдем, что $u_{xy} = u_{xz} = 0$, $u_{xx} = \text{const}$. Таким образом, все u_{ik} действительно постоянны. Поэтому достаточно вычислить их значения на бесконечности, где все $\sigma_{ik} = 0$, а $m_y = 0$, $m_z = \pm 1$. Из равенств $\sigma_{yz} = 0$, $\sigma_{zz} - \sigma_{yy} = 0$ найдем

$$u_{yz} = 0, \quad u_{yy} - u_{zz} = \frac{b_1}{\lambda_1}.$$

Опустив в $U_{\text{м.у}}$ и $U_{\text{упр}}$ постоянные члены, найдем, что к сумме $U_{\text{неодн}} + U_{\text{ан}}$ надо добавить еще член

$$U_{\text{м.у}} = \frac{b_1^2}{\lambda_1}\sin^2\theta.$$

В результате определение зависимости $\theta(x)$ сведется к решению уравнения вида (1), в котором теперь

$$A = \frac{\beta}{\alpha}, \quad B = \frac{2b_1^2}{\lambda_1\beta M^2}.$$

Константа B, характеризующая отношение энергии магнитострикции к энергии анизотропии, мала [1]). Положив в (3) $B = 0$, получим уже известное из задачи 1а значение $\Delta_{(100)}$. Из (2) находим для распределения намагниченности в стенке

$$\operatorname{sh}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,x = \sqrt{\frac{\lambda_1\beta M^2}{2b_1^2}}\operatorname{ctg}\theta.$$

Ширина этого распределения

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ln\frac{\lambda_1\beta M^2}{b_1^2}$$

существенно зависит от константы магнитострикции [2]).

---

[1]) Так, для железа при комнатной температуре $B \approx 2\cdot 10^{-3}$.

[2]) При $b_1 \to 0$ рассматриваемая 180-*градусная* (по углу поворота вектора $\mathbf{M}$ в ней) стенка как бы распадается на две 90-*градусные*, разделенные стремящейся к бесконечности областью с $\theta = \pi/2$.

3. В таком же кристалле найти поверхностное натяжение доменной стенки, разделяющей домены, намагниченные в направлениях [001] и [010] (оси z и y) в случаях: а) стенка параллельна плоскости (100), б) стенка параллельна плоскости (011) (*С.В. Вонсовский*, 1944; *L. Néel*, 1944) [1]).

Р е ш е н и е. В обоих случаях магнитоупругой энергией можно пренебречь.

а) В этом случае вектор **M** поворачивается, оставаясь в плоскости стенки — плоскость yz. Отличие от задачи 1а состоит лишь в граничных условиях:

$$\theta(-\infty) = 0, \quad \theta(+\infty) = \frac{\pi}{2}, \quad \theta'(\pm\infty) = 0.$$

Структура стенки описывается решением

$$\operatorname{tg}\theta = \exp\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,x\right),$$

а поверхностное натяжение составляет

$$\Delta^{90^\circ}_{(100)} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha\beta}$$

— половину значения для 180-градусной стенки.

б) Наряду с кристаллографическими осями x, y, z вводим оси x, η, ζ, как показано на рис. 22 (ось x перпендикулярна плоскости рисунка; стрелки показывают направления **M** в доменах, разделенных плоскостью $\eta = 0$). В переходном слое вектор **M** вращается, описывая половину кругового конуса с осью вдоль оси η; при этом $M_\eta = \text{const} = 1/\sqrt{2}$, так что $\operatorname{div}\mathbf{M} = M'_\eta = 0$, как и должно быть (штрих — дифференцирование по η). Обозначим через φ угол между проекцией **M** на плоскость $x\zeta$ и осью ζ (φ пробегает значения от 0 до π). Тогда

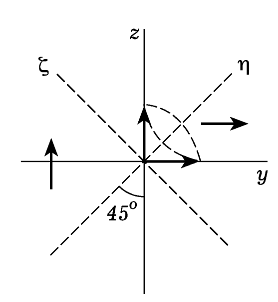


Рис. 22

$$m_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m_\zeta = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}, \quad m_x = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}},$$
$$m_y = \frac{1-\cos\varphi}{2}, \quad m_z = \frac{1+\cos\varphi}{2}.$$

Энергии неоднородности и анизотропии:

$$U_{\text{неодн}} = \frac{\alpha M^2}{4}\varphi'^2, \quad U_{\text{ан}} = \frac{\beta M^2}{4}\left(\sin^2\varphi - \frac{3}{8}\sin^4\varphi\right).$$

Для поверхностного натяжения находим

$$\Delta^{90^\circ}_{(110)} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{4}\cdot 2\int_0^\pi \sin\theta\left[1-\frac{3}{8}\sin^2\theta\right]^{1/2} d\theta =$$
$$= \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}\left[1 + \frac{5}{2\sqrt{6}}\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{3}{5}}\right] = 1{,}73\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}.$$

[1]) В кубическом кристалле (в отличие от одноосных — см. примеч. на с. 233) 90-градусная стенка — настоящая межфазная граница, поскольку оба домена представляют собой устойчивые фазы, каждая из которых намагничена в одном из легких направлений.

4. Найти поверхностное натяжение доменной стенки в одноосном кристалле, если переход между доменами осуществляется путем изменения величины вектора **M** без его поворота — направление **M** меняется на противоположное при прохождении M через нуль. Зависимость свободной энергии от M (при $\mathbf{H} = 0$) берется в виде разложения (39.3), отвечающего близости к точке Кюри (*В.А. Жирнов*, 1958).

Р е ш е н и е. Во всем переходном слое M_z равно M и меняется вдоль оси x, перпендикулярной плоскости стенки. Плотность свободной энергии с учетом энергии неоднородности

$$F = F_0 - |A|M^2 + BM^4 + \frac{\alpha_1}{2}M'^2. \quad (1)$$

Равновесное значение намагниченности в толще доменов обозначим здесь как M_0: $M_0^2 = |A|/2B$ (см. (39.5)). Введя вектор $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ ($m \neq 1$), напишем свободную энергию стенки в виде

$$\frac{1}{2}|A|M_0^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[(1 - m^2)^2 + \frac{\alpha_1}{|A|}m'^2\right] dx$$

(аддитивная постоянная в F выбрана так, чтобы F обращалось в нуль в глубине доменов). Минимизация этого интеграла должна производиться при граничных условиях

$$m(+\infty) = 1, \quad m(-\infty) = -1, \quad m'(\pm\infty) = 0.$$

Первый интеграл уравнения Эйлера этой вариационной задачи:

$$\frac{\alpha_1}{|A|}m'^2 = (1 - m^2)^2.$$

Отсюда находим

$$m(x) = \operatorname{th}\sqrt{\frac{|A|}{\alpha_1}}\,x,$$

а вычисление интеграла дает для поверхностного натяжения $M_0^2\Delta$ значение

$$\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{\alpha_1|A|}. \quad (2)$$

Рассмотренная структура стенки может, в принципе, иметь место в достаточной близости к точке Кюри (если отношение $\beta/|A|$ стремится при $T \to T_c$ к бесконечности), где изменение величины вектора **M** становится энергетически более выгодным, чем его отклонение от направления легкого намагничения.

§ 44. Доменная структура ферромагнетиков

Обратимся теперь к выяснению фактической формы и размеров доменов [1]).

Некоторые заключения о форме поверхностей раздела между доменами можно сделать непосредственно из граничных условий для магнитного поля. Поскольку напряженность **H** в соседних

[1]) Понятие о доменах было впервые введено *Вейссом* (*P. Weiss*, 1907). Термодинамическая теория доменов была дана *Л.Д. Ландау* и *Е.М. Лифшицем* (1935).

доменах одинакова, то условие непрерывности нормальной составляющей индукции B_n сводится к условию непрерывности M_n. В одноосных кристаллах намагниченность различных доменов отличается знаком M_z при одинаковых M_x, M_y. В этих условиях непрерывность M_n означает, что поверхность раздела должна быть параллельна оси z, т. е. оси легкого намагничения.

Форма и размеры термодинамически равновесных доменов определяются условием минимальности полной свободной энергии. Они существенно зависят от конкретных форм и размеров тела. В простейшем случае ферромагнетика в виде плоскопараллельной пластинки домены могут иметь, в принципе, форму параллельных слоев, проходящих сквозь тело от одной его поверхности до другой. Мы будем говорить ниже именно о такой структуре.

Возникновение всякой новой границы между доменами приводит к увеличению полной энергии поверхностного натяжения. Этот фактор, следовательно, действует в направлении уменьшения числа доменов, т. е. увеличения их толщины.

В обратном направлении действует избыточная энергия, возникающая вблизи внешней поверхности тела, к которой выходят домены. В толще тела магнитное поле $\mathbf{H} = 0$; равна нулю также энергия анизотропии, поскольку вектор $\mathbf{M}$ лежит в направлениях легкого намагничения. Но вблизи поверхности положение меняется.

Характер выхода доменов к поверхности тела различен в предельных случаях большой и малой магнитной анизотропии. При этом естественной мерой этой величины является в данном случае не сам коэффициент β в (41.1), а $\beta/(4\pi)$. Это видно уже из выражения поперечной магнитной проницаемости одноосного ферромагнетика $\mu_{xx} = 1 + 4\pi/\beta$ (см. (41.7)).

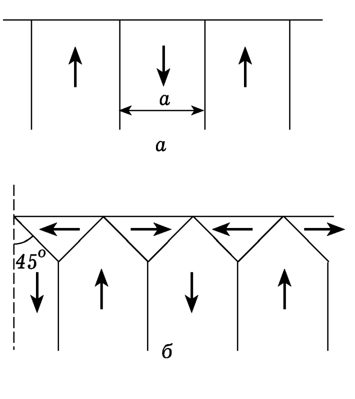


Рис. 23

При большой магнитной анизотропии слои должны выходить к поверхности тела с неизменным направлением $\mathbf{M}$ (рис. 23 *а*; мы будем предполагать, для простоты, что поверхность пластинки перпендикулярна к направлению легкого намагничения). Но при этом вблизи поверхности возникает магнитное поле, проникающее в окружающее пространство и в глубь тела на расстояния порядка величины толщины слоев a.

В обратном же случае слабой анизотропии более выгодным является такое распределение намагниченности, при котором исключается возникновение магнитного поля, ценой отклонения $\mathbf{M}$

от направления легкого намагничения. При $\mathbf{H} = 0$ должно быть всюду $\operatorname{div}\mathbf{B} = 4\pi \operatorname{div}\mathbf{M} = 0$, и на всех границах доменов и на свободной поверхности тела M_n должно быть непрерывным. Это достигается возникновением *замыкающих доменов* треугольного сечения (рис. 23 *б*), в которых намагниченность параллельна поверхности тела. Полный объем этих областей, а с ним и энергия анизотропии в них пропорциональны той же толщине слоев a [1]).

Таким образом, во всех случаях выход доменов к поверхности тела связан с возникновением избыточной энергии — тем большей, чем больше ширина доменов. Тем самым этот эффект действует в направлении «утончения» доменов.

Устанавливающаяся ширина доменов определяется игрой этих двух противоположных тенденций — поверхностной энергии доменных стенок и *энергии выхода* доменов к поверхности тела. Число доменов (плоскопараллельных слоев) в пластинке пропорционально $1/a$, а энергия поверхностного натяжения пропорциональна полной площади разделяющих их границ, т. е. пропорциональна l/a (где l — толщина пластинки). Энергия же выхода пропорциональна a. Сумма этих двух энергий как функция от a минимальна при некотором значении a, пропорциональном $\sqrt{l}$.

Так, для случая слабой анизотропии (рис. 23 *а*) энергия выхода (отнесенная к единице площади пластинки с обеих ее сторон) $\sim a\beta M^2$; поверхностная же энергия равна $M^2\Delta l/a$ (толщина пластинки l предполагается, конечно, большой по сравнению с шириной доменов). Отсюда

$$a \sim \sqrt{\frac{l\Delta}{\beta}} \sim \sqrt{l\delta}. \tag{44.1}$$

Таким образом, толщина доменов растет с увеличением размеров тела. Но количественный закон $a \propto l^{1/2}$ этого возрастания, связанный с предположением о постоянстве толщины доменов, заведомо не может быть справедливым при любых значениях l.

[1]) Следует подчеркнуть, что граница между основными и замыкающими доменами, разделяющая области с повернутыми на $90°$ направлениями $\mathbf{M}$, не является в данном случае (т. е. в одноосных кристаллах) межфазной границей в буквальном смысле этого слова. Это ясно уже из того, что состояние намагничения перпендикулярно легкой оси (при $\mathbf{H} = 0$) само по себе неустойчиво и не является возможной фазой вещества. Строго говоря, изображенная на рис. 23 *б* картина распределения намагниченности относится лишь к пределу $\beta \to 0$. Уже в первом приближении по малой величине $\beta/4\pi$ появляются отклонения от этой картины и переход между основными и замыкающими доменами происходит на расстояниях, малых по сравнению с шириной доменов a лишь в меру малости $\beta/4\pi$; при этом появляются поля $\sim \beta M$ (что не отражается, однако, на оценке энергии выхода доменов к поверхности образца).

Дело в том, что толщина доменов при их выходе в поверхности тела не может превышать некоторого предельного значения a_k, зависящего от свойств самого ферромагнетика, но не от формы и размеров тела как целого. Оно определяется моментом, когда, по мере увеличения a, термодинамически выгодным становится расщепление домена вблизи поверхности тела на глубину $\sim a$. Такой момент неизбежно наступает, поскольку энергия выхода одного домена растет как a^2, а избыточная энергия поверхностного натяжения, возникающая при расщеплении домена, — всего как a.

Мы приходим к выводу, что по мере увеличения размеров тела, а с ним и толщины доменов, должно наступать прогрессирующее разветвление доменов при их подходе к поверхности тела (*Е.М. Лифшиц*, 1944) [1]). В принципе, при достаточном возрастании размеров l ветвление продолжается до тех пор, пока толщина образовавшихся у самой поверхности тела ветвей не станет сравнимой с толщиной доменной стенки δ.

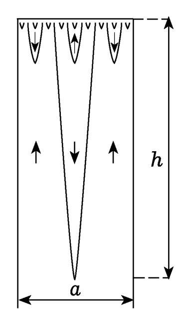


Рис. 24

Определим зависимость $a(l)$ для такого предельного случая. При оценках будем, для определенности, считать анизотропию слабой.

На рис. 24 изображена схема разветвления домена. Энергия выхода доменов складывается теперь из дополнительной поверхностной энергии «клиновидных» доменов и из энергии анизотропии, связанной с отклонением вектора $\mathbf{M}$ от оси z в результате разветвления; треугольных же замыкающих доменов теперь нет. Предполагая быструю сходимость суммы по последовательным ветвлениям, достаточно рассмотреть первый клин; обозначим его длину через h. Из соображений энергетической выгодности легко видеть, что длина клина h велика по сравнению с его толщиной (или, что то же по порядку величины, по сравнению с a), т. е. угол наклона его границы к оси z: $\vartheta \sim a/h \ll 1$. Действительно, поверхностная энергия клина $\sim hM^2\Delta$, а связанная с ним энергия анизотропии $\sim ha\beta M^2\vartheta^2 \sim a^3\beta M^2/h$; сумма этих двух энергий (энергия выхода) минимальна при $h^2 \sim a^3\beta/\Delta$, т. е.

$$\frac{a}{h} \sim \sqrt{\frac{\Delta}{a\beta}} \sim \sqrt{\frac{\delta}{a}} \ll 1 \tag{44.2}$$

[1]) Критическое значение длины l, при котором начинается ветвление, сильно зависит от характера магнитной анизотропии и от расположения поверхности образца по отношению к его кристаллографическим осям. Исследование начальных стадий разветвления доменов — см. *Лифшиц Е.М.* // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. С. 97; J. Phys. USSR. 1944. V. 8. P. 337.

(предполагается, конечно, что $a \gg \delta$). При этом энергия выхода (отнесенная к единице площади поверхности пластинки): $\sim a^{3/2}M^2\sqrt{\beta\Delta}\big/a$. Поверхностная же энергия основных доменных границ: $\sim M^2\Delta l/a$. Минимизируя сумму обоих этих выражений, находим искомую зависимость:

$$a \sim l^{2/3}\left(\frac{\Delta}{\beta}\right)^{1/3} \sim (l^2\delta)^{1/3} \tag{44.3}$$

(*И.А. Привороцкий*, 1970)[1]).

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос об условиях равновесия фаз ферромагнетика с несколько более общей точки зрения, чем это было нужно для изложенного выше: не будем предполагать теперь равенства всех компонент вектора $\mathbf{H}$ в обеих фазах (такая постановка вопроса может понадобиться, например, при рассмотрении искривленных доменных границ).

Прежде всего, должны выполняться общие магнитостатические условия (29.13):

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}, \tag{44.4}$$

являющиеся следствием уже самих уравнений Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$. Но помимо этих равенств должно выполняться еще и термодинамическое условие, выражающее собой равновесие по отношению к сдвигу поверхности раздела (в нормальном к себе направлении), т. е. по отношению к переходу вещества из одной фазы в другую. Это условие выражается равенством в обеих фазах величин, являющихся термодинамическими потенциалами по отношению к переменным B_n и $\mathbf{H}_t$[2]). Для нахождения этих величин достаточно переписать в выражении дифференциала $d\widetilde{F}$ (31.6) (магнитострикцией снова пренебрегаем) произведение $-\mathbf{B}\,d\mathbf{H}$ в виде

$$-\mathbf{B}\,d\mathbf{H} = -\mathbf{B}_t\,d\mathbf{H}_t - B_n\,dH_n = -d(B_nH_n) - \mathbf{B}_t\,d\mathbf{H}_t + H_n\,dB_n.$$

Отсюда ясно, что требуемый термодинамический потенциал (обозначим его через F') есть

$$F' = \widetilde{F} + \frac{1}{4\pi}B_nH_n, \tag{44.5}$$

[1]) Идея о разветвлении доменов и заключение о предельном законе $a \backsim l^{2/3}$ были впервые высказаны *Л.Д. Ландау* в применении к промежуточному состоянию сверхпроводников (§ 57).

[2]) Обоснование этого утверждения аналогично выводу обычного условия фазового равновесия — равенства химических потенциалов обеих фаз, в которых независимыми переменными являются температура и давление, одинаковые в обеих фазах (см. V, § 81).

а искомое граничное условие

$$F_1' = F_2' \tag{44.6}$$

(*И.А. Привороцкий, М.Я. Азбель*, 1969).

Задача

Определить энергию магнитного поля вблизи поверхности ферромагнетика, к которой выходят перпендикулярные к ней плоскопараллельные домены без изменения направления своей намагниченности (рис. 21 a).

Решение. Задача об определении магнитного поля вблизи такой поверхности эквивалентна электростатической задаче о поле, создаваемом плоскостью, чередующиеся полосы которой заряжены положительными и отрицательными зарядами с поверхностной плотностью $\sigma = \pm M$.

Пусть поверхность тела совпадает с плоскостью $z = 0$, а ось x выбрана в направлении, перпендикулярном к плоскости доменов. «Поверхностная плотность зарядов» $\sigma(x)$ есть периодическая функция с периодом $2a$ (a — ширина домена), равная на одном из периодов

$$\sigma = -M \quad \text{при} \quad -a < x < 0, \qquad \sigma = +M \quad \text{при} \quad 0 < x < a.$$

Ее разложение в ряд Фурье:

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}, \qquad c_n = \frac{4M}{\pi(2n+1)}.$$

Потенциал поля удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Ищем его в виде ряда

$$\varphi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{a} \exp\left\{\mp(2n+1)\frac{\pi z}{a}\right\}$$

(два знака в показателе соответствуют полупространствам $z > 0$ и $z < 0$). Коэффициенты b_n определяются граничным условием

$$-\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=+0} + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-0} = 4\pi\sigma,$$

откуда

$$b_n = \frac{2a}{2n+1}c_n.$$

Искомую энергию поля можно вычислить как интеграл $\frac{1}{2}\int \sigma\varphi\, df$ по «заряженной поверхности». Относя энергию к 1 см^2 площади поверхности, имеем

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} (\sigma\varphi)\Big|_{z=0} dx = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n = \frac{8aM^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-3} = \frac{7aM^2}{\pi^2}\zeta(3).$$

Со значением ζ-функции $\zeta(3) = 1{,}202$ получаем

$$0{,}852M^2a.$$

Ширина доменов в пластинке получается минимизацией суммы

$$1{,}7M^2a + M^2\frac{\Delta l}{a},$$

где первый член — энергия выхода доменов к обеим сторонам пластинки, а второй — поверхностная энергия. Отсюда $a = 0{,}8\sqrt{\Delta l}$ (*Ch. Kittel*, 1946).

§ 45. Однодоменные частицы

По мере уменьшения размеров тела образование доменов становится в конце концов термодинамически невыгодным, так что достаточно малые ферромагнитные частицы представляют собой «однодоменные» однородно намагниченные образования. Критерий для их размеров l получается путем сравнения магнитной энергии однородно намагниченной частицы с энергией неоднородности, которая возникла бы при наличии существенной неоднородности в распределении намагниченности по объему частицы. Первая — порядка величины M^2V, а вторая $\sim \alpha M^2V/l^2$. Поэтому размеры однодоменных частиц [1]

$$l \lesssim \sqrt{\alpha}. \tag{45.1}$$

Для выяснения поведения однородно намагниченной частицы во внешнем магнитном поле надо рассмотреть ее полную свободную энергию, подставив в формулу (32.7) для $\widetilde{F}$ сумму выражения (39.1) и энергии анизотропии [2]:

$$\widetilde{\mathscr{F}} = VU_{\text{ан}} - \frac{\mathbf{M}}{2}\int(\mathbf{H} + \mathfrak{H})\,dV, \tag{45.2}$$

причем интегрирование производится только по объему тела; несущественная постоянная VF_0 опущена. Пусть частица имеет форму эллипсоида. Тогда поле $\mathbf{H}$ внутри нее определяется равенством (29.14) или

$$H_i = \mathfrak{H}_i - 4\pi n_{ik}M_k; \tag{45.3}$$

здесь второй член — создаваемое телом «размагничивающее поле». Таким образом, находим

$$\widetilde{\mathscr{F}} = 2\pi n_{ik}M_iM_kV - V\mathbf{M}\mathfrak{H} + VU_{\text{ан}}. \tag{45.4}$$

---

[1] О свойствах ансамблей таких частиц иногда говорят как о *микромагнетизме.*

[2] Пренебрегая магнитострикцией, мы не делаем различия между термодинамическим потенциалом и свободной энергией, рассматривая последнюю при заданном объеме тела V.

Первый член называют собственной *магнитостатической энергией* намагниченной частицы, а второй представляет собой ее энергию во внешнем поле.

Направление намагниченности частицы во внешнем поле $\mathfrak{H}$ определяется условием минимальности $\widetilde{\mathscr{F}}$ как функции направления $\mathbf{M}$. Для кубического кристалла можно пренебречь в (45.4) энергией анизотропии. Для одноосных кристаллов, написав энергию анизотропии в виде $\beta_{ik}M_iM_k/2$, имеем

$$\widetilde{\mathscr{F}} = \frac{V}{2}(4\pi n_{ik} + \beta_{ik})M_iM_k - V\mathfrak{H}\mathbf{M}. \tag{45.5}$$

Поставленная таким образом задача в математическом отношении совпадает с рассмотренной в § 41 задачей о зависимости местного $\mathbf{M}$ от местного поля $\mathbf{H}$, отличаясь лишь заменой $\mathbf{H}$ на $\mathfrak{H}$ и β_{ik} на $4\pi n_{ik}$ или $4\pi n_{ik} + \beta_{ik}$.

Наконец, выведем уравнение, которому должно удовлетворять распределение намагниченности в однодоменном образце в условиях, когда это распределение еще нельзя считать однородным. Для этого надо потребовать минимальности полной свободной энергии тела, которую напишем в виде интеграла

$$\widetilde{\mathscr{F}} = \int \widetilde{F}\,dV = \int \left\{F_0(M) + U_{\text{неодн}} + U_{\text{ан}} - \mathbf{M}\mathbf{H} - \frac{H^2}{8\pi}\right\} dV, \tag{45.6}$$

берущемуся по всему пространству. Варьирование производится по $\mathbf{M}$ (теперь — функции координат) при заданном в каждой точке значении $\mathbf{H}$; абсолютная величина M полагается заданной, так что варьируется лишь направление $\mathbf{M}$. Опустив в подынтегральном выражении члены, зависящие только от M и от $\mathbf{H}$, варьируем интеграл

$$\int \left\{\frac{1}{2}\alpha_{ik}M^2\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial x_i}\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial x_k} + U_{\text{ан}} - M\mathbf{m}\mathbf{H}\right\} dV,$$

который берется теперь только по объему тела (где $\mathbf{M} \neq 0$). Произведя (после варьирования) в первом члене интегрирование по частям, находим

$$\delta\widetilde{\mathscr{F}} = -\int \left\{\alpha_{ik}M^2\frac{\partial^2\mathbf{m}}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{\partial U_{\text{ан}}}{\partial\mathbf{m}} + M\mathbf{H}\right\}\delta\mathbf{m}\,dV + \\ + \oint \alpha_{ik}M^2\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial x_k}\delta\mathbf{m}\cdot df_i; \tag{45.7}$$

второй интеграл берется по поверхности тела. Поскольку $\mathbf{m}^2 = 1$, то $\mathbf{m}\,\delta\mathbf{m} = 0$, т. е. вариация имеет вид $\delta\mathbf{m} = [\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{m}]$, где $\delta\boldsymbol{\omega}$ — произвольная (малая) функция координат. Из условия $\delta\widetilde{\mathscr{F}} = 0$

находим, приравняв нулю множитель при $\delta\boldsymbol{\omega}$ в подынтегральном выражении объемного интеграла, искомое уравнение [1])

$$\left[\mathbf{m}\left(\alpha_{ik}M^2\frac{\partial^2\mathbf{m}}{\partial x_i\partial x_k}-\frac{\partial U_{\text{ан}}}{\partial\mathbf{m}}+M\mathbf{H}\right)\right]=0. \tag{45.8}$$

Из равенства же нулю интеграла по поверхности находим граничное условие к этому уравнению; так, при $\alpha_{ik}=\alpha\delta_{ik}$ это условие имеет вид

$$\left[\mathbf{m}\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial n}\right]=0, \tag{45.9}$$

где $\mathbf{n}$ — направление нормали к поверхности тела.

Наряду с уравнением (45.8) должны, разумеется, удовлетворяться во всем пространстве уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}+4\pi M\mathbf{m})=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=0 \tag{45.10}$$

с обычными граничными условиями к нему на поверхности тела и с условием $\mathbf{H}\to\mathfrak{H}$ на бесконечности [2]).

Для однородно намагниченного тела (эллипсоида) первый член в круглых скобках в (45.8) исчезает. Оставшееся уравнение (с $\mathbf{H}$ из (45.3)) совпадает с условием минимальности свободной энергии (45.5).

§ 46. Ориентационные переходы

Константа анизотропии ферромагнетика является функцией температуры и как таковая может изменить в некоторой точке знак. При этом меняется направление спонтанной поляризации, а тем самым и симметрия магнитной структуры. Возникающие таким образом переходы между различными фазами магнетика называют *ориентационными*. Проследим, как осуществляются такие переходы в одноосном гексагональном ферромагнитном кристалле (*H. Horner*, *C.M. Varma*, 1968).

Поскольку мы имеем в виду рассмотреть окрестность точки, в которой константа анизотропии K_1 обращается в нуль, то необходимо учесть также и следующий член в разложении энергии

---

[1]) Оно совпадает, естественно, с уравнением движения (прецессии) магнитного момента в ферромагнетике, если положить в нем скорость $\partial\mathbf{M}/\partial t$ равной нулю (см. IX, § 69).

[2]) Может возникнуть вопрос о правомерности варьирования интеграла (45.6) по $\mathbf{m}$ при постоянном $\mathbf{H}$, несмотря на то, что они связаны между собой первым из уравнений (45.10). Дело, однако, в том, что если положить $\mathbf{H}=-\nabla\varphi$ (ввиду второго уравнения) и вычислить вариацию интеграла по φ, то она обратится в силу первого уравнения в нуль, так что варьирование по $\mathbf{H}$ не дает вклада в $\delta\mathscr{F}$.

анизотропии; для гексагонального ферромагнетика такое выражение $U_{\text{ан}}$ дается формулой (40.3).

Предположим сначала, что $K_2 > 0$. Тогда в зависимости от значений K_1 и K_2 минимуму $U_{\text{ан}}$ отвечают следующие фазы:

$$\begin{aligned} &\text{I)}\ \theta = 0, \pi \text{ при } K_1 > 0; \\ &\text{II)}\ \sin\theta = \pm\sqrt{-K_1/(2K_2)} \text{ при } -2K_2 < K_1 < 0; \\ &\text{III)}\ \theta = \pi/2 \text{ при } K_1 < -2K_2. \end{aligned} \tag{46.1}$$

Фазы I и III — соответственно типов «легкая ось» и «легкая плоскость». В фазе II вектор намагниченности не имеет фиксированной ориентации (как в фазах I и II), а при изменении температуры его направление меняется непрерывным образом между значениями угла $\theta = 0$ (или $\theta = \pi$) и $\theta = \pi/2$; симметрия этой фазы (ее иногда называют *угловой*) ниже симметрии как фазы I, так и фазы III. Переходы между фазами I и II и между фазами II и III происходят как фазовые переходы второго рода при температурах T_1 и T_2, определяемых условиями

$$K_1(T_1) = 0, \quad K_1(T_2) + 2K_2(T_2) = 0. \tag{46.2}$$

Ниже будем считать, для определенности, что $K_1 > 0$ при $T > T_1$. Тогда $T_2 < T_1$ (если $K_2 > 0$).

При наличии магнитного поля термодинамический потенциал

$$\widetilde{\Phi} = K_1 \sin^2\theta + K_2 \sin^4\theta - \mathbf{HM}; \tag{46.3}$$

здесь выписаны только члены, зависящие от направления $\mathbf{M}$. Вблизи точки перехода между фазами I и II роль параметра порядка играет малая величина $\sin\theta \approx \theta \equiv \eta$. В этой области термодинамический потенциал в слабом поперечном магнитном поле $H = H_x$:

$$\widetilde{\Phi} = K_1\eta^2 + K_2\eta^4 - MH_x\eta,$$

причем $K_1 = \text{const}\cdot(T - T_1)$. Обычным образом (ср. § 39) найдем отсюда, что в точке перехода обращается в бесконечность (по закону, аналогичному (39.6), (39.7)) поперечная восприимчивость

$$\chi_\perp = \left(\frac{\partial M_x}{\partial H_x}\right)_{H_x\to 0} \approx M\left(\frac{\partial\theta}{\partial H_x}\right)_{H_x\to 0}.$$

Аналогичным образом, вблизи точки перехода между фазами II и III роль параметра порядка играет малый угол $\eta = \pi/2 - \theta$. В продольном поле $H = H_z$ термодинамический потенциал содержит член $-MH_z\eta$, и в точке перехода обращается в бесконечность продольная восприимчивость $\chi_\parallel$.

Изложенные рассуждения лежат в рамках теории фазовых переходов Ландау. Отметим, что для ориентационных переходов эта теория применима практически без ограничений. Допустимая для теории Ландау близость к точке перехода определяется критерием (см. ниже (47.1)), в знаменатель которого входит куб коэффициента α в члене (43.1) термодинамического потенциала, связанном с неоднородностью распределения параметра порядка. В данном случае этот член связан с обменными взаимодействиями в ферромагнетике, между тем как члены разложения по самому параметру η связаны с релятивистскими взаимодействиями. Именно это обстоятельство приводит к чрезвычайной узости температурного интервала вокруг точки перехода, в которой теория Ландау оказывается неприменимой.

Пусть теперь $K_2 < 0$. Тогда угловая фаза II вообще неустойчива ($U_{\text{ан}}$ имеет максимум, а не минимум), так что легкоосная фаза I должна переходить непосредственно в легкоплоскостную фазу III. Заранее ясно, что это не может быть переход второго рода: ни одна из групп симметрии фазы I или III не является подгруппой группы симметрии другой фазы. Переход осуществляется как фазовый переход первого рода в точке $T = T_0$, определяемой условием равенства термодинамических потенциалов обеих фаз (сводящимся к равенству значений $U_{\text{ан}}$):

$$K_1(T_0) + K_2(T_0) = 0. \tag{46.4}$$

Точка T_0 лежит между точками T_1 и T_2, определяемыми уравнениями (46.2) (причем теперь $T_2 > T_1$). В этом случае температуры T_1 и T_2 определяют границы метастабильности соответственно фаз I и II (за этими границами $U_{\text{ан}}$ имеем при $\theta = 0$ или $\theta = \pi/2$ максимум, а не минимум).

Ориентационные переходы могут иметь место не только при изменении температуры (в таких случаях говорят о спонтанных переходах), но и при изменении наложенного на тело магнитного поля (индуцированные полем переходы). Точки этих переходов заполняют линии на фазовых диаграммах в координатах H, T (при заданной кристаллографической ориентации вектора $\mathbf{H}$). Для примера рассмотрим фазовые диаграммы того же одноосного ферромагнетика в поле H_z, параллельном гексагональной оси.

Продольное поле не меняет симметрии легкоосной фазы (*ЛОФ* на рис. 25). Легкоплоскостная же фаза становится угловой (*УФ*), поскольку поле выводит намагниченность $\mathbf{M}$ из базисной плоскости.

Рассмотрим сначала случай, когда $K_2 > 0$. Области обеих фаз разделены линиями фазовых переходов второго рода, начинающимися от точки T_1 на оси абсцисс (штриховые линии на рис. 25 *а*). Верхняя и нижняя части диаграммы отвечают двум взаимно противоположным направлениям продольного поля и,

соответственно, двум разным знакам продольной компоненты M_z. Вблизи линии AT_1 угол θ мал (вблизи линии $A'T_1$ мал угол $\pi-\theta$). С точностью до членов четвертого порядка по θ имеем из (46.3):

$$\widetilde{\Phi} = \left(K_1 + \frac{1}{2}MH_z\right)\theta^2 + \left(K_2 - \frac{1}{3}K_1 - \frac{1}{24}MH_z\right)\theta^4. \qquad (46.5)$$

Уравнение линии AT_1 определяется равенством нулю коэффициента при θ^2:

$$K_1(T) + \frac{1}{2}MH_z = 0 \qquad (46.6)$$

(напомним, что $K_1 < 0$ при $T < T_1$); линия $A'T_1$ определяется, очевидно, таким же уравнением с другим знаком во втором члене и симметрична по отношению к линии AT_1.

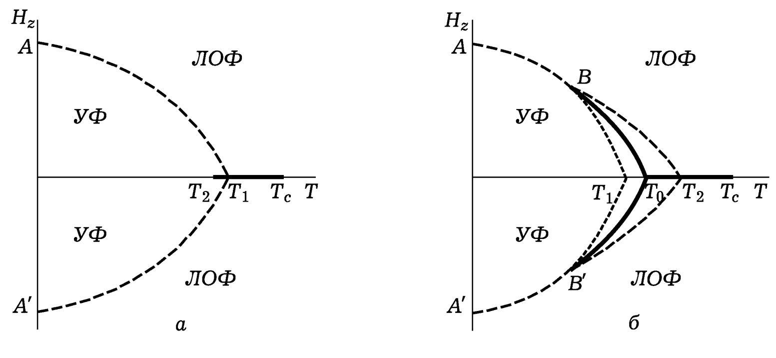


Рис. 25

Отрезок T_2T_c на оси абсцисс — линия фазовых переходов первого рода; на ней находятся в равновесии друг с другом две фазы с различными знаками M_z. Фазовый переход второго рода, который в отсутствие поля имеет место в точке T_2, при наличии поля исчезает; точка же T_2 является на фазовой диаграмме H, T критической точкой — точкой окончания линии переходов первого рода. Другой точкой окончания этой линии оказывается точка Кюри T_c (в которой, при $H_z = 0$, исчезает намагниченность).

В случае, когда $K_2 < 0$ (рис. 25 *б*), начальная часть границы ABT_0, разделяющей области обеих фаз на диаграмме H, T (и аналогично для границы $A'B'T_0$), – линия фазовых переходов первого рода (сплошная линия BT_0); по обе стороны от нее расположены области метастабильности двух фаз, ограниченные штриховыми линиями BT_1 и BT_2 [1]). В точке B (трикритическая

---

[1]) Подразумевается, что поверхность раздела между сосуществующими фазами параллельна магнитному полю, так что H_z на этой границе непрерывна.

точка) линия переходов первого рода переходит в линию переходов второго рода (штриховая линия BA; ее уравнение — (46.6)). Координаты этой точки определяются одновременным обращением в нуль коэффициентов при θ^2 и θ^4 в термодинамическом потенциале (46.5), т. е. равенствами [1])

$$MH_z = 2|K_1(T)|, \quad K_1(T) = 4K_2(T). \tag{46.7}$$

Наконец, отрезок T_0T_c — линия переходов первого рода между фазами с противоположно направленными намагниченностями $M_z = \pm M$.

§ 47. Флуктуации в ферромагнетике

Теория фазовых переходов Ландау, на которой основано изложение в § 39, не учитывает флуктуаций параметра порядка, в связи с чем она становится неприменимой в достаточной близости к точке Кюри. Область применимости этой теории определяется критерием

$$\frac{|t|}{T_c} \gg \frac{T_c B^2}{a\alpha^3}, \tag{47.1}$$

где $t = T - T_c$, a и B — коэффициенты в разложении (39.3), (39.4), а α — порядок величины компонент тензора α_{ik} в (43.1). В то же время должно быть, конечно, $|t| \ll T_c$ как условие близости к точке Кюри [2]).

При обратном знаке неравенства в (47.1), во *флуктуационной* области, флуктуации параметра порядка играют определяющую роль. Строгая статистическая теория для точки Кюри ферромагнетика в этой области должна была бы быть основана на эффективном гамильтониане

$$\mathscr{H}_{\text{эф}} = \int \left\{ at\mathbf{M}^2 + B(\mathbf{M}^2)^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} - \mathbf{HM} \right\} dV. \tag{47.2}$$

Функция $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ предполагается при этом меняющейся медленно в том смысле, что в ее фурье-разложение входят лишь волновые векторы, малые по сравнению с характерным обратным атомным

---

[1]) К трикритической точке на фазовой диаграмме H, T относится все то, что было получено в V, § 150 (в рамках теории Ландау) для трикритической точки в плоскости PT.

[2]) Здесь и ниже в этом параграфе используются результаты, изложенные в V, § 146–149. Они предполагаются известными читателю и частично упоминаются вновь лишь для большей связности изложения. Мы не будем делать каждый раз соответствующих ссылок.

расстоянием. Коэффициенты a, B, $\overline{\alpha}$ совпадают с коэффициентами разложения теории Ландау, т. е. являются не зависящими от температуры постоянными (член с производными написан, для простоты, в предположении кубической симметрии кристалла; коэффициент в нем обозначен здесь как $\overline{\alpha}$ в отличие от истинного коэффициента α — см. ниже). Эффективный гамильтониан (47.2) отвечает обменному приближению — в нем пренебрежено энергией анизотропии; в этом же приближении следует пренебрегать флуктуациями магнитного поля, возникающими в результате флуктуаций намагниченности (т. е. магнитостатической энергией флуктуаций — ср. IX, § 70). Для обменного приближения характерна «вырожденность» задачи: параметр порядка $\mathbf{M}$ имеет три компоненты, но эффективный гамильтониан инвариантен относительно поворотов этого вектора на один и тот же угол во всем пространстве.

Для описания поведения термодинамических величин вблизи точки фазового перехода второго рода вводят *критические индексы* (или *критические показатели*) согласно определениям, которые мы повторим здесь применительно к точке Кюри ферромагнетика. Индекс α определяет температурную зависимость теплоемкости C_p по обе стороны точки Кюри в отсутствие магнитного поля [1]):

$$C_p \propto |t|^{-\alpha} \text{ при } \mathbf{H} = 0. \tag{47.3}$$

Индекс β определяет температурную зависимость спонтанной намагниченности ниже точки Кюри:

$$M \propto (-t)^{\beta} \text{ при } t < 0, \quad \mathbf{H} = 0. \tag{47.4}$$

Индекс γ определяет зависимость от t магнитной восприимчивости парамагнитной фазы:

$$\chi \propto t^{-\gamma} \text{ при } t > 0, \quad \mathbf{H} = 0 \tag{47.5}$$

(о ее поведении при $t < 0$ — см. ниже). Зависимость же намагниченности от поля в самой точке Кюри записывается в виде

$$M \propto H^{1/\delta}, \quad t = 0. \tag{47.6}$$

Температурная зависимость корреляционного радиуса флуктуаций намагниченности определяется индексом ν:

$$r_c \propto |t|^{-\nu} \text{ при } \mathbf{H} = 0. \tag{47.7}$$

---

[1]) При этом имеется в виду «особая» часть теплоемкости. Это значит, что при $\alpha < 0$ теплоемкость ведет себя как $C_p = C_{p0} + \text{const} \cdot |t|^{|\alpha|}$. Не смешивать индекс α с коэффициентом α в (47.1), (47.2) и ниже!

В самой же точке Кюри корреляционная функция спадает с расстоянием по степенному закону [1])

$$G_{ik}(r) = \langle \delta M_i(0)\delta M_k(\mathbf{r})\rangle \backsim r^{-(1+\zeta)} \text{ при } t = 0, \quad \mathbf{H} = 0. \quad (47.8)$$

Критические индексы связаны друг с другом определенными соотношениями, некоторые из которых являются следствием *гипотезы масштабной инвариантности*. Эти соотношения имеют универсальный характер и не зависят, в частности, от числа компонент параметра порядка; они позволяют выразить все перечисленные индексы через любые два из них. Значения критических индексов для переходов с различным числом компонент параметра порядка n приведены в V, в конце § 149. Трехмерному ферромагнетику в обменном приближении отвечает $n = 3$.

В парамагнитной фазе корреляционная функция на расстояниях $r \gg r_c$ убывает по экспоненциальному закону. В ферромагнитной же фазе надо различать флуктуации с изменением и без изменения абсолютной величины вектора $\mathbf{M}$. Именно здесь проявляется вырожденность задачи о точке Кюри в обменном приближении.

Это различие отсутствует, когда изменение вектора $\mathbf{M}$, в том числе его направления, происходит на малых расстояниях, $r \ll r_c$; корреляционная функция всех флуктуаций следует здесь одному и тому же закону (47.8). На расстояниях же $r \gg r_c$ (волновые векторы $kr_c \ll 1$) флуктуации направления $\mathbf{M}$ «аномально» возрастают ввиду уменьшения затрат энергии при таком отклонении от равновесия (при однородном по всему кристаллу повороте намагниченности, $k \to 0$, энергетические затраты вообще отсутствуют). Корреляционную функцию флуктуаций направления $\mathbf{M}$ на этих расстояниях можно найти термодинамическим путем.

Медленность изменения $\mathbf{M}$ позволяет выделить в термодинамическом потенциале члены, связанные с этим изменением, написав

$$\varPhi = \varPhi_0(T, M) + \frac{\alpha}{2}\int \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}\,dV, \quad (47.9)$$

где $\varPhi_0$ относятся к однородно намагниченному телу [2]). Подчеркнем, что здесь имеется в виду истинный термодинамический потенциал; при этом коэффициент α (функция температуры) не совпадает с коэффициентом $\overline{\alpha}$ в эффективном гамильтониане.

---

[1]) Мы рассматриваем везде лишь обычные, трехмерные тела.

[2]) Строго говоря, здесь надо было бы говорить не о $\varPhi$, а о термодинамическом потенциале Ω (ср. V, § 146). Поскольку, однако, в силу теоремы о малых добавках интересующий нас член с производными имеет одинаковый вид в обоих потенциалах, мы будем писать потенциал $\varPhi$.

При малом повороте вектора $\mathbf{M}$ (без изменения его величины) член $\Phi_0(T, M)$ не меняется. Если некоторое заданное направление $\mathbf{M}$ выбрать в качестве оси z, то малое отклонение от этого направления можно описывать малым двумерным вектором $\delta\mathbf{M}_\perp \equiv \mathbf{M}_\perp$ в плоскости xy. Соответствующее изменение термодинамического потенциала [1]):

$$\delta\Phi = \frac{\alpha}{2}\int \frac{\partial\delta\mathbf{M}_\perp}{\partial x_i}\frac{\partial\delta\mathbf{M}_\perp}{\partial x_i}\,dV. \tag{47.10}$$

Представив $\delta\mathbf{M}_\perp$ в виде ряда Фурье

$$\delta\mathbf{M}_\perp = \sum_{\mathbf{k}} \delta\mathbf{M}_{\perp\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \delta\mathbf{M}_{\perp\mathbf{k}} = \delta\mathbf{M}^*_{\perp,-\mathbf{k}},$$

получим

$$\delta\Phi = \frac{1}{2}V\alpha\sum_{\mathbf{k}} k^2|\delta\mathbf{M}_{\perp\mathbf{k}}|^2,$$

и далее для среднего квадрата флуктуации:

$$\langle\delta M_{\alpha\mathbf{k}}\delta M_{\beta\mathbf{k}}\rangle = \frac{T}{V\alpha k^2}\delta_{\alpha\beta}, \tag{47.11}$$

где α, β — векторные индексы в плоскости xy. Соответствующая координатная корреляционная функция [2]):

$$G_{\alpha\beta}(r) = \frac{T}{4\pi\alpha r}\delta_{\alpha\beta}. \tag{47.12}$$

Таким образом, корреляционная функция флуктуаций направления $\mathbf{M}$ в ферромагнитной фазе убывает на расстояниях $r \gg r_c$ по медленному степенному закону $1/r$ — в противоположность корреляции флуктуаций величины M, убывающей более быстро.

Воспользовавшись гипотезой масштабной инвариантности, можно теперь определить температурную зависимость термодинамической величины α, выразив эту зависимость через уже

---

[1]) Последующие вычисления полностью аналогичны произведенным в V, § 146.

[2]) Формула (47.12) может быть получена также в рамках микроскопической спин-волновой теории. Она справедлива независимо от близости к точке Кюри, причем вдали от последней требуется лишь, чтобы r было велико по сравнению с атомными размерами (см. IX, § 71, задача 4; в последних двух формулах решения этой задачи допущена опечатка — выражения φ_{ik} должны быть увеличены вдвое). В то же время пренебрежение энергией магнитной анизотропии ограничивает области применимости формулы (47.12) сверху. Так, для одноосного кристалла с энергией анизотропии (41.1) должно быть $r \ll \sqrt{\beta/\alpha}$.

введенные критические индексы. Как уже было отмечено, при $r \ll r_c$ корреляционные функции всех флуктуаций намагниченности, в том числе его направления, следуют одному и тому же закону (47.8). Один из аспектов масштабной инвариантности состоит как раз в том, что характерное расстояние, разделяющее оба предельных закона, совпадает именно с r_c. Другими словами, при $r \sim r_c$ оба закона должны давать одинаковый порядок величины функции G. При $r \sim r_c$ ее температурная зависимость, определенная согласно (47.7), (47.8), есть

$$G \propto r_c^{-(1+\zeta)} \propto (-t)^{\nu(1+\zeta)}.$$

Согласно же (47.12) имеем

$$G \propto (\alpha r_c)^{-1} \propto \alpha^{-1}(-t)^{\nu}.$$

Сравнив оба выражения, найдем

$$\alpha \propto (-t)^{-\nu\zeta} \tag{47.13}$$

(*P.C. Hohenberg*, *P.C. Martin*, 1965). Таким образом, при $T \to T_c$ величина α медленно (ввиду малости индекса ζ) стремится к бесконечности. Напомним, что в теории Ландау α стремится к отличной от нуля конечной величине [1]).

При $\mathbf{H} \neq 0$ в термодинамический потенциал (47.9) надо добавить член $-\int HM_z\,dV$ (при наличии поля среднее направление $\mathbf{M}$, ось z, совпадает, конечно, с направлением $\mathbf{H}$). При флуктуации направления $\mathbf{M}$ из условия $\mathbf{M}^2 = \text{const}$ имеем

$$2M\delta M_z + \delta\mathbf{M}_\perp^2 = 0.$$

Поэтому к выражению (47.10) для изменения Φ при флуктуации добавится член

$$-\int H\delta M_z\,dV = -\frac{H}{2M}\int (\delta\mathbf{M}_\perp)^2\,dV.$$

Очевидно, что это приведет к замене в (47.11) αk^2 на $\alpha k^2 + H/M$, так что

$$\langle \delta M_\alpha \delta M_\beta \rangle = \frac{T}{V(\alpha k^2 + H/M)}\delta_{\alpha\beta}. \tag{47.14}$$

---

[1]) Подчеркнем, что возможность определения зависимости $\alpha(t)$ связана именно с вырожденностью задачи. По такой же причине возможно определение температурной зависимости сверхтекучей плотности, ρ_s, жидкого гелия вблизи его λ-точки; в этом случае задача вырождена с кратностью $n = 2$ (см. IX, § 28). Аналогичную роль в этих случаях играют соответственно αM^2 и ρ_s.

Эти формулы позволяют найти восприимчивость ферромагнитной фазы, т. е. производную

$$\chi = \frac{\partial}{\partial H}\langle \delta M_z\rangle = -\frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial H}\langle (\delta \mathbf{M}_\perp)^2\rangle. \tag{47.15}$$

Подставив сюда $\langle (\delta \mathbf{M}_\perp)^2\rangle$ из (47.14) и перейдя от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию, найдем

$$\chi = \frac{T}{VM^2}\int \frac{1}{(\alpha k^2 + H/M)^2}\frac{V\,d^3k}{(2\pi)^3},$$

и после вычисления интеграла окончательно [1]):

$$\chi = \frac{T}{8\pi(\alpha M)^{3/2}H^{1/2}}. \tag{47.16}$$

Мы видим, что в обменном приближении флуктуации направления $\mathbf{M}$ лишают восприимчивость χ в ферромагнитной фазе своего буквального смысла — она неограниченно возрастает при $H \to 0$. Формула (47.16) применима не только вблизи точки Кюри [2]).

Под M в знаменателе (47.16) надо понимать его значение при $H = 0$. Во флуктуационной области (вблизи точки Кюри), взяв температурные зависимости M и α из (47.4) и (47.13), найдем, что в ферромагнитной фазе

$$\chi \propto (-t)^{-3(\beta-\nu\zeta)/2}H^{-1/2}, \quad t<0. \tag{47.17}$$

В области же (температурной) применимости теории Ландау имеется такая область значений H, где обычный член в восприимчивости, (39.7), преобладает. Действительно, подставив в (47.16) $M \sim (-at/B)^{1/2}$, получим условие этого преобладания в виде

$$\sqrt{H} \gg T_c B^{3/4}(a|t|)^{1/4}\alpha^{-3/2}.$$

С другой стороны, в теории Ландау поле H можно считать слабым, если $MH \ll AM^2$, т. е.

$$H \ll (a|t|)^{3/2}B^{-1/2}.$$

Условие совместности обоих написанных неравенств совпадает с условием (47.1) применимости теории Ландау.

---

[1]) Интеграл определяется областью значений $k^2 \sim H/M\alpha$, что при достаточно малых H совместимо с условием применимости формулы (47.14): $kr_c \ll 1$.

[2]) Она может быть получена также и из спин-волновой теории (см. IX, § 71, задача 2). Пренебрежение магнитной анизотропией и магнитостатической энергией флуктуаций ограничивает, однако, ее применимость условием (для одноосных кристаллов) $H \gg \beta M$ или $H \gg 4\pi M$.

Обменное приближение становится неприменимым в достаточной близости к точке Кюри, когда (ввиду уменьшения обменной энергии) становится существенной энергия анизотропии. При этом меняется число компонент параметра порядка; так, в одноосном ферромагнетике типа легкая ось он становится однокомпонентным (M_z вместо $\mathbf{M}$; ср. конец § 40). В рамках теории Ландау это обстоятельство не отражается на законах температурной зависимости спонтанной намагниченности и магнитной восприимчивости. Во флуктуационной же области оно существенно: неограниченно возрастают флуктуации лишь компоненты M_z, флуктуации же M_x и M_y остаются конечными. Это приводит к изменению значений критических индексов, а также к возникновению температурной зависимости коэффициентов анизотропии. Задача осложняется еще и тем, что может оказаться необходимым учитывать также и магнитостатическую энергию флуктуаций магнитного поля; на рассмотрении этой сложной ситуации мы здесь останавливаться не будем.

§ 48. Антиферромагнетик вблизи точки Кюри

Как и ферромагнетизм, антиферромагнитная структура устанавливается в основном изотропным обменным взаимодействием электронов, а более слабые релятивистские взаимодействия устанавливают кристаллографическую ориентацию намагниченностей подрешеток [1]). Уже известные к настоящему времени антиферромагнетики чрезвычайно разнообразны по своей структуре, а потому и по своим конкретным магнитным свойствам.

Мы ограничимся, для иллюстрации, характерным простейшим (и в то же время важным) случаем одноосного антиферромагнетика с двумя антипараллельными магнитными подрешетками. Атомы этих подрешеток занимают эквивалентные узлы кристаллической решетки (т. е. среди элементов симметрии магнитной пространственной группы существуют повороты или отражения, переставляющие друг с другом атомы различных подрешеток); в противном случае симметрия не требовала бы строгого равенства абсолютных величин магнитных моментов подрешеток и кристалл был бы ферромагнитным.

---

[1]) Идея о том, что обменное взаимодействие может привести к состоянию с подрешетками с антипараллельными магнитными моментами, была впервые высказана Неелем (*L. Néel*, 1932). Независимо от него, такая же идея была высказана *Л.Д. Ландау* (1933), причем им было сформулировано представление об антиферромагнитном состоянии как о термодинамической фазе, отличной от парамагнитной фазы, и о необходимости существования точки фазового перехода между ними. Мы будем говорить о такой точке как об *антиферромагнитной точке Кюри*.

Обозначим через $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ отнесенные к единице объема магнитные моменты двух подрешеток. В качестве параметра порядка, равного нулю в парамагнитной фазе и отличного от нуля в антиферромагнитной фазе, выберем разность

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2, \tag{48.1}$$

так называемый *антиферромагнитный вектор*. Намагниченность же, равная нулю в отсутствие магнитного поля, есть сумма $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$.

По отношению к вектору $\mathbf{L}$ все преобразования симметрии делятся на две категории: одни переставляют только атомы внутри «своей» подрешетки, а другие переставляют атомы различных подрешеток. В первом случае $\mathbf{L}$ преобразуется просто как аксиальный вектор, а во втором случае — еще дополнительно меняет знак.

Вблизи точки Кюри вектор $\mathbf{L}$ мал. В рамках теории Ландау в этой области термодинамический потенциал $\widetilde{\Phi}$ разложи́м по степеням $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ (такое разложение впервые рассматривалось *Ландау*, 1933). Поскольку, однако, намагничение появляется только при наличии поля $\mathbf{H}$, более правильно проводить разложение сразу по $\mathbf{L}$ и $\mathbf{H}$. Для одноосного кристалла оно имеет вид

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 + AL^2 + BL^4 + D(\mathbf{HL})^2 + D'H^2L^2 - \\ - \frac{1}{2}\chi_p H^2 + \frac{1}{2}\beta(L_x^2 + L_y^2) - \frac{1}{2}\gamma(H_x^2 + H_y^2) - \frac{H^2}{8\pi}. \tag{48.2}$$

Первые пять (после Φ_0) членов не зависят от кристаллографической ориентации векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{L}$; эти члены имеют обменное происхождение. Следующие два члена связаны с релятивистскими взаимодействиями; ось z выбрана, как обычно, вдоль главной оси симметрии кристалла. Линейный по $\mathbf{H}$ член вида $\mathbf{HL}$ запрещен требованием инвариантности относительно преобразований, меняющих знак $\mathbf{L}$.

Если $\beta > 0$, то антиферромагнитный вектор $\mathbf{L}$ направлен вдоль оси z (антиферромагнетик типа легкая ось). Если же $\beta < 0$, то $\mathbf{L}$ лежит в базисной плоскости (антиферромагнетик типа легкая плоскость). В первом случае появление антиферромагнетизма определяется обращением в нуль функции $A(T)$ — коэффициента при L_z^2, а во втором случае — обращением в нуль суммы $A + \beta/2$ — коэффициента при $L_x^2 + L_y^2$.

Ниже мы будем рассматривать антиферромагнетик типа легкая ось ($\beta > 0$). Вблизи точки Кюри обычным образом полагаем $A = a(T - T_c)$, а коэффициент B считаем равным его значению при $T = T_c$; при этом $B > 0$ — как условие устойчивости состояния с $L = 0$ при $T = T_c$. В парамагнитной фазе $A > 0$ и $L = 0$.

В антиферромагнитной фазе $A < 0$ и минимизация потенциала $\widetilde{\Phi}$ при $H = 0$ дает обычную для теории Ландау зависимость L от температуры:

$$L = \sqrt{\frac{a}{2B}(T_c - T)}. \tag{48.3}$$

Дифференцируя потенциал (48.2) с учетом формулы

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\mathbf{H}} = -\frac{\mathbf{B}}{4\pi} = -\frac{\mathbf{H}}{4\pi} - \mathbf{M},$$

находим при $L = 0$, т. е. в парамагнитной фазе [1]):

$$M_x = (\chi_p + \gamma)H_x, \quad M_y = (\chi_p + \gamma)H_y, \quad M_z = \chi_p H_z. \tag{48.4}$$

Наличие постоянной γ ведет к анизотропии магнитной восприимчивости в этой фазе. Ввиду своего релятивистского происхождения, $|\gamma| \ll \chi_p$. Ниже этой постоянной пренебрегаем, так что χ_p будет изотропной восприимчивостью при $T > T_c$ [2]).

В антиферромагнитной же фазе при $H \to 0$ (т. е. пренебрегая зависимостью равновесного значения $\mathbf{L}$ от поля) имеем

$$\mathbf{M} = \chi_p\mathbf{H} - 2D\mathbf{L}(\mathbf{LH}) - 2D'L^2\mathbf{H}. \tag{48.5}$$

Если поле направлено перпендикулярно $\mathbf{L}$, то

$$\mathbf{M} = \chi_\perp\mathbf{H}, \quad \chi_\perp = \chi_p - 2D'L^2 = \chi_p - \frac{D'a}{B}(T_c - T). \tag{48.6}$$

В продольном же поле:

$$\mathbf{M} = \chi_\parallel\mathbf{H}, \quad \chi_\parallel = \chi_\perp - 2DL^2 = \chi_p - \frac{(D + D')a}{B}(T_c - T). \tag{48.7}$$

Обратим внимание на анизотропию восприимчивости, остающуюся даже при пренебрежении релятивистскими взаимодействиями, т. е. имеющую обменное происхождение.

Подчеркнем также, что восприимчивость остается в самой точке Кюри конечной и непрерывной, а ее первые производные испытывают скачок. В этом существенное отличие от ферромагнетика, где восприимчивость обращается в точке перехода

---

[1]) Член $-H^2/8\pi$ в выражении (48.2) выделен для того, чтобы дифференцирование остальных членов по $\mathbf{H}$ прямо давало бы $\mathbf{M}$.

[2]) Фактически во всех известных случаях в антиферромагнитной точке Кюри вещество становится парамагнитным, т. е. $\chi_p > 0$. Знак χ_p не может, однако, быть обоснован одними только термодинамическими соображениями.

в бесконечность. Это различие между ферро- и антиферромагнитными точками Кюри тесно связано с различием в характере их изменения под влиянием магнитного поля. В ферромагнетике уже сколь угодно слабое поле размывает переход, поскольку, намагничивая парамагнитную фазу, оно устраняет различие в симметрии обеих фаз. Антиферромагнитное же упорядочение не может быть создано магнитным полем; разница в симметрии между обеими фазами сохраняется и в присутствии поля, и переход остается резким.

С точностью, допустимой разложением (48.2), коэффициенты D и D' в (48.6), (48.7) следует считать равными их значениям в точке $T=T_c$. Поэтому скачки производных восприимчивости [1]:

$$\frac{\partial\chi_p}{\partial T}-\frac{\partial\chi_\perp}{\partial T}=-\frac{aD'}{B},\qquad \frac{\partial\chi_p}{\partial T}-\frac{\partial\chi_\parallel}{\partial T}=-\frac{a(D+D')}{B}. \tag{48.8}$$

Вернемся к выражению (48.2) для $\widetilde{\Phi}$. От направления вектора $\mathbf{L}$ зависят члены с коэффициентами D и β. Будем считать, что $D>0$ (т. е. $\chi_\perp>\chi_\parallel$) и по-прежнему $\beta>0$ — антиферромагнетик типа легкая ось. Если магнитное поле перпендикулярно к оси z, то из вида этих членов ясно, что минимуму $\widetilde{\Phi}$ отвечают значения $L_x=L_y=0$, т. е. вектор $\mathbf{L}$ направлен всегда по оси z. Если же поле направлено по оси z, то видно, что когда магнитная энергия в поле (первый из указанных членов) сравнивается по величине с энергией анизотропии, должно произойти изменение направления $\mathbf{L}$ — он должен повернуться в базисную плоскость. Этот поворот (*опрокидывание* подрешеток) [2] происходит скачком при определенном значении поля $H=H_f$ (*L. Néel*, 1936).

Действительно, указанные члены в (48.2) можно записать в виде

$$H_z^2DL^2+L^2\left(-DH_z^2+\frac{\beta}{2}\right)\sin^2\theta,$$

где θ — угол между $\mathbf{L}$ и осью z. Очевидно, что минимуму $\widetilde{\Phi}$ отвечает значение $\theta=0$, если $H_z<H_f$, где

$$H_f^2=\frac{\beta}{2D}=\frac{\beta L^2}{\chi_\perp-\chi_\parallel}. \tag{48.9}$$

Если же поле $H_z>H_f$, то равновесию отвечает значение $\theta=\pi/2$ — вектор $\mathbf{L}$ перпендикулярен к оси z. Такая же ситуация

---

[1]) Чисто термодинамические соображения не позволяют сделать общие заключения о знаках D и D'. Фактически скачок производной $\partial\chi_\parallel/\partial T$ всегда отрицателен; это значит, что $D+D'>0$. Обычно отрицателен также и скачок $\partial\chi_\perp/\partial T$, причем вблизи точки Кюри $\chi_\perp>\chi_\parallel$; это значит, что $D>0$, $D'>0$.

[2]) По английской терминологии — spin flop.

сохраняется и вдали от точки Кюри. Поле опрокидывания H_f зависит от температуры, и проведенные рассуждения показывают, что линия $H = H_f(T)$ на плоскости TH является линией фазовых переходов первого рода [1]).

В достаточно сильных магнитных полях антиферромагнитная структура заведомо не может быть термодинамически устойчивой; энергетически выгодной становится параллельная ориентация магнитных моментов обеих подрешеток вдоль поля. Разрушение антиферромагнитной структуры связано с изменением симметрии и происходит путем фазового перехода второго рода. Таким образом, на плоскости TH область существования антиферромагнитной фазы ограничена некоторой кривой $H = H_c(T)$. Разрушение антиферромагнетизма должно наступить, когда магнитная энергия в поле сравнивается с обменной энергией. Вдали от точки Кюри порядок величины критического поля дается оценкой $\mu H_c \sim T_c$ (μ — атомный магнитный момент). С приближением к точке Кюри H_c убывает, обращаясь в нуль в самой этой точке. Зависимость $H_c(T)$ в этой области легко найти с помощью того же выражения (48.2) для термодинамического потенциала.

Выше было показано, что если поле $\mathbf{H}$ перпендикулярно к оси z, то вектор $\mathbf{L}$ всегда параллелен той же оси. Зависящие от L члены термодинамического потенциала:

$$AL^2 + BL^4 + D'H^2L^2. \tag{48.10}$$

Отсюда видно, что наличие магнитного поля приводит к замене коэффициента A суммой $A + D'H^2$, равенство нулю которой и определяет новую точку перехода. Из этого условия находим критическое поле

$$H_c^2 = -\frac{A}{D'} = \frac{a}{D'}(T_c - T). \tag{48.11}$$

Если поле $\mathbf{H}$ параллельно оси z, то при $H < H_f$ вектор $\mathbf{L}$ по-прежнему направлен вдоль оси z, но зависящие от L члены в (48.2) отличаются от (48.10) заменой D' на $D + D'$. Таким образом, в этом случае

$$H_c^2 = \frac{a}{D + D'}(T_c - T). \tag{48.12}$$

---

[1]) Как уже неоднократно подчеркивалось, вдали от точки перехода анизотропные члены выражений типа (48.2) сохраняют смысл независимо от малости L — как члены разложения релятивистских взаимодействий по степеням компонент единичного вектора $\mathbf{l} = \mathbf{L}/L$. Поэтому формула (48.9) имеет смысл и вдали от точки перехода, если понимать в ней βL^2 именно как коэффициент в члене с $(l_x^2 + l_y^2)/2$ в термодинамическом потенциале.

Наконец, если $H > H_f$, вектор $\mathbf{L}$ перпендикулярен к оси z; аналогичным образом получим в этом случае для критического поля выражение [1])

$$H_c^2 = \frac{a}{D'}\left(T_c - T - \frac{\beta}{2a}\right). \tag{48.13}$$

На рис. 26 изображена фазовая диаграмма в координатах T, H^2 антиферромагнетика вблизи точки Кюри для обоих рассмотренных направлений поля. Штриховые линии — переходы второго рода, сплошная линия — переходы первого рода; Π — парамагнитная фаза, $A\Phi_\parallel$ и $A\Phi_\perp$ — антиферромагнитные фазы с вектором $\mathbf{L}$, соответственно параллельным или перпендикулярным оси z. В рамках теории Ландау (в которых произведено все рассмотрение) все линии на диаграммах — прямые. В случае

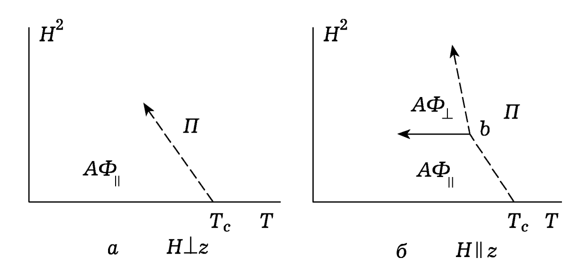


Рис. 26

продольного поля на диаграмме имеется бикритическая точка (b на рис. 26 *б*), в которой линия фазовых переходов первого рода оканчивается на линии переходов второго рода. Эта точка аналогична бикритической точке на плоскости PT (показанной на рис. 67 в V, § 150). Координаты этой точки:

$$T_b = T_c - \frac{\beta}{2a}\frac{D + D'}{D}, \quad H_b^2 = \frac{\beta}{2D} \tag{48.14}$$

(β, D, D' — значения коэффициентов при $T = T_b$).

§ 49. Бикритическая точка антиферромагнетика

Использованная в предыдущем параграфе теория Ландау становится, как обычно, неприменимой в достаточной близости к линиям точек перехода второго рода, во флуктуационной области. Рассмотрим эту область вблизи бикритической точки на

[1]) Вывод формул (48.11)–(48.13) в рамках теории Ландау дан *А.С. Боровиком-Романовым* (1959).

фазовой диаграмме одноосного антиферромагнетика (типа легкая ось) в продольном магнитном поле.

Эффективный гамильтониан этой задачи имеет вид

$$\mathscr{H}_{\text{эф}} = \int \left\{ aL^2 \left[T - T_b - \frac{D+D'}{a}(H_f^2 - H_z^2) \right] + \right.$$
$$\left. + BL^4 + DL^2(H_f^2 - H_z^2)\sin^2\theta + \frac{\overline{\alpha}}{2}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \right\} dV. \quad (49.1)$$

Подынтегральное выражение составлено из зависящих от $\mathbf{L}$ членов разложения (48.2), в которых положено $A = (T - T_c)a$, введены обозначения T_b и H_f из (48.9) и (48.14) и добавлен градиентный член. Этот гамильтониан по форме совпадает с эффективным гамильтонианом одноосного ферромагнетика (не находящегося в магнитном поле!), отличаясь от него лишь обозначениями: $\mathbf{L}$ вместо $\mathbf{M}$, выражение в квадратных скобках вместо $T - T_c$ и величина

$$u = 2D(H_f^2 - H_z^2) \quad (49.2)$$

вместо константы анизотропии β ферромагнетика. При $H_z = H_f$ эта константа обращается в нуль и (49.1) сводится к интегралу

$$\mathscr{H}_{\text{эф}} = \int \left\{ aL^2(T - T_b) + BL^4 + \frac{\overline{\alpha}}{2}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \right\} dV, \quad (49.3)$$

формально совпадающему с эффективным гамильтонианом ферромагнетика в обменном приближении (47.2). Эти аналогии позволяют выяснить ряд свойств антиферромагнетика вблизи бикритической точки путем использования известных результатов для ферромагнетика (*M.E. Fisher*, *D.R. Nelson*, 1974).

Равенство $H_z = H_f$ отвечает линии фазовых переходов первого рода (опрокидывание подрешеток). Указанная аналогия позволяет заключить, что термодинамические свойства антиферромагнетика на этой линии вблизи бикритической точки совпадают (с соответствующим изменением смысла величин) со свойствами чисто обменного ферромагнетика вблизи его точки Кюри. В частности, при приближении к бикритической точке вдоль этой линии величина антиферромагнитного вектора стремится к нулю по закону

$$L \propto (T_b - T)^{\beta}, \quad (49.4)$$

где β совпадает с показателем β в (47.4) [1]).

[1]) Индекс же γ в данном случае не имеет прямого физического смысла, поскольку он связан с не существующим реально для антиферромагнетика полем $\mathbf{h}$, которое входило бы в эффективный гамильтониан в виде члена $-\mathbf{hL}$.

В окрестности бикритической точки, но не на линии переходов первого рода, параметр u мал, но отличен от нуля. Сколь бы этот параметр ни был мал, его роль возрастает при приближении к линии переходов второго рода (ср. замечание в конце § 47): параметр порядка становится однокомпонентным (L_z в фазе $A\Phi_{\parallel}$) или двухкомпонентным (L_z, L_y в фазе $A\Phi_{\perp}$). Чем меньше значение u, тем меньше размеры окрестности, в которой его роль существенна. Переход от поведения с $n = 3$ к поведению с $n = 1$ или $n = 2$ совершается через некоторую промежуточную область. Представляется правдоподобным предположение о масштабной инвариантности в этой области: по мере приближения к бикритической точке меняется только масштаб измерения u. В связи с этим появляется новый критический *промежуточный*[1]) *показатель* φ: при изменении масштаба переменной $t = T - T_b$ масштаб переменной u меняется как $|t|^{\varphi}$. Показатель φ должен быть положительным, так как уже сколь угодно малое значение u меняет характер перехода.

Приняв эту гипотезу, надо считать, что линии фазовых переходов вблизи бикритической точки определяются постоянными значениями отношения $x = u/|t|^{\varphi}$. Линии переходов первого рода отвечает значение $x = 0$, линии переходов второго рода между фазами Π и $A\Phi_{\parallel}$ — некоторое значение $x_1 > 0$, линии переходов между фазами Π и $A\Phi_{\perp}$ — некоторое значение $x_2 < 0$. Под H_f в определении (49.2) надо, конечно, понимать теперь истинную функцию $H_f(T)$, которую дало бы точное решение статистической задачи с эффективным гамильтонианом (49.1). Разложив ее по степеням t и опустив в u постоянный множитель $2H_b$, определим переменную u в окрестности бикритической точки как

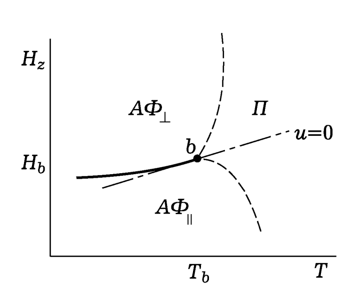


Рис. 27

$$u = H_b - H_z + c(T - T_b), \tag{49.5}$$

где c — постоянная. Уравнение линии переходов первого рода:

$$H_z - H_b = c(T - T_b),$$

а двух линий переходов второго рода:

$$H_z - H_b = c(T - T_b) \pm c_{1,2}(T - T_b)^{\varphi}, \tag{49.6}$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные. При $\varphi > 1$ (численные оценки дают значение $\varphi \approx 1{,}25$) эти линии выглядят во флуктуационной области, как показано на рис. 27; в точке b все они имеют общую касательную.

[1]) Crossover — по английской терминологии.

Гипотеза о масштабной инвариантности в окрестности бикритической точки позволяет также сделать ряд заключений о законах изменения величины антиферромагнитного вектора **L** при приближении к этой точке вдоль различных направлений в плоскости TH_z; на этом мы останавливаться не будем [1]).

§ 50. Слабый ферромагнетизм

Существуют кристаллы, в которых обменное взаимодействие устанавливает антиферромагнитную структуру, но сравнительно слабые релятивистские взаимодействия приводят к небольшому искажению этой структуры, в результате чего появляется намагничение **M** — «аномально» малое в меру малости релятивистских взаимодействий по сравнению с обменными. Это явление называют *слабым ферромагнетизмом* [2]).

Обменное взаимодействие само по себе допускает произвольную ориентацию антиферромагнитного вектора **L** в кристалле. Определенная его кристаллографическая ориентация устанавливается лишь релятивистскими взаимодействиями, описываемыми анизотропными по **L** членами разложения термодинамического потенциала. Может оказаться, что симметрия возникающей таким образом структуры сама по себе допускала бы и существование ферромагнитного момента **M** [3]). Именно в таких случаях и возникает слабый ферромагнетизм: среди релятивистских членов разложения термодинамического потенциала присутствуют такие, которые приведут к требуемому искажению антиферромагнитной структуры [4]). Покажем это на характерном примере.

Рассмотрим ромбоэдрические кристаллы, относящиеся к пространственной группе $\boldsymbol{D}_{3d}^6$. Напомним (см. III, § 93), что кристаллический класс $\boldsymbol{D}_{3d}$ содержит следующие элементы симметрии: ось симметрии 3-го порядка C_3 (тригональная ось), три перпендикулярных ей оси 2-го порядка (которые обозначаем символами U_2), центр инверсии I; как следствие появляются три плоскости симметрии σ_d, каждая из которых проходит через ось C_3 и перпендикулярна одной из осей U_2 (тем самым делит пополам угол

[1]) См. *Fisher M.E.*, *Nelson D.R.* // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. P. 1350.

[2]) Если придерживаться указанной в конце § 37 терминологии, то правильнее было бы говорить о слабом ферримагнетизме.

[3]) Напомним, что для этого во всяком случае необходимо, чтобы магнитная элементарная ячейка совпадала с кристаллографической — см. конец § 38.

[4]) Теория слабого ферромагнетизма принадлежит *И.Е. Дзялошинскому* (1957).

между двумя другими осями U_2). В пространственной группе $\boldsymbol{D}_{3d}^6$ плоскости σ_d становятся плоскостями скольжения с переносом на 1/2 периода вдоль тригональной оси. Это приводит к расположению осей и центра инверсии в каждой элементарной ячейке, как показано на рис. 28. Изображенный вертикальный отрезок — один период вдоль тригональной оси (пространственная диагональ ромбоэдрической ячейки); его длина принята условно за 1. Оси второго порядка проходят через точки 1/4 и 3/4. Центр же инверсии находится в точках 0 и 1/2 (крестики на рисунке). Вертикальные плоскости σ_d на рисунке не показаны.

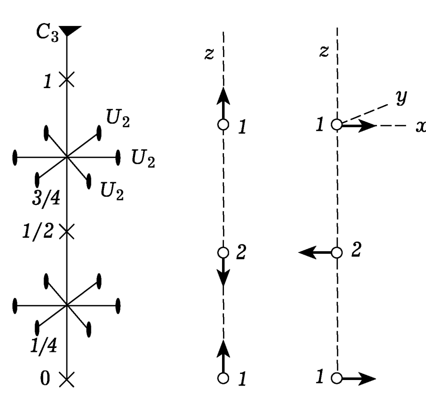


Рис. 28 Рис. 29 Рис. 30

В антиферромагнетиках $FeCO_3$ и $MnCO_3$ каждая элементарная ячейка содержит по два магнитных иона (Fe^{++} или Mn^{++}), занимающих положения в эквивалентных точках 0 и 1/2 на тригональной оси. Обменное взаимодействие устанавливает магнитную структуру, в которой моменты этих двух ионов антипараллельны. При этом в $FeCO_3$ моменты ионов Fe^{++} расположены вдоль тригональной оси (рис. 29). Легко видеть, что такая структура инвариантна относительно всех преобразований класса $\boldsymbol{D}_{3d}$ и потому не допускает ферромагнетизма (существование вектора **M** вдоль тригональной оси исключается наличием осей U_2, а вектора **M** в базисной плоскости — наличием оси C_3).

В антиферромагнетике же $MnCO_3$ магнитные моменты ионов лежат в базисной плоскости (плоскость xy), перпендикулярной тригональной оси (оси z), как показано на рис. 30. Если при этом моменты лежат в одной из плоскостей σ_d (которую выберем тогда за плоскость xz), то магнитная структура имеет элементы симметрии (помимо единичного)

$$U_2^{(y)},\ I,\ \sigma_d^{(xz)},$$

т. е. относится к магнитному классу, совпадающему с обычным классом $\boldsymbol{C}_{2h}$; он допускает существование вектора **M** в направлении оси y. Если же моменты расположены по одной из осей U_2 (которую выберем тогда за ось x), то магнитная структура

имеет элементы симметрии

$$U_2^{(x)}R,\ I,\ \sigma_d^{(xz)}R,$$

т. е. относится к магнитному классу $\boldsymbol{C}_{2h}(\boldsymbol{C}_i)$; он тоже допускает существование вектора $\mathbf{M}$ в направлении оси y. В обоих случаях возникновение $\mathbf{M}$ происходит путем поворота моментов двух ионов в каждой элементарной ячейке навстречу друг другу в плоскости xy, как показано на рис. 31.

Переходя к количественной теории, введем снова векторы $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ и $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$, где индексы 1 и 2 относятся к двум магнитным подрешеткам. Единичный вектор в направлении $\mathbf{L}$ обозначим через $\mathbf{l}$.

Рассмотрим разложение термодинамического потенциала Φ (при $\mathbf{H} = 0$) по степеням $\mathbf{M}$ и $\mathbf{l}$. Разложение по $\mathbf{M}$ допустимо уже в силу самой малости этой величины в слабом ферромагнетике. Разложение же энергии анизотропии по степеням $\mathbf{l}$ основано, как всегда, на относительной малости релятивистских взаимодействий. Таким образом, здесь отнюдь не предполагается близость к точке фазового перехода второго рода (малость L), и поэтому излагаемая теория не подвержена ограничениям, свойственным теории Ландау.

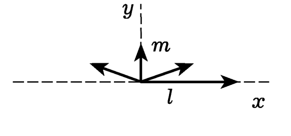


Рис. 31

Члены разложения должны быть инвариантны по отношению ко всем преобразованиям группы $\boldsymbol{D}_{3d}^6$. Первые члены такого разложения:

$$\Phi = \Phi_0(L) + BM^2 + D(\mathbf{lM})^2 - \frac{\beta}{2}M_z^2 - \frac{\gamma L^2}{2}l_z^2 + \zeta L(M_x l_y - M_y l_x), \tag{50.1}$$

где $\Phi_0(L)$ — изотропная по $\mathbf{L}$ функция. Первые два (после Φ_0) члена имеют обменное происхождение; при этом $B > 0$ (в противном случае существовало бы не связанное с антиферромагнетизмом спонтанное намагничение, т. е. тело было бы обычным обменным ферромагнетиком). Следующие три члена разложения — первого порядка ($\sim v^2/c^2$) по релятивистским взаимодействиям [1]). Последний из них может быть представлен в виде $L(\zeta[\mathbf{Ml}])$, где ζ — вектор, направленный по оси z [2]).

---

[1]) Множители L^2 и L в определениях последних двух членов введены лишь с целью сделать все коэффициенты в (50.1) безразмерными и не означают разложения по степеням величины L.

[2]) Микроскопическое происхождение члена такого вида связано с антисимметричным по спинам взаимодействием, возникающим как эффект второго порядка теории возмущений — смешанных членов, билинейных по обменному и по релятивистскому спин-орбитальному взаимодействиям. См. *T. Moriya* в книге Magnetism. Vol. 1/Ed. *G.T. Rado* and *H. Suhl*. — N.Y.: Acad. Press, 1963.

Инвариантность всех членов в (50.1), кроме последнего, — очевидна. Для проверки инвариантности последнего члена достаточно сделать это по отношению к оси C_3, одной из осей U_2 и инверсии I. Инвариантность относительно поворотов вокруг тригональной оси (ось z) очевидна из записи в виде z-компоненты вектора $[\mathbf{Ml}]$ (при этом существенно, что повороты не переставляют друг с другом атомы из разных подрешеток, и потому $\mathbf{M}$ и $\mathbf{l}$ преобразуются одинаково). Инвариантность относительно инверсии следует из инвариантности каждого из векторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{l}$: для $\mathbf{M}$ это следует уже из самой аксиальности вектора, а для $\mathbf{l}$ надо учесть также, что в рассматриваемой структуре инверсия переставляет друг с другом атомы лишь внутри каждой из подрешеток. Преобразование же $U_2^{(x)}$ переставляет атомы с противоположно направленными моментами; поэтому при таком повороте $M_x, M_y \to M_x, -M_y$ и $l_x, l_y \to -l_x, l_y$, откуда очевидна инвариантность разности $M_x l_y - M_y l_x$.

Будем считать, что постоянная $\gamma < 0$; тогда вектор $\mathbf{l}$ устанавливается в базисной плоскости ($l_z = 0$). Выбрав в качестве плоскости xz ту, в которой лежит $\mathbf{l}$, и минимизируя Φ по $\mathbf{M}$ при заданном $\mathbf{L}$, найдем для ферромагнитного момента:

$$M_x = 0, \quad M_y = \frac{\zeta}{2B} L_x, \quad M_z = 0. \tag{50.2}$$

Поскольку $|\zeta| \ll B$, то M действительно мало. Мы видим, что возникновение слабого ферромагнетизма связано с последним членом в (50.1) — билинейным по $\mathbf{M}$ и $\mathbf{l}$. Характерна для слабого ферромагнетизма тесная связь направления $\mathbf{M}$ с антиферромагнитной структурой; в данном случае $\mathbf{M}$ лежит в той же базисной плоскости и перпендикулярен вектору $\mathbf{L}$ [1]).

При наличии поля зависимость намагниченности от $\mathbf{H}$ получается из условий минимальности термодинамического потенциала $\tilde{\Phi} = \Phi - \mathbf{MH} - \dfrac{H^2}{8\pi}$. Минимизация должна производиться по ориентации структуры в базисной плоскости и по компонентам вектора $\mathbf{M}$. Очевидно, что в пренебрежении магнитной анизотропией в базисной плоскости намагниченность повернется так, чтобы ее компонента в этой плоскости $\mathbf{M}_\perp$ стала вдоль поля $\mathbf{H}_\perp$,

---

[1]) В приближении, отвечающем термодинамическому потенциалу (50.1), магнитная анизотропия в базисной плоскости отсутствует и направление $\mathbf{L}$ в ней остается произвольным. Анизотропия (а с ней и определенная ориентация $\mathbf{L}$) в базисной плоскости появляется лишь при учете членов более высокого (вплоть до 6-го) порядка. При этом возникают также и члены, смешанные по z- и x, y-компонентам векторов, в результате чего магнитные моменты отклоняются на малый угол от базисной плоскости.

а вектор $\mathbf{L}$ — соответственно перпендикулярно $\mathbf{H}_\perp$ [1]). После этого минимизация $\widetilde{\Phi}$ по $\mathbf{M}_\perp$ и M_z приведет к результату

$$M_z = \chi_\| H_z, \quad M_\perp = \chi_\perp (H_{\text{Д}} + H_\perp), \tag{50.3}$$

где восприимчивости

$$\chi_\| = \frac{1}{2B - \beta}, \quad \chi_\perp = \frac{1}{2B} \tag{50.4}$$

и введено обозначение

$$H_{\text{Д}} = |\zeta| L \tag{50.5}$$

для «эффективного поля», определяющего спонтанную намагниченность слабого ферромагнетика (его называют *полем Дзялошинского*). Поскольку $|\beta| \ll B$, то $\chi_\| \approx \chi_\perp$.

Упомянем еще об одном свойстве рассматриваемых веществ, возникающем при наложении поля $\mathbf{H}$ и проявляющемся вблизи точки перехода в парамагнитную фазу. В рамках теории Ландау разлагаем функцию $\Phi_0(L)$ в этой области в ряд по степеням L:

$$\Phi_0(L) = \Phi_0(0) + AL^2 + CL^4.$$

Пусть вектор $\mathbf{L}$ направлен в положительном направлении оси x. Примем, для определенности, что $\zeta > 0$ [2]); тогда вектор $\mathbf{M}$ направлен в положительном направлении оси y; поле $\mathbf{H}$ полагаем направленным туда же. Термодинамический потенциал:

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0(0) + AL^2 + CL^4 + BM^2 - \zeta LM - HM - \frac{H^2}{8\pi}; \tag{50.6}$$

вблизи точки Кюри разложение энергии анизотропии по степеням единичного вектора $\mathbf{l}$ становится разложением по самому вектору $\mathbf{L}$. В отсутствие поля $M = \zeta L/2B$ и разложение (50.6) принимает вид

$$\Phi = \Phi_0 + \left(A - \frac{\zeta^2}{4B}\right) L^2 + CL^4.$$

---

[1]) Предполагается, что $D > 0$; при $D < 0$ наличие члена $-|D|(\mathbf{lM})^2$ с большим коэффициентом $|D|$ может нарушить взаимную перпендикулярность $\mathbf{l}$ и $\mathbf{H}_\perp$.

Пренебрежение анизотропией в базисной плоскости означает определенные ограничения снизу на величину рассматриваемых полей.

[2]) Отметим, что знак коэффициента ζ условен в том смысле, что зависит от определения вектора $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$: какие именно магнитные атомы в кристалле приняты за подрешетки *1* и *2*. Но после того, как такой выбор в заданном кристалле сделан, знак ζ приобретает определенный смысл: от него зависит направление $\mathbf{M}$ по отношению к направлению $\mathbf{L}$ и кристаллографическим осям.

Точка Кюри определяется обращением в нуль коэффициента при L^2, так что вблизи нее

$$A - \frac{\zeta^2}{4B} = a(T - T_c)$$

($a > 0$): остальные коэффициенты полагаем равными их значениям при $T = T_c$ (при этом $C > 0$).

При наличии поля уравнения $\partial\widetilde{\Phi}/\partial L = 0$, $\partial\widetilde{\Phi}/\partial M = 0$ после исключения из них M дают следующее уравнение, определяющее L:

$$2CL^3 + a(T - T_c)L - \frac{\zeta H}{4B} = 0. \tag{50.7}$$

Уже отсюда видно, что в слабом ферромагнетике (как и в обычном) магнитное поле размывает фазовый переход[1]. При этом оказывается отличным от нуля по обе стороны от точки $T = T_c$ и антиферромагнитный вектор; магнитное поле вызывает в парамагнитной фазе антиферромагнитное упорядочение, устраняя тем самым различие в свойствах симметрии обеих фаз (*А.С. Боровик-Романов*, *В.И. Ожогин*, 1960). При $T > T_c$ на некотором расстоянии от этой точки L убывает по закону

$$L = \frac{\zeta H}{4aB(T - T_c)}.$$

§ 51. Пьезомагнетизм и магнитоэлектрический эффект

Тесно связаны с магнитной симметрией *пьезомагнетизм* и *магнитоэлектрический* эффект в антиферромагнетиках.

Первый из них состоит в возникновении намагниченности при наложении на кристалл упругих напряжений — аналогично пьезоэлектричеству. Он описывается появлением в термодинамическом потенциале кристалла члена, линейного как по полю, так и по тензору упругих напряжений:

$$\widetilde{\Phi}_{\text{пм}} = -\lambda_{i,kl} H_i \sigma_{kl}, \tag{51.1}$$

где $\lambda_{i,kl}$ — тензор, симметричный по индексам kl (ср. (17.7)). Этот член приводит к появлению в индукции $B_i = -4\pi\partial\widetilde{\Phi}/\partial H_i$ дополнительного члена $4\pi\lambda_{i,kl}\sigma_{kl}$. Другими словами, при $\mathbf{H} = 0$ возникает линейная по деформации намагниченность:

$$M_i = \lambda_{i,kl}\sigma_{kl}. \tag{51.2}$$

---

[1]) Уравнение (50.7) — того же вида, что и уравнение (19.4) для сегнетоэлектрика в электрическом поле или аналогичное уравнение для обычного ферромагнетика в магнитном поле.

Другим проявлением того же свойства является *линейная магнитострикция* — возникновение деформации, линейной по наложенному на кристалл полю:

$$u_{kl} = -\frac{\partial \widetilde{\Phi}_{\text{пм}}}{\partial \sigma_{kl}} = \lambda_{i,kl} H_i. \tag{51.3}$$

Операция обращения времени меняет знак поля $\mathbf{H}$ (и намагниченности $\mathbf{M}$), оставляя неизменным тензор σ_{kl}; должен, разумеется, оставаться неизменным и термодинамический потенциал. Поэтому пьезомагнитный тензор $\lambda_{i,kl}$ меняет знак при обращении времени. В свою очередь, отсюда следует, что пьезомагнетизм возможен лишь в телах с магнитной структурой; в отсутствие последней свойства тела инвариантны по отношению к преобразованию R и потому было бы $\lambda_{i,kl} = -\lambda_{i,kl} = 0$. Пьезомагнетизм возможен в антиферромагнетиках, относящихся к определенным классам магнитной симметрии, содержащим преобразование R лишь в комбинациях с поворотами или отражениями или не содержащим R вовсе (*Б.А. Тавгер*, *В.М. Зайцев*, 1956).

Магнитоэлектрический эффект состоит в линейной связи между магнитным и электрическим полями в веществе; она приводит, например, к появлению в электрическом поле пропорциональной ему намагниченности (*Л.Д. Ландау*, *Е.М. Лифшиц*, 1956). Этот эффект описывается членом в термодинамическом потенциале, линейном как по электрическому, так и по магнитному полям:

$$\widetilde{\Phi}_{\text{мэ}} = -\alpha_{ik} E_i H_k, \tag{51.4}$$

где α_{ik} — несимметричный тензор. При $\mathbf{H} = 0$ электрическое поле создает в веществе намагниченность

$$M_k = \alpha_{ik} E_i, \tag{51.5}$$

а при $\mathbf{E} = 0$ магнитное поле создает электрическую поляризацию

$$P_i = \alpha_{ik} H_k. \tag{51.6}$$

Как и пьезомагнетизм, магнитоэлектрический эффект допускается лишь определенными классами магнитной симметрии; магнитоэлектрический тензор α_{ik} нечетен по отношению к обращению времени и обращается в нуль в телах без магнитной структуры. Поскольку $\mathbf{E}$ — полярный, а $\mathbf{H}$ — аксиальный векторы, то тензор α_{ik} во всяком случае обращается в нуль, если симметрия кристалла содержит инверсию I; для существования магнитоэлектрического эффекта инверсия допустима лишь в комбинации IR.

Задачи[1]

1. Найти отличные от нуля компоненты пьезомагнитного тензора в антиферромагнетике $FeCO_3$ (структура, изображенная на рис. 29).

Решение. Как уже было упомянуто в § 50, магнитный класс данной структуры совпадает с кристаллографическим классом $\boldsymbol{D}_{3d}$ и не содержит элемента R вовсе. Преобразования этого класса оставляют инвариантным выражение

$$\widetilde{\Phi}_{\text{пм}} = -\lambda_1[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})H_x - 2\sigma_{xy}H_y] - \lambda_2(\sigma_{xz}H_y - \sigma_{yz}H_x),$$

где ось z направлена вдоль оси симметрии 3-го порядка, ось x — по одной из горизонтальных осей 2-го порядка (такое выражение для класса $\boldsymbol{D}_3$ в пьезоэлектрическом случае было найдено в задаче 1 к § 17; в пьезомагнитном случае оно остается справедливым и для класса $\boldsymbol{D}_{3d} = \boldsymbol{D}_3 \times \boldsymbol{C}_i$, поскольку пространственная инверсия I оставляет неизменным как тензор второго ранга σ_{ik}, так и аксиальный вектор $\mathbf{H}$). Отсюда для намагниченности имеем

$$M_x = \lambda_1(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) - \lambda_2\sigma_{yz}, \quad M_y = -2\lambda_1\sigma_{xy} + \lambda_2\sigma_{xz}.$$

2. То же для кристалла, относящегося к магнитному классу $\boldsymbol{D}_{4h}(\boldsymbol{D}_{2h})$[2].

Решение. Указанный класс содержит элементы (помимо единичного)

$$C_2,\ 2C_4R,\ 2U_2,\ 2U_2'R,\ I,\ \sigma_h,\ 2\sigma_v,\ 2\sigma_v'R$$

(обозначение элементов симметрии везде по III, § 95). Эти преобразования оставляют инвариантным выражение

$$\widetilde{\Phi}_{\text{пм}} = -\lambda_1(\sigma_{xz}H_y + \sigma_{yz}H_x) - \lambda_2\sigma_{xy}H_z$$

(ось z — по оси симметрии 4-го порядка, оси x, y — по двум горизонтальным осям 2-го порядка). Отсюда для намагниченности находим

$$M_x = \lambda_1\sigma_{yz}, \quad M_y = \lambda_1\sigma_{xz}, \quad M_z = \lambda_2\sigma_{xy}.$$

Рис. 32

3. Найти отличные от нуля компоненты магнитоэлектрического тензора для антиферромагнетика Cr_2O_3. Этот кристалл относится к кристаллографической пространственной группе $\boldsymbol{D}_{3d}^6$ (см. § 50) и содержит в каждой элементарной ячейке 4 атома Cr, занимающих положения в эквивалентных точках u, $1/2 - u$, $1/2 + u$, $1 - u (u < 1/4)$ на тригональной оси; их магнитные моменты лежат вдоль этой же оси, как показано на рис. 32.

Решение. Данный антиферромагнетик относится к магнитному классу $\boldsymbol{D}_{3d}(\boldsymbol{D}_3)$, содержащему элементы

$$2C_3,\ 3U_2,\ IR,\ 2S_6R,\ 3\sigma_dR.$$

Эти преобразования оставляют неизменным выражение

$$\widetilde{\Phi}_{\text{мэ}} = -\alpha_{\parallel}E_zH_z - \alpha_{\perp}(E_xH_x + E_yH_y)$$

(ось z — вдоль тригональной оси), т. е. отличны от нуля компоненты $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = a_{\perp}$, $\alpha_{zz} = \alpha_{\parallel}$.

---

[1] Приведенные ниже примеры указаны *И.Е. Дзялошинским* (1957, 1959).

[2] Таковы антиферромагнетики MnF_2, CoF_2.

§ 52. Геликоидальная магнитная структура

Особую категорию составляют магнитные структуры, в которых периоды «магнитной решетки» несоизмеримы с периодами основной, кристаллографической решетки. Возможны различные механизмы возникновения таких структур; мы рассмотрим здесь один из них (указанный *И.Е. Дзялошинским*, 1964), допускающий простую формулировку в макроскопических терминах. Сделаем это на конкретном примере: рассмотрим кристалл, относящийся к кубическому классу $\boldsymbol{T}$, причем обменное взаимодействие в нем само по себе устанавливало бы чисто ферромагнитное упорядочение магнитных моментов (*В.Г. Барьяхтар, Е.П. Стефановский*, 1969; *P. Bak, M.H. Jensen*, 1980)[1]).

Для того чтобы структура могла фактически существовать, она должна быть устойчива по отношению к малым возмущениям, нарушающим макроскопическую пространственную однородность кристалла. Везде выше это условие молчаливо подразумевалось выполненным. Дополнительная «энергия неоднородности», возникающая при возмущении, давалась выражением (43.1), существенная положительность которого и означает требуемую устойчивость.

Выражение (43.2) было установлено в § 43 как первый неисчезающий член разложения энергии неоднородности в кубическом кристалле по степеням производных от намагниченности $\mathbf{M}$. При этом, однако, мы интересовались энергией лишь обменного происхождения. Там же было отмечено, что симметрия кристалла может допускать существование членов не обменной (релятивистской) природы, содержащих произведения производных $\partial M_i/\partial x_k$ на компоненты M_l; для этого симметрия во всяком случае не должна содержать центра инверсии. Именно таков кристаллический класс $\boldsymbol{T}$; он допускает существование инвариантного по отношению к его операциям симметрии члена вида $\mathbf{M}\operatorname{rot}\mathbf{M}$. Таким образом, энергия неоднородности принимает вид

$$U_{\text{неодн}} = \gamma\mathbf{M}\operatorname{rot}\mathbf{M} + \frac{\alpha}{2}[(\nabla M_x)^2 + (\nabla M_y)^2 + (\nabla M_z)^2]. \qquad (52.1)$$

Условие $\alpha > 0$ не обеспечивает теперь устойчивости однородного состояния.

Учтем, однако, что член первого порядка по производным в (52.1) содержит по сравнению со вторым дополнительную малость ($\sim v^2/c^2$) в связи со своим релятивистским происхо-

[1]) Таковы кристаллы MnSi и FeGe с магнитными ионами Mn и Fe, относящиеся к пространственной группе $\boldsymbol{T}_4$ с простой кубической решеткой Бравэ.

ждением [1]); это значит, что коэффициент $\gamma \ll \alpha/a$ (где a — постоянная решетки). Это обстоятельство позволяет найти новое устойчивое состояние, оставаясь в пределах применимости разложения (52.1) — простая ферромагнитная структура искажается неоднородным образом, но лишь на расстояниях, больших по сравнению с a, так что производные остаются малыми.

Величина M устанавливается основными обменными взаимодействиями (не связанными с неоднородностью). «Крупномасштабная» же структура определяется минимизацией энергии (52.1). При заданном M эта структура состоит в медленном изменении направления вектора $\mathbf{M}$ [2]).

Будем искать $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ в виде периодической функции

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{M}{\sqrt{2}}(\mathbf{m}e^{i\mathbf{kr}} + \mathbf{m}^* e^{-i\mathbf{kr}}), \tag{52.2}$$

причем для постоянства квадрата $\mathbf{M}^2 = M^2$ квадрат комплексного единичного ($\mathbf{mm}^* = 1$) вектора $\mathbf{m}$ должен быть равен нулю: $\mathbf{m}^2 = 0$. Такой вектор можно представить в виде $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1 + i\mathbf{m}_2)/\sqrt{2}$, где $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ — два взаимно перпендикулярных вещественных единичных вектора. Тогда

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M(\mathbf{m}_1 \cos \mathbf{kr} - \mathbf{m}_2 \sin \mathbf{kr}). \tag{52.3}$$

Подставив (52.2) в (52.1), получим

$$U_{\text{неодн}} = iM^2\gamma\mathbf{k}[\mathbf{mm}^*] + \frac{1}{2}\alpha M^2 k^2 = M^2\gamma\mathbf{k}[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2] + \frac{1}{2}\alpha M^2 k^2.$$

Как функция $\mathbf{k}$, это выражение минимально, если векторы $\mathbf{k}$ и

---

[1]) Первый член в (52.1) не инвариантен по отношению к одновременному одинаковому повороту векторов $\mathbf{M}$ во всех точках пространства — в нем не удовлетворено требование, сформулированное в примеч. на с. 224.

Релятивистские члены могут быть также и в числе квадратичных; так, кубическая симметрия допускает член вида

$$\frac{\alpha'}{2}\left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial z}\right)^2\right].$$

[2]) Во избежание непринципиальных усложнений, предполагаем, что $U_{\text{неодн}}$ мала по сравнению с энергией $U_{\text{обм}}$ (так что величина M определяется лишь последней), но в то же время велика по сравнению с релятивистской энергией анизотропии $U_{\text{ан}}$ (так что последней можно пренебречь при определении хода изменения направления $\mathbf{M}$). Эти условия могут выполняться в окрестности точки Кюри — не слишком близко к ней (для выполнения первого неравенства), но и не слишком далеко от нее (для соблюдения второго неравенства). Мы не станем выписывать явных критериев, определяющих эту окрестность.

$[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]$ коллинеарны (параллельны при $\gamma < 0$ или антипараллельны при $\gamma > 0$), а по величине

$$k = \frac{\gamma}{\alpha} \ll \frac{1}{a}. \tag{52.4}$$

Таким образом, наличие малого линейного по производным члена в $U_{\text{неодн}}$ приводит к возникновению *геликоидальной* магнитной сверхструктуры, налагающейся на основную ферромагнитную структуру: магнитные моменты атомов лежат в плоскостях, перпендикулярных к направлению $\mathbf{k}$, причем направления моментов в последовательных атомных слоях медленно поворачиваются относительно друг друга; концы векторов (атомных моментов), расположенных вдоль прямой, параллельной направлению $\mathbf{k}$, описывают винтовую линию. Шаг этой линии, равный $2\pi/k$, есть период сверхструктуры; он велик по сравнению с кристаллографическими периодами и, вообще говоря, несоизмерим с ними [1]). Фазы с такого рода сверхструктурами называют вообще несоизмеримыми [2]). О них упоминалось в V, § 133.

В рамках рассмотренного приближения направление $\mathbf{k}$ относительно кристаллографических осей остается неопределенным. Оно определяется минимизацией суммы энергии анизотропии (40.7) и релятивистской части энергии неоднородности. Мы не будем останавливаться на этом.

---

[1]) Рассмотренная ситуация вполне аналогична той, которая имеет место в холестерических жидких кристаллах (см. V, § 140). В последних наличие члена вида $\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{n}$ в энергии ($\mathbf{n}$ — единичный вектор «директора» кристалла) также приводит к возникновению геликоидальной структуры.

[2]) По английской терминологии — incommensurate.

ГЛАВА VI

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

§ 53. Магнитные свойства сверхпроводников

Многие металлы при температурах, близких к абсолютному нулю, переходят в особое состояние, наиболее наглядным свойством которого (открытым *Камерлинг-Оннесом*; *H. Kamerlingh Onnes*, 1911) является *сверхпроводимость* — полное отсутствие электрического сопротивления постоянному току. Возникновение сверхпроводимости происходит при определенной для каждого металла температуре — в точке *сверхпроводящего перехода*, являющегося фазовым переходом второго рода.

С точки зрения феноменологической теории, однако, более фундаментальную роль играет изменение магнитных, а не электрических свойств при переходе в сверхпроводящее состояние; мы увидим ниже, что электрические свойства сверхпроводника являются неизбежным следствием его магнитных свойств.

Магнитные свойства сверхпроводящего металла можно описать следующим образом. Магнитное поле никогда не проникает в толщу сверхпроводника; поскольку средняя напряженность магнитного поля в среде есть, по определению, магнитная индукция $\mathbf{B}$, то можно иначе сказать, что в толще сверхпроводника всегда

$$\mathbf{B} = 0 \tag{53.1}$$

(*W. Meissner*, *R. Ochsenfeld*, 1933). Это свойство имеет место независимо от того, в каких условиях фактически произошел переход в сверхпроводящее состояние. Так, если охлаждение образца происходит в магнитном поле, то в момент перехода магнитные силовые линии «выталкиваются» из тела.

Подчеркнем, однако, что равенство $\mathbf{B} = 0$ не относится к тонкому поверхностному слою тела. В действительности, магнитное поле проникает в сверхпроводник на некоторую глубину, большую по сравнению с межатомными расстояниями (обычно $\sim 10^{-5}$ см), зависящую от рода металла и от температуры. По этой же причине равенство $\mathbf{B} = 0$ вообще не имеет места в тонких металлических пленках или малых частицах, толщина или размеры которых порядка величины глубины проникновения.

Ниже мы рассматриваем только массивные сверхпроводники достаточно больших размеров, полностью отвлекаясь от фак-

та проникновения магнитного поля в тонкий поверхностный слой [1]).

Как мы знаем, на границе между всякими двумя средами должна быть непрерывной нормальная составляющая индукции (это условие является следствием всегда справедливого уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$). Поскольку внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$, то на его поверхности нормальная составляющая внешнего поля тоже равна нулю, т. е. поле снаружи сверхпроводника везде касательно к его поверхности; магнитные силовые линии огибают сверхпроводник.

Учитывая это обстоятельство, легко найти силы, действующие на сверхпроводник в магнитном поле. Подобно тому, как это было сделано в § 5 для обычного проводника в электрическом поле, вычисляем силу (отнесенную к 1 см^2 поверхности) как $\sigma_{ik}n_k$, где

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_iH_k - \frac{H^2}{2}\delta_{ik}\right)$$

есть максвелловский тензор напряжений для магнитного поля в пустоте. Поскольку в данном случае $\mathbf{nH}_e = 0$ ($\mathbf{H}_e$ — поле снаружи тела у его поверхности), то мы получаем

$$\mathbf{F}_{\text{пов}} = -\mathbf{n}\frac{H_e^2}{8\pi}, \tag{53.2}$$

т. е. на поверхность тела действует сжимающее давление, по величине равное плотности энергии поля.

Согласно уравнению (29.4)

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}; \tag{53.3}$$

из равенства $\mathbf{B} = 0$ следует, что внутри сверхпроводника средняя плотность тока тоже везде равна нулю. Другими словами, в сверхпроводнике невозможны никакие объемные макроскопические токи. В этой связи подчеркнем, что в сверхпроводнике не имеет смысла выделять из $\overline{\rho\mathbf{v}}$ токи проводимости, как это делается в обычных проводниках. По этой же причине не имеет

---

[1]) Мы не излагаем здесь теории явлений, связанных с глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводник (теория *Ф.* и *Г. Лондонов* и *Гинзбурга–Ландау*). Хотя эти теории имеют макроскопический характер, но смысл фигурирующих в ней величин становится ясным только на основе микроскопической теории. Эти теории излагаются в другом томе этого курса (том IX).

Подчеркнем также, что в данной главе рассматриваются так называемые сверхпроводники первого рода, к которым относятся чистые металлические элементы и соединения стехиометрического состава. В сверхпроводниках второго рода (к которым относятся сверхпроводящие сплавы) эффект Мейснера выражен полностью лишь в достаточно слабых полях. Достаточно сильное поле проникает в сверхпроводник второго рода, не уничтожая полностью его сверхпроводящих свойств (см. IX, гл. 5).

физического смысла вводить в рассматриваемой теории намагничение $\mathbf{M}$, а с ним и вектор $\mathbf{H}$.

Таким образом, всякий электрический ток, текущий в сверхпроводнике, является поверхностным током. Поверхностная плотность токов $\mathbf{g}$ определяется согласно (29.16) скачком касательной компоненты индукции на границе тела. Поскольку внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$, а снаружи $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ совпадают, то

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{H}_e]. \qquad (53.4)$$

Само по себе наличие поверхностных токов не является характерной особенностью одних только сверхпроводников. Такие же токи возникают и в любом обычном намагничивающемся теле, где их плотность

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}, \mathbf{H}_e - \mathbf{B}].$$

Поскольку на поверхности нормального (несверхпроводящего) тела непрерывны касательные составляющие вектора $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, то имеем $[\mathbf{n}\mathbf{H}_e] = [\mathbf{n}\mathbf{B}]/\mu$, так что выражение для $\mathbf{g}$ можно написать в виде

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{B}]\frac{1-\mu}{\mu}. \qquad (53.5)$$

Принципиальная разница между сверхпроводниками и обычными телами выявляется, однако, при рассмотрении полного тока, протекающего через поперечное сечение тела. В несверхпроводящем теле поверхностные токи всегда взаимно компенсируются, так что никакого полного тока не возникает. Эта компенсация обеспечивается условием (53.5), связывающим плотность токов $\mathbf{g}$ с магнитной индукцией внутри тела, а посредством нее — токи $\mathbf{g}$ в разных местах поверхности. В сверхпроводниках условие (53.5) теряет смысл. Действительно, переход от обычного тела с магнитной проницаемостью μ к сверхпроводнику формально означает, что надо одновременно положить $B \to 0$ и $\mu \to 0$. Но при этом правая часть равенства (53.5) становится неопределенной, так что никакого условия, ограничивающего возможные значения тока, по существу нет.

Таким образом, мы приходим к результату, что текущие по поверхности сверхпроводника токи могут приводить к протеканию по нему отличного от нуля полного тока. Разумеется, это возможно лишь в многосвязном теле (например, в кольце) или же в односвязном сверхпроводнике, составляющем часть замкнутой цепи с источником электродвижущей силы, необходимой для поддержания тока в несверхпроводящих участках цепи.

Очень существенно, что стационарное протекание по сверхпроводнику полного тока оказывается возможным без электрического поля. Это значит, что оно не сопровождается диссипацией энергии, для восполнения которой требовалась бы работа

внешнего поля. Это свойство сверхпроводника и может быть описано как отсутствие у него электрического сопротивления, которое оказывается, таким образом, необходимым следствием его магнитных свойств.

§ 54. Сверхпроводящий ток

Рассмотрим более подробно некоторые свойства сверхпроводников, зависящие от их формы.

Если сверхпроводник представляет собой односвязное тело, то в отсутствие внешнего магнитного поля в нем вообще невозможно существование каких-либо стационарно протекающих поверхностных токов. В этом можно убедиться путем следующих рассуждений. Поверхностные токи создавали бы в окружающем тело пространстве постоянное магнитное поле, исчезающее на бесконечности. Как всякое постоянное магнитное поле в пустоте, оно было бы потенциальным, причем в силу граничных условий на сверхпроводнике нормальная производная $\partial\varphi/\partial n$ потенциала на поверхности тела должна обращаться в нуль. Но из теории потенциала известно, что если $\partial\varphi/\partial n = 0$ на поверхности односвязного тела и на бесконечности, то $\varphi = 0$ во всем пространстве (вне тела). Таким образом, такое магнитное поле, а с ним и поверхностные токи не могут существовать.

Внешнее же магнитное поле индуцирует на поверхности односвязного сверхпроводника токи, что можно воспринимать как появление у тела как целого определенного магнитного момента. Это «намагничение» легко вычислить для сверхпроводника, имеющего эллипсоидальную форму [1]).

Пусть $\mathfrak{H}$ — внешнее поле, параллельное одной из главных осей эллипсоида. Для магнитного поля внутри несверхпроводящего эллипсоида имеет место соотношение

$$(1-n)H + nB = \mathfrak{H},$$

где n — коэффициент размагничивания вдоль данной оси (см. (29.14)). В сверхпроводнике «напряженность» $\mathbf{H}$ не имеет, как уже было указано, физического смысла, а вместе с нею не имеет своего обычного смысла также и намагниченность $M = (B-H)/(4\pi)$. Тем не менее, в данном случае удобно ввести H и M чисто формальным образом как вспомогательные величины, служащие для вычисления полного магнитного момента $\mathscr{M} = MV$ (V — объем эллипсоида), имеющего свой буквальный

[1]) В этом параграфе везде подразумевается, что магнитное поле не превосходит тех значений, при которых происходит разрушение сверхпроводящего состояния (см. § 55).

физический смысл. Положив для сверхпроводящего эллипсоида $B = 0$, находим

$$H = \frac{\mathfrak{H}}{1-n} \tag{54.1}$$

и затем

$$\mathscr{M} = -\frac{VH}{4\pi} = -\frac{V\mathfrak{H}}{4\pi(1-n)}. \tag{54.2}$$

В частности, для длинного цилиндра в продольном поле $n = 0$, так что $H = \mathfrak{H}$ и $\mathscr{M} = -V\mathfrak{H}/(4\pi)$[1]. Эти значения $\mathscr{M}$ таковы, как если бы тело обладало объемной диамагнитной восприимчивостью $-1/(4\pi)$.

Магнитное поле $\mathbf{H}_e$ вне эллипсоида у его поверхности направлено везде по касательным, и поэтому его величина непосредственно определяется условием непрерывности тангенциальных составляющих $\mathbf{H}$. Внутри эллипсоида $\mathbf{H} = \mathfrak{H}/(1-n)$; проецируя этот вектор на касательное направление, получим

$$H_e = \frac{\mathfrak{H}}{1-n}\sin\theta, \tag{54.3}$$

где θ — угол между направлением внешнего поля $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$ и нормалью в данной точке поверхности эллипсоида. Наибольшее значение H_e имеет на экваторе эллипсоида, где оно равно $\mathfrak{H}/(1-n)$.

Подчеркнем еще раз, что между токами, ответственными за «намагничение» сверхпроводника и создающими полный ток в нем, нет никакой принципиальной разницы: они имеют одинаковую физическую природу. Это обстоятельство позволяет, в частности, непосредственно определить гиромагнитные коэффициенты для любого сверхпроводника. Действительно, плотность импульса частиц (электронов), создающих намагничивающие токи, отличается от плотности этих токов лишь множителем m/e (e и m — заряд и масса электрона). Ввиду определения гиромагнитных коэффициентов (см. (36.3)) отсюда сразу следует, что у сверхпроводника всегда

$$g_{ik} = \delta_{ik}.$$

Перейдем к многосвязным сверхпроводникам. Их свойства существенно отличаются от свойств односвязных тел — прежде всего потому, что к ним не относится вывод о невозможности стационарного протекания поверхностных токов в отсутствие внешнего магнитного поля. Более того, поверхностные токи не должны здесь взаимно компенсироваться и могут приводить к стационарному протеканию по телу полного сверхпроводящего тока в отсутствие приложенной извне электродвижущей силы.

---

[1]) Эти соотношения для цилиндра являются непосредственным следствием условия непрерывности H и потому справедливы для цилиндра с любой (не обязательно круговой) формой сечения.

Рассмотрим двусвязное тело (кольцо) в отсутствие внешнего магнитного поля и покажем, что его состояние вполне определяется заданием полного протекающего по нему тока J. Задача об определении создаваемого кольцом поля тоже может решаться как задача теории потенциала, но только потенциал φ будет теперь многозначной функцией, меняющейся на $4\pi J/c$ при обходе по любому замкнутому пути, проходящему через отверстие кольца (ср. § 30). Для того чтобы поставить задачу математически точно, надо произвести «разрез» пространства по какой-либо поверхности, закрывающей отверстие кольца. Тогда задача заключается в решении уравнения Лапласа с граничным условием $\partial\varphi/\partial n = 0$ на поверхности кольца, $\varphi = 0$ на бесконечности и с условием $\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi J/c$ на поверхности разреза, где φ_1 и φ_2 — значения потенциала на двух сторонах последней. Такая задача, как известно из теории потенциала, имеет однозначное решение (не зависящее от формы выбранной поверхности разреза). По распределению же поля вблизи поверхности кольца однозначно определяется и распределение в нем поверхностных токов.

Вместе с распределением токов вполне определенной величиной оказывается коэффициент самоиндукции сверхпроводящего кольца. В этом отношении имеется существенное отличие от обычных проводников, в которых распределение токов, а с ним и точное значение самоиндукции, зависит от способа, которым был возбужден ток (§ 34) [1]).

В § 33 было введено понятие о магнитном потоке Φ через контур линейного проводника и было показано, что $\Phi = LJ/c$, где L — самоиндукция проводника. Для сверхпроводящего же кольца понятие о магнитном потоке имеет смысл и при любой, не обязательно малой, толщине кольца. Действительно, в силу тангенциальности магнитного поля его поток через любую часть поверхности самого кольца равен нулю; поэтому величина магнитного потока через поверхность, закрывающую отверстие сверхпроводящего кольца, не зависит от выбора этой поверхности.

Более того, остается в силе также и формула

$$\Phi = \frac{1}{c}LJ \tag{54.4}$$

с самоиндукцией L, по-прежнему определенной по полной энер-

[1]) Самоиндукция тонкого сверхпроводящего кольца (радиуса b) из провода круглого сечения (радиуса a) совпадает с внешней частью самоиндукции несверхпроводящего кольца и дается формулой

$$L = 4\pi b\left(\ln\frac{8b}{a} - 2\right)$$

(см. задачу 2 § 34).

Точное решение задачи о сверхпроводящем круговом токе дано *В.А. Фоком* (Phys. Zs. d. Sowjetunion. 1932. Bd 1. S. 215).

гии магнитного поля тока. Полная энергия магнитного поля сверхпроводника дается интегралом $\int \frac{H^2}{8\pi}\,dV$, взятым по всему пространству вне тела. Производя, как указано выше, «разрез» пространства по некоторой поверхности C, вводим потенциал поля и пишем

$$\int \frac{H^2}{8\pi}\,dV = -\int \frac{\mathbf{H}\nabla\varphi}{8\pi}\,dV = \int \frac{\varphi\,\operatorname{div}\mathbf{H}}{8\pi}\,dV - \int \frac{H_n\varphi}{8\pi}\,df.$$

Первый интеграл равен нулю, так как $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$. Второй же интеграл берется по бесконечно удаленной поверхности, по поверхности кольца и по обеим сторонам поверхности разреза; на первых двух подынтегральное выражение обращается в нуль, так что остается

$$\int \frac{H^2}{8\pi}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_C H_n(\varphi_2 - \varphi_1)\,df = \frac{J}{2c}\int\limits_C H_n\,df = \frac{J\Phi}{2c},$$

где Φ — магнитный поток через поверхность C. Сравнивая это выражение с $LJ^2/2c^2$ (по определению самоиндукции), получим искомое равенство (54.4).

Если кольцо находится во внешнем магнитном поле, то полный магнитный поток Φ складывается из собственного потока LJ/c и потока Φ_e от внешнего поля. Важное свойство сверхпроводящего кольца состоит в том, что при любом изменении внешнего поля и тока полный магнитный поток через кольцо остается постоянным:

$$\frac{1}{c}LJ + \Phi_e = \text{const} \equiv \Phi_0. \qquad (54.5)$$

Это следует непосредственно из интегральной формы уравнения Максвелла в пространстве вне тела:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_C \mathbf{H}\,d\mathbf{f} = -\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l}.$$

Если производить интегрирование по поверхности C, закрывающей отверстие кольца, то контуром интегрирования в правой части равенства будет линия, проходящая по поверхности кольца. Но на поверхности сверхпроводника тангенциальная составляющая $\mathbf{E}$ равна нулю (так как внутри сверхпроводника $\mathbf{E} = 0$, а $\mathbf{E}_t$ непрерывна на поверхности). Поэтому правая часть равенства обращается в нуль, и мы находим, что $d\Phi/dt = 0$.

Соотношением (54.5) определяется изменение тока в кольце при изменении внешнего поля. Так, если кольцо было переведено в сверхпроводящее состояние во внешнем поле, создававшем поток Φ_0, и затем это поле выключается, то в кольце индуцируется стационарный ток, равный $J = c\Phi_0/L$.

Постоянство магнитного потока через сверхпроводящее кольцо имеет место не только при изменении внешнего поля, но и при любом изменении формы кольца или его перемещении в пространстве [1]. Можно сказать, что силовые линии никогда не могут пересекать поверхности сверхпроводника, а потому не могут «выйти» из отверстия сверхпроводящего кольца.

Изложенные результаты непосредственно обобщаются на случай сверхпроводящих тел любой степени связности, в том числе на совокупность любого числа колец. Состояние n-связной системы в отсутствие внешнего поля полностью определяется заданием $n-1$ значений полных токов J_a. Соотношение же (54.5) обобщается в систему уравнений

$$\sum_b L_{ab} J_b + \Phi_a^{(e)} = \Phi_{a0}. \tag{54.6}$$

Эти уравнения справедливы не только при любом изменении внешнего поля, но и при изменениях формы или взаимного расположения тел.

Задача

Определить магнитный момент сверхпроводящего диска в перпендикулярном к нему внешнем магнитном поле [2].

Решение. Задача о сверхпроводнике в постоянном магнитном поле формально совпадает с электростатической задачей для диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 0$. Рассматривая диск как предел эллипсоида вращения при $c \to 0$ (ср. задачу 4 § 4) и воспользовавшись формулой (8.10) с соответствующим изменением обозначений (поле $\mathfrak{H}$ вдоль оси z), получим

$$\mathscr{M} = -\frac{2a^3}{3\pi}\mathfrak{H}.$$

§ 55. Критическое поле

Цилиндрический сверхпроводник в продольном магнитном поле обладает дополнительной магнитной энергией, равной

$$-\frac{1}{2}\mathscr{M}\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{H}^2 V}{8\pi}.$$

В нормальном же (несверхпроводящем) состоянии полная энергия цилиндра практически не изменилась бы при включении

---

[1] Доказательство этого утверждения прямо следует из связи между электродвижущей силой индукции и связанного с перемещением проводника изменением магнитного потока через его контур (§ 63).

[2] Эта задача рассматривается здесь главным образом в целях применений по другому поводу (см. задачу 2 § 95). Для сверхпроводящего диска фактически может идти речь лишь о весьма слабых магнитных полях, так как в этих условиях легко наступает разрушение сверхпроводимости (см. § 55).

внешнего поля (слабым диа- или парамагнетизмом несверхпроводящего металла мы здесь и ниже пренебрегаем, т. е. полагаем для него $\mu = 1$). Уже отсюда ясно, что в достаточно сильных магнитных полях сверхпроводящее состояние металла должно оказаться термодинамически менее выгодным, чем нормальное, и потому должно произойти, как говорят, разрушение сверхпроводимости.

Значение напряженности продольного магнитного поля, при котором наступает разрушение сверхпроводимости в цилиндрическом теле, зависит от рода металла, а также от его температуры (и давления). Это значение называют *критическим полем* (H_c); оно является одной из важнейших характеристик сверхпроводника[1]).

Разрушение сверхпроводимости в цилиндре при достижении полем критического значения наступает во всем его объеме, что связано с однородностью поля вдоль всей поверхности такого тела. В телах же другой формы разрушение сверхпроводимости представляет собой более сложный процесс, в котором объем, занятый веществом в нормальном состоянии, постепенно возрастает в целом интервале значений $\mathfrak{H}$ (об этом будет идти речь подробнее в следующем параграфе).

Таким образом, при всякой температуре (ниже точки перехода) металл может существовать как в сверхпроводящем (s), так и в нормальном (n) состоянии. Обозначим через $\mathscr{F}_{s0}(V,T)$ и $\mathscr{F}_n(V,T)$ полные свободные энергии сверхпроводящего и нормального тел в отсутствие внешнего магнитного поля; эти величины, характеризуя вещество как таковое, зависят, разумеется, только от объема, но не от формы тела. Свободная энергия в n-состоянии вообще не меняется при включении внешнего поля (поэтому мы не пишем индекса 0 у $\mathscr{F}_n$ [2]). В s-состоянии же магнитное поле существенно меняет свободную энергию. Для сверхпроводящего цилиндра при заданных T и V свободная энергия в продольном внешнем поле $\mathfrak{H}$ равна

$$\mathscr{F}_s = \mathscr{F}_{s0}(V,T) + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}V. \tag{55.1}$$

---

[1]) Резкий переход из сверхпроводящего в нормальное состояние имеет место только в сверхпроводниках первого рода (см. примеч. на с. 269), которые мы только и рассматриваем. В сверхпроводниках же второго рода разрушение сверхпроводимости и проникновение магнитного поля в образец происходят постепенно, в сравнительно широком интервале полей, так что критического поля в указанном в тексте смысле для них не существует.

[2]) Напомним, что по определению «полных» величин $\mathscr{F}$, Φ, из них исключена энергия магнитного поля, которое существовало бы в отсутствие тела.

Отсюда можно найти все остальные термодинамические величины. Дифференцируя (55.1) по объему, найдем действующее на тело давление

$$P = P_0(V,T) - \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, \qquad (55.2)$$

где $P_0(V,T)$ — давление (при заданных V и T) в отсутствие поля. Равенство (55.2) определяет зависимость между P, V и T, т. е. представляет собой уравнение состояния сверхпроводящего цилиндра во внешнем магнитном поле. Мы видим, что объем $V(P,T)$ при наличии магнитного поля такой же, каким был бы в отсутствие магнитного поля при давлении $P + \mathfrak{H}^2/(8\pi)$. Этот результат находится, естественно, в согласии с формулой (53.2) для силы, действующей на поверхность сверхпроводника в магнитном поле.

Термодинамический потенциал [1]) сверхпроводящего цилиндра равен

$$\Phi_s = \mathscr{F}_s + PV = \mathscr{F}_{s0}(V,T) + P_0V,$$

причем объем V должен быть выражен здесь через P и T согласно (55.2). Поэтому можно написать $\Phi_s(P,T)$ в следующем виде:

$$\Phi_s(P,T) = \Phi_{s0}\left(P + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right), \qquad (55.3)$$

где $\Phi_{s0}(P,T)$ — термодинамический потенциал в отсутствие поля. Дифференцируя это равенство по T и по P, получим аналогичные соотношения для энтропии и объема:

$$\mathscr{S}_s(P,T) = \mathscr{S}_{s0}\left(P + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right), \qquad (55.4)$$

$$V_s(P,T) = V_{s0}\left(P + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right). \qquad (55.5)$$

Теперь можно написать условие, определяющее критическое поле. Переход цилиндра из s- в n-состояние произойдет тогда, когда (при заданных P и T) Φ_n станет меньше Φ_s. В момент же перехода должно быть $\Phi_s = \Phi_n$, т. е.

$$\Phi_{s0}\left(P + \frac{H_c^2}{8\pi}, T\right) = \Phi_n(P,T). \qquad (55.6)$$

Это — точное термодинамическое соотношение [2]). Обычно изменение термодинамического потенциала в магнитном поле представляет собой небольшую поправку к $\Phi_{s0}(P,T)$. Тогда левую

---

[1]) Здесь подразумевается то определение Φ, о котором шла речь в § 12.

[2]) Мы приводим здесь вычисления с большей точностью, чем это обычно требуется, имея в виду выявить более ясно взаимоотношение между различными термодинамическими величинами.

часть уравнения (55.6) можно разложить в ряд, и первые члены разложения дают:

$$\Phi_{s0}(P,T) + \frac{H_c^2}{8\pi} V_{s0}(P,T) = \Phi_n(P,T), \qquad (55.7)$$

где $V_{s0}(P,T) = \partial\Phi_{s0}(P,T)/\partial P$ — объем сверхпроводящего цилиндра в отсутствие поля. Таким образом, в этом приближении можно сказать, что термодинамический потенциал вещества (отнесенный к единице объема) в нормальном состоянии на $H_c^2/8\pi$ больше, чем в сверхпроводящем.

Обозначим через $T_c = T_c(P)$ температуру перехода в отсутствие магнитного поля. Переход в этой точке является фазовым переходом второго рода. Поэтому, в частности, обращение $H_c(T)$ в нуль при $T = T_c$ должно происходить непрерывным образом. Из общей теории фазовых переходов второго рода известно[1]), что изменение термодинамического потенциала вблизи точки перехода пропорционально квадрату разности температур $T - T_c$. Из (55.7) можно поэтому заключить, что вблизи T_c критическое поле меняется с температурой по линейному закону

$$H_c = \text{const}\cdot(T_c - T). \qquad (55.8)$$

Продифференцируем обе части (55.6) по температуре вдоль кривой зависимости H_c от T (при заданном давлении). Учитывая при этом формулы (55.4), (55.5), получим

$$\mathscr{S}_n - \mathscr{S}_s = -V_s \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H_c^2}{8\pi}\right), \qquad (55.9)$$

где все величины $\mathscr{S}_n$, $\mathscr{S}_s$, V_s относятся к моменту перехода между обоими состояниями тела (т. е. к полю $H = H_c$). Умножив эту разность на T, получим теплоту перехода

$$Q = T(\mathscr{S}_n - \mathscr{S}_s) = -\frac{V_s H_c T}{4\pi}\left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)_P \qquad (55.10)$$

(*W.H. Keesom*, 1924). При переходе в точке $T = T_c$ (в отсутствие магнитного поля) эта величина обращается в нуль вместе с H_c, в соответствии с тем, что здесь мы имеем фазовый переход второго рода. Переход же, происходящий при $T < T_c$ (в магнитном поле), сопровождается поглощением или выделением тепла, т. е. является фазовым переходом первого рода. Фактически H_c монотонно растет с понижением температуры во всем интервале от T_c до 0. Поэтому производная $\partial H_c/\partial T$ всегда отрицательна и из

[1]) Для сверхпроводящего перехода теорию Ландау можно считать фактически применимой без каких-либо ограничений, вплоть до самой точки перехода (см. IX, § 45).

(55.10) видно, что $Q > 0$, т. е. тепло поглощается при переходе (изотермическом) из сверхпроводящего в нормальное состояние.

При $T \to 0$ энтропия всякого тела согласно теореме Нернста должна обращаться в нуль. Поэтому из (55.9) видно, что при $T = 0$ должно быть $\partial H_c/\partial T = 0$, т. е. кривая $H_c = H_c(T)$ пересекает ось H под прямым углом.

Продифференцируем разность $\mathscr{S}_n - \mathscr{S}_s$ (55.9) еще раз по температуре, снова используя при этом равенства (55.4), (55.5). Учитывая также, что $\left(\dfrac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P$, получим в результате

$$\frac{\partial \mathscr{S}_n}{\partial T} - \frac{\partial \mathscr{S}_s}{\partial T} = -V_s \frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\frac{H_c^2}{8\pi}\right) - 2\frac{\partial V_s}{\partial T}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H_c^2}{8\pi}\right) - \frac{\partial V_s}{\partial P}\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H_c^2}{8\pi}\right)\right)^2. \tag{55.11}$$

Умножив обе части этого равенства на T, получим разность теплоемкостей (при постоянном давлении) обеих фаз. Члены, содержащие коэффициент теплового расширения и коэффициент сжимаемости вещества, обычно очень малы по сравнению с остальными членами; пренебрегая ими, получим

$$\mathscr{C}_s - \mathscr{C}_n = \frac{V_s T}{4\pi} H_c \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} + \frac{V_s T}{4\pi}\left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)^2. \tag{55.12}$$

Эту формулу можно получить и путем непосредственного дифференцирования приближенного соотношения (55.7). В этом приближении разница между V_s и V_{s0} несущественна; можно также считать одинаковыми $\mathscr{C}_s$ и $\mathscr{C}_{s0}$.

При $T = T_c$ первый член в (55.12) обращается в нуль, и мы получаем следующую формулу, связывающую скачок теплоемкости при фазовом переходе второго рода в отсутствие внешнего магнитного поля с температурной зависимостью H_c:

$$\mathscr{C}_s - \mathscr{C}_n = \frac{V_s T_c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)^2 \tag{55.13}$$

(*A.J. Rutgers*, 1933). Отсюда видно, что в этом случае $\mathscr{C}_s > \mathscr{C}_n$. При понижении температуры (т. е. когда сверхпроводимость разрушается магнитным полем), разность $\mathscr{C}_s - \mathscr{C}_n$ меняет свой знак в соответствии с тем, что разность $\mathscr{S}_n - \mathscr{S}_s$, обращаясь в нуль при $T = 0$ и при $T = T_c$, должна проходить в этом интервале через максимум.

Аналогичным образом можно рассмотреть эффекты, связанные с изменением объема при переходе. Для этого дифференцируем уравнение (55.6) по давлению вдоль кривой зависимости H_c от P (при заданной температуре); это дает

$$V_n = V_s \frac{\partial}{\partial P}\left(P + \frac{H_c^2}{8\pi}\right)$$

или

$$V_n - V_s = \frac{V_s H_c}{4\pi}\frac{\partial H_c}{\partial P}, \qquad (55.14)$$

чем и определяется изменение объема в момент перехода[1]. В точке $T = T_c$ эта разность, как и разность энтропий, обращается в нуль. Переход же при температурах $T < T_c$ сопровождается изменением объема, которое может иметь оба знака в зависимости от знака производной $(\partial H_c/\partial P)_T$. При $T = T_c$ изменение объема отсутствует, но имеется скачок коэффициента сжимаемости, который легко определить путем дифференцирования равенства (55.14).

Заметим, что если подставить в (55.14)

$$\left(\frac{\partial H_c}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{H_c}$$

(что получается дифференцированием уравнения $H_c(P,T) = \text{const}$), то получим «уравнение Клапейрона–Клаузиуса»:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{H_c} = \frac{Q}{T(V_n - V_s)}, \qquad (55.15)$$

где производная $(\partial P/\partial T)_{H_c}$ определяет изменение давления, необходимое для того, чтобы приложенное внешнее поле как раз оставалось критическим при изменении температуры.

Критическое поле H_c имеет значительно более широкий физической смысл, чем это отражено в его определении по поведению сверхпроводящего цилиндра. Равенство $H = H_c$ является условием равновесия, которое должно выполняться в каждой точке поверхности раздела между нормальной (n) и сверхпроводящей (s) фазами вещества в одном и том же теле. Это очевидно уже из следующих простых соображений. Если цилиндр находится в продольном магнитном поле, как раз равном H_c, то как граничные условия для магнитного поля, так и условия термодинамической устойчивости в равной степени выполняются для всех состояний, в которых любая внутренняя цилиндрическая часть объема образца находится в сверхпроводящем, а нижняя — в нормальном состоянии. При этом на их границе поле $H = H_c$. Таким образом, поверхность раздела, на которой $H = H_c$, находится в безразличном равновесии по отношению к месту своего расположения. Это и есть свойство, характеризующее фазовое равновесие.

---

[1]) Эту разность следует, разумеется, отличать от изменения объема (магнитострикции) сверхпроводника при изменении поля от нуля до H_c. Последнее можно найти из (55.5):

$$V_s(P,T) - V_{s0}(P,T) \approx \frac{H_c^2}{8\pi}\left(\frac{\partial V_s}{\partial P}\right)_T.$$

В переменном магнитном поле граница между сверхпроводящей и нормальной фазами перемещается. Кинетика этого перемещения представляет собой довольно сложный процесс, рассмотрение которого требует одновременного решения электродинамических уравнений и уравнения теплопроводности с учетом тепла, выделяющегося при фазовом переходе. Не останавливаясь здесь на этом исследовании [1], укажем лишь граничное условие, которое должно выполняться на движущейся границе между n- и s-фазами.

Для его вывода рассмотрим систему координат K', движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ — скоростью перемещения границы между фазами. Согласно известной формуле преобразования полей электрическое поле $\mathbf{E}'$ в системе K' выражается через поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в неподвижной системе K согласно

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]$$

(см. (63.1)). Поскольку в системе K' граница раздела покоится, то на ней справедливо обычное условие непрерывности тангенциальной компоненты $\mathbf{E}'$, т. е. величины

$$[\mathbf{nE}'] = [\mathbf{nE}] - \frac{v}{c}\mathbf{B}$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности, направленный вдоль скорости $\mathbf{v}$). В сверхпроводящей фазе $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, а в нормальной (на границе) $B = H_c$. Мы находим, следовательно, что на движущейся поверхности раздела появляется тангенциальное электрическое поле, перпендикулярное к магнитному и по величине равное

$$E = \frac{v}{c}H_c. \qquad (55.16)$$

§ 56. Промежуточное состояние

Если сверхпроводящее тело произвольной формы находится во внешнем магнитном поле, напряженность $\mathfrak{H}$ которого постепенно увеличивается, наступает в конце концов момент, когда в каком-либо месте поверхности тела величина поля достигает критического значения H_c, между тем как само $\mathfrak{H}$ еще меньше H_c. Так, на поверхности эллипсоида (в поле $\mathfrak{H}$, параллельном одной из его осей) поле имеет наибольшее значение на экваторе (см. (54.3)); оно достигает значения H_c уже при $\mathfrak{H} = H_c(1 - n)$.

[1] См. *Лифшиц И.М.* // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 834; ДАН СССР. 1953. Т. 90. С. 363.

При дальнейшем увеличении $\mathfrak{H}$ тело уже не может находиться целиком в сверхпроводящем состоянии. Оно не может перейти целиком и в нормальное состояние, так как при этом поле стало бы везде равным $\mathfrak{H}$. Поэтому должно наступить частичное разрушение сверхпроводимости.

На первый взгляд можно было бы представить себе это разрушение следующим образом. По мере увеличения $\mathfrak{H}$ сверхпроводимость разрушается в постепенно увеличивающейся части объема тела, в то время как соответственно уменьшающаяся часть остается сверхпроводящей; тело целиком переходит в нормальное состояние при $\mathfrak{H} = H_c$. Легко, однако, видеть, что такие состояния тела термодинамически неустойчивы. Для этого вспомним, что на поверхности раздела между сверхпроводящей и нормальной фазами магнитное поле касательно к поверхности (а по величине равно H_c). Другими словами, силовые линии поля лежат на этой поверхности. Если граница выпукла в сторону нормальной фазы, то эквипотенциальные поверхности поля, перпендикулярные к его силовым линиям, будут расходиться в глубь нормальной области (как это показано на рис. 33 *а* штриховыми линиями). Но в направлении расхождения эквипотенциальных поверхностей величина поля убывает, так что в заштрихованной области было бы $H < H_c$, в противоречии с предположением о существовании здесь нормального состояния. Если же граница сверхпроводящей фазы вогнута, то заполняющие ее силовые линии при переходе на свободную поверхность сверхпроводящей области (к которой поле тоже касательно) будут иметь излом (точка O на рис. 33 *б*). Но в точке излома силовой линии поле обращается в бесконечность, что снова находится в противоречии с граничными условиями на поверхности сверхпроводника.

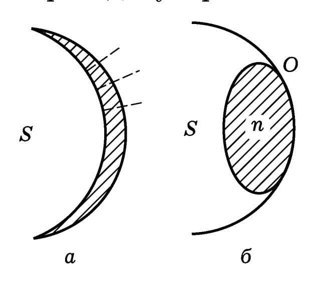


Рис. 33

Изложенные соображения представляют собой, по существу, другой аспект того же положения, которое приводит к возникновению доменной структуры в сегнетоэлектриках и ферромагнетиках. И здесь условия термодинамической устойчивости приводят к тому, что после достижения магнитным полем значения H_c хотя бы в одном месте поверхности тела последнее разбивается на большое число параллельных тонких чередующихся нормальных и сверхпроводящих слоев (*Л.Д. Ландау*, 1937). Это своеобразное состояние сверхпроводника называется *промежуточным*. По мере увеличения $\mathfrak{H}$ общий объем нормальных слоев возрастает, пока при $\mathfrak{H} = H_c$ тело не перейдет целиком в нормальное состояние.

В общем случае тела произвольной формы не обязательно весь его объем должен находиться в промежуточном состоянии. В нем могут оставаться также и области чисто сверхпроводящего и чисто нормального состояний, соприкасающиеся с областью промежуточного состояния, но только не непосредственно друг с другом. В этом отношении более прост упомянутый выше случай эллипсоидальной формы тела. В поле, параллельном его оси, промежуточное состояние имеет место в интервале

$$H_c(1-n) < \mathfrak{H} < H_c, \tag{56.1}$$

причем в этом состоянии находится весь объем эллипсоида. Так, для шара $n = 1/3$ и область промежуточного состояния простирается на интервал $(2/3)H_c < \mathfrak{H} < H_c$. Для цилиндра в поперечном поле $n = 1/2$ и интервал промежуточного состояния есть $(1/2)H_c < \mathfrak{H} < H_c$. В продольном же поле для цилиндра $n = 0$, промежуточное состояние вообще отсутствует и сверхпроводимость разрушается целиком при $\mathfrak{H} = H_c$. Наконец, для плоскопараллельной пластинки в поперечном поле $n = 1$, и она находится в промежуточном состоянии в любом поле $\mathfrak{H} < H_c$.

Промежуточное состояние допускает также и усредненное описание, если интересоваться участками тела, большими по сравнению с толщиной слоев (*R. Peierls*, *F. London*, 1936). В этом описании принимается, что внутри тела имеется магнитное поле с индукцией $\overline{\mathbf{B}}$, пробегающей значения от нуля (в чисто сверхпроводящем состоянии) до H_c (в чисто нормальном состоянии). Приписывая веществу в промежуточном состоянии отличную от нуля индукцию, мы должны приписать ему также и определенное значение магнитной «напряженности» $\overline{\mathbf{H}}$. Для определения связи между этими двумя величинами надо обратиться к истинной структуре промежуточного состояния.

Магнитное поле в нормальном слое на его границе со сверхпроводящим равно H_c, а в силу предположенной тонкости слоев можно считать, что это значение поле имеет и по всему объему слоя. В сверхпроводящих же слоях $\mathbf{B} = 0$. Поэтому, усредняя магнитное поле по объему, большому по сравнению с толщиной слоев, мы найдем, что средняя индукция $\overline{B} = x_n H_c$, где x_n — доля объема, приходящаяся на нормальное состояние. Далее, определим термодинамический потенциал единицы объема тела, причем будем отсчитывать его от значения, соответствующего чисто сверхпроводящему состоянию. В отсутствие магнитного поля единица объема нормальной фазы обладает избыточным термодинамическим потенциалом $H_c^2/(8\pi)$ [1]. При наличии

---

[1]) Мы пренебрегаем здесь всеми стрикционными эффектами. В этих условиях можно было бы говорить, вместо изменения термодинамического потенциала, о совпадающем с ним изменении свободной энергии.

в ней магнитного поля сюда добавляется еще такая же магнитная энергия, так что всего получаем $H_c^2/(4\pi)$. Средний термодинамический потенциал единицы объема в промежуточном состоянии равен, следовательно,

$$\Phi = \frac{H_c^2}{4\pi} x_n = \frac{H_c \overline{B}}{4\pi}. \tag{56.2}$$

Согласно общему правилу зависимость между $\overline{\mathbf{B}}$ и $\overline{\mathbf{H}}$ получается из термодинамического соотношения

$$\mathbf{H} = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{B}}.$$

В данном случае мы находим, что вектор $\overline{\mathbf{H}}$ параллелен $\overline{\mathbf{B}}$, а его абсолютная величина

$$\overline{H} = H_c, \tag{56.3}$$

т. е. имеет постоянное значение, не зависящее от величины индукции.

Если изобразить зависимость $\overline{B}$ от $\overline{H}$ графически (рис. 34), то сверхпроводящему состоянию будет соответствовать отрезок OA оси абсцисс, нормальному — прямая BC ($\overline{B} = \overline{H}$). Вертикальный же отрезок AB ($\overline{H} = H_c$) отвечает промежуточному состоянию.

Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении силовых линий усредненного магнитного поля. Написав $\overline{\mathbf{H}} = H_c \mathbf{n}$ и подставив в уравнение $\operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}} = 0$ (справедливое в отсутствие объемного тока), найдем, что $\operatorname{rot} \mathbf{n} = 0$. С другой стороны, поскольку $\mathbf{n}^2 = 1$, то

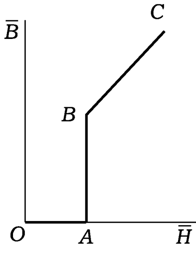


Рис. 34

$$\operatorname{grad} \mathbf{n}^2 = 2(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n} + 2[\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{n}] = 0,$$

откуда заключаем, что и $(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n} = 0$. Но это значит, что вектор $\mathbf{n}$ постоянен по направлению на силовых линиях среднего поля. Таким образом, эти линии прямолинейны.

Применим полученные результаты к эллипсоиду, находящемуся в промежуточном состоянии. Для однородного поля внутри эллипсоида имеет место соотношение

$$(1 - n)\overline{H} + n\overline{B} = \mathfrak{H},$$

справедливое при любой зависимости B от H. Положив здесь $H = H_c$, получим

$$\overline{B} = \frac{\mathfrak{H}}{n} - \frac{1-n}{n} H_c. \tag{56.4}$$

Таким образом, средняя индукция в эллипсоиде меняется с напряженностью внешнего поля по линейному закону от нуля при $\mathfrak{H} = (1-n)H_c$ до H_c при $\mathfrak{H} = H_c$.

Напишем также выражение для полного термодинамического потенциала $\varPhi$ эллипсоида в промежуточном состоянии. Для этого исходим из общей формулы

$$\widetilde{\varPhi} = \int \left[\Phi - \frac{\mathbf{HB}}{8\pi} - \frac{(\mathbf{B}-\mathbf{H})\mathfrak{H}}{8\pi}\right] dV$$

(ср. (32.7)), также справедливой при любой зависимости $\mathbf{B}$ от $\mathbf{H}$. Подставив сюда значения Φ, H, B из (56.2)–(56.4), получим

$$\widetilde{\varPhi}_t = \frac{V}{8\pi}\left[H_c^2 - \frac{1}{n}(H_c - \mathfrak{H})^2\right] \qquad (56.5)$$

(V — объем эллипсоида); это значение отсчитывается от термодинамического потенциала чисто сверхпроводящего эллипсоида в отсутствие магнитного поля. Для сверхпроводящего эллипсоида во внешнем поле $\mathfrak{H}$ имеем

$$\widetilde{\varPhi}_s = -\frac{\mathscr{M}\mathfrak{H}}{2} = \frac{V\mathfrak{H}^2}{8\pi(1-n)} \qquad (56.6)$$

(согласно (32.6) и (54.2)). При $\mathfrak{H} = H_c(1-n)$ термодинамический потенциал и его первая производная по температуре непрерывны; в этом смысле переход из сверхпроводящего состояния в промежуточное аналогичен фазовому переходу второго рода [1]).

Подчеркнем, что точность изложенного усредненного описания промежуточного состояния фактически невелика ввиду сравнительно большой величины толщины слоев. По той же причине из этого описания вообще ускользают некоторые явления, связанные с особенностями слоистой структуры. Сюда относится тот факт, что переход из сверхпроводящего в промежуточное состояние при увеличении внешнего поля происходит в действительности не точно при $\mathfrak{H} = (1-n)H_c$, а несколько позже. Происхождение этого «запаздывания» заключается в следующем. Переход в промежуточное состояние происходит, когда это состояние становится термодинамически устойчивым, т. е. в момент, когда $\widetilde{\varPhi}_t = \widetilde{\varPhi}_s$. Но слоистая структура, помимо чисто «объемной» энергии (56.5), приписываемой ей в усредненном описании, связана также с дополнительной энергией, обусловленной наличием границ между слоями и изменениями их формы вблизи поверхности тела. Это обстоятельство и приводит к некоторому сдвигу точки перехода в сторону больших полей.

Как было отмечено в примеч. на с. 269, в этой главе речь идет о сверхпроводниках первого рода. Тем не менее, сделаем здесь

[1]) В связи с этим не следует удивляться тому, что $\varPhi_t(\mathfrak{H}) < \varPhi_s(\mathfrak{H})$ по обе стороны от точки $\mathfrak{H} = H_c(1-n)$. Напомним, что при фазовом переходе второго рода каждая из фаз вообще не существует по другую сторону от точки перехода, и потому не имеет смысла сравнивать термодинамические потенциалы обеих фаз.

небольшое замечание о термодинамике «кривой намагничения» цилиндрического сверхпроводника второго рода. Для этих сверхпроводников характерно постепенное проникновение в них магнитного поля. Так, в длинный цилиндрический сверхпроводник в продольном магнитном поле $\mathfrak{H}$ проникновение начинается, когда поле достигает некоторого значения $H_{c1}(T)$, и лишь в поле $H_{c2} > H_{c1}$ сверхпроводник непрерывным образом переходит в нормальное состояние [1]).

Исходим из соотношения $\partial\widetilde{\Phi}/\partial H = -\mathscr{M}$ (ср. (32.4)). Проинтегрировав обе части равенства по H в пределах от 0 до H_{c2}, получим

$$-\int\limits_0^{H_{c2}} \mathscr{M}\, d\mathfrak{H} = \Phi_n - \Phi_{s0},$$

где Φ_{s0} относится к сверхпроводнику в отсутствие поля, а Φ_n от внешнего поля вообще не зависит (поэтому над обеими буквами можно опустить знак $\sim$). Но в интервале полей $0 \leqslant H \leqslant H_{c1}$ поле не проникает в цилиндр, и потому его магнитный момент $\mathscr{M} = -V\mathfrak{H}/(4\pi)$. Выделив эту часть интеграла, получим

$$\int\limits_{H_{c1}}^{H_{c2}} \mathscr{M}\, d\mathfrak{H} = -(\Phi_n - \Phi_{s0}) + \frac{VH_{c1}^2}{8\pi}.$$

Если ввести, чисто формальным образом, величину H_c для сверхпроводника второго рода по прежнему определению [2])

$$\Phi_n - \Phi_{s0} = V\frac{H_c^2}{8\pi},$$

то полученное соотношение можно записать окончательно в виде

$$\int\limits_{H_{c1}}^{H_{c2}} \mathscr{M}\, d\mathfrak{H} = -\frac{V}{8\pi}(H_c^2 - H_{c1}^2). \qquad (56.7)$$

Задача

Определить теплоемкость эллипсоида в промежуточном состоянии.

Решение. Энтропию, а затем теплоемкость находим дифференцированием термодинамического потенциала (56.5) по температуре. Пренебрегая членами, содержащими коэффициент теплового расширения тела, получим

$$\mathscr{C}_t - \mathscr{C}_s = \frac{VT}{4\pi n}[(1-n)(H_c'^2 + H_cH_c'') - \mathfrak{H}H_c'']$$

---

[1]) См. IX, § 47, 48. Состояние сверхпроводника в интервале полей между H_{c1} и H_{c2} называют *смешанным*. Подчеркнем, что оно отнюдь не совпадает с промежуточным состоянием сверхпроводников первого рода. В смешанном состоянии магнитное поле проникает в образец в виде так называемых вихревых нитей.

[2]) Значение H_c лежит между H_{c1} и H_{c2}. Само по себе, однако, оно для сверхпроводника второго рода ничем не замечательно.

(штрих означает дифференцирование по T); $\mathscr{C}_s$ — теплоемкость тела в сверхпроводящем состоянии (ее слабой зависимостью от $\mathfrak{H}$ мы здесь пренебрегаем). Отсюда видно, что при изменении $\mathfrak{H}$ (при постоянной температуре) в точке $\mathfrak{H} = (1-n)H_c$ теплоемкость меняется скачком от $\mathscr{C}_s$ до

$$\mathscr{C}_s + \frac{VT(1-n)}{4\pi n} H_c'^2,$$

затем меняется с $\mathfrak{H}$ по линейному закону до значения (при $\mathfrak{H} = H_c$)

$$\mathscr{C}_s - \frac{VT}{4\pi}(H_c'^2 + H_c'' H_c) + \frac{VT}{4\pi n} H_c'^2 = \mathscr{C}_n + \frac{VT}{4\pi n} H_c'^2,$$

откуда падает скачком до $\mathscr{C}_n$.

§ 57. Структура промежуточного состояния

Форма и размеры n- и s-слоев в промежуточном состоянии определяются условиями термодинамического равновесия тела в целом, аналогично тому, как определяется форма доменов в ферромагнетике (§ 44). Как и там, устанавливающаяся толщина слоев является результатом двух противоположных тенденций. Поверхностное натяжение на границах n- и s-фаз стремится уменьшить число слоев, т. е. увеличить их толщину. В обратном направлении действует энергия выхода слоев к свободной поверхности тела. Толщина слоев возрастает при увеличении размеров тела, в результате чего (по тем же причинам, что и для ферромагнитных доменов) в конце концов должно наступить их разветвление при подходе к поверхности тела [1]).

Задача об определении формы и размеров неразветвленных слоев в промежуточном состоянии в плоскопараллельной пластинке может быть решена точно; сделаем это, предполагая внешнее поле $\mathfrak{H}$ перпендикулярным пластинке (*Л.Д. Ландау*, 1937).

Слои расположены вдоль поля, и их плоскопараллельность нарушается лишь вблизи поверхности пластинки.

Силовые линии магнитного поля (штриховые линии на рис. 35) проходят только через n-слои, причем границы s-слоев тоже являются силовыми линиями (в силу условия $B_n = 0$ на них). Учитывая также, что на границе n- и s-фаз должно быть $H = H_c$, пишем следующие условия на границах s-слоя:

$$\begin{aligned} &\text{на отрезке } BC\text{: } H_x = 0, \\ &\text{на } BA \text{ и } CD\text{: } H_x^2 + H_y^2 = H_c^2 \end{aligned} \qquad (57.1)$$

[1]) В определенных условиях (внешние поля, близкие к нулю или к H_c) термодинамически более выгодной может оказаться не слоистая, а нитевидная структура. См. *Andrew E.R.* // Proc. Roy. Soc. 1948. V. 194A. P. 98.

(оси координат выбраны указанным на рис. 35 образом). Вдали от пластинки поле $\mathbf{H}$ должно совпадать с внешним полем, т. е.

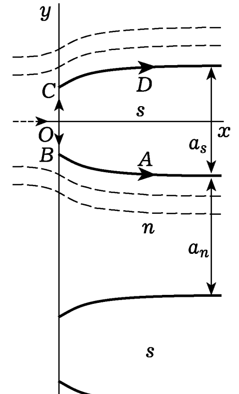


Рис. 35

$$\text{при } x \to -\infty \quad H_x = \mathfrak{H},\ H_y = 0. \tag{57.2}$$

Введем скалярный и векторный потенциалы поля согласно формулам

$$H_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}$$

и комплексный потенциал $w = \varphi - iA$ (ср. § 3).

Вдоль каждой силовой линии $A = \text{const}$. Положим $A = 0$ на силовой линии, подходящей к точке O и затем разветвляющейся на линии OCD и OBA, образуя границу одного из s-слоев. Разность значений A на границах двух последовательных s-слоев равна потоку магнитного поля через отрезок $a = a_s + a_n$, т. е. равна $\mathfrak{H}a$. Поэтому значения A на границах всех s-слоев будут целыми кратными $\mathfrak{H}a$. Вводя также «комплексную напряженность»

$$\eta = H_x - iH_y = -\frac{dw}{dz}, \quad z = x + iy,$$

напишем условия (57.1) в виде

$$\begin{aligned} &\text{на } BC\colon\ \operatorname{Re}\eta = 0, \\ &\text{на } BA \text{ и } CD :\ |\eta| = H_c. \end{aligned} \tag{57.3}$$

Введем новую величину

$$\zeta = \exp\left(-\frac{2\pi w}{\mathfrak{H}a}\right) - 1 \tag{57.4}$$

и будем рассматривать η как функцию от ζ. На всех граничных силовых линиях (вместе с их продолжениями вне пластинки) величина ζ вещественна:

$$\zeta = \exp\left(-\frac{2\pi\varphi}{\mathfrak{H}a}\right) - 1.$$

Поскольку φ определено с точностью до постоянной, то можно произвольно выбрать значение φ в одной точке. Пусть $\varphi = 0$ в точке O. Тогда в этой точке и $\zeta = 0$. На рассматриваемой граничной силовой линии вдали от пластинки $\zeta = -1$ (так как при $x \to -\infty$ имеем $\varphi \to -\mathfrak{H}x \to +\infty$). Значение ζ в точке B (или C), где силовая линия входит внутрь пластинки, обозначим как ζ_0. На ветвях CD и BA ζ меняется от ζ_0 до ∞. Тогда условия (57.1)

и (57.3) можно написать в виде:

$$\text{при } \zeta = -1 \quad \eta = \mathfrak{H}, \tag{57.5}$$

$$\begin{aligned} &\text{при } 0 < \zeta < \zeta_0 \quad \operatorname{Re}\eta = 0, \\ &\text{при } \zeta_0 < \zeta \quad |\eta| = H_c. \end{aligned} \tag{57.6}$$

Кроме того, функция $\eta(\zeta)$ должна быть везде конечной.

Условиям (57.6) удовлетворяет функция

$$\eta = H_c\left[\sqrt{1-\frac{\zeta_0}{\zeta}} - \sqrt{-\frac{\zeta_0}{\zeta}}\right]. \tag{57.7}$$

При вещественных отрицательных значениях ζ оба корня вещественны и берутся с написанными здесь знаками. При $0 < \zeta < \zeta_0$ оба корня мнимы, причем берутся корни

$$\eta = \mp H_c i\left[\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} - \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta} - 1}\right]$$

со знаками $-$ или $+$ соответственно на отрезках OC и OB. При $\zeta > \zeta_0$ надо писать

$$\eta = H_c\left[\sqrt{1-\frac{\zeta_0}{\zeta}} \mp i\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}}\right]$$

со знаками $-$ и $+$ соответственно на CD и BA. Значение ζ_0 определяется из условия (57.5) и равно

$$\zeta_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{h} - h\right)^2, \tag{57.8}$$

где введено обозначение $h = \mathfrak{H}/H_c$.

Форма слоя, т. е. уравнение граничной силовой линии, получается интегрированием соотношения $dz = -dw/\eta$ по вещественным ζ:

$$z = -\int \frac{dw}{\eta} = \frac{ah}{2\pi}\int \frac{d\zeta}{\eta(\zeta+1)}.$$

Подставив сюда $\eta(\zeta)$, отделив вещественную и мнимую части и выбрав соответствующим образом постоянные интегрирования, получим следующее параметрическое уравнение линии CD:

$$\begin{gathered} x = \frac{ha}{2\pi}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\sqrt{1-\frac{\zeta_0}{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta+1} = \frac{ha}{\pi}\left[\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_0}} - \sqrt{\zeta_0+1}\,\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{\zeta(\zeta_0+1)}{\zeta_0(\zeta+1)}}\right], \\ y = Y - \frac{ha}{2\pi}\int_{\zeta}^{\infty}\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta+1} = Y - \frac{ha}{\pi}\sqrt{\zeta_0}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\zeta}\right) \end{gathered} \tag{57.9}$$

($Y = a_s/2$ — значение координаты y при $x \to \infty$; см. рис. 35).

Период слоистой структуры a связан с толщинами a_s и a_n s- и n-слоев равенствами $a = a_s + a_n$, $a\mathfrak{H} = a_n H_c$. Второе из них является следствием непрерывности магнитного потока, проходящего целиком в n-слоях. Отсюда

$$a_s = a(1-h), \quad a_n = ha.$$

Период a определяется условием минимальности полного термодинамического потенциала пластинки. Наличие поверхностного натяжения на границе n- и s-фаз приводит к члену

$$\Phi_1 = \frac{2l}{a}\frac{H_c^2}{8\pi}\Delta \tag{57.10}$$

в термодинамическом потенциале, отнесенном к 1 см^2 поверхности пластинки. Здесь l — толщина пластинки, а коэффициент поверхностного натяжения обозначен как $H_c^2\Delta/(8\pi)$ (Δ имеет размерность длины). При вычислении этой части энергии закруглением слоев вблизи поверхности пластинки можно, конечно, пренебречь.

Энергию выхода слоев к поверхности пластинки можно представить в виде суммы двух частей. Во-первых, само по себе увеличение объема n-слоев по сравнению с объемом, который они имели бы при сохранении плоскопараллельности на всем протяжении, приводит к дополнительной энергии

$$\Phi_2 = \frac{4}{a}\int_0^\infty \frac{H_c^2}{8\pi}(Y-y)\,dx \tag{57.11}$$

(множитель 4 учитывает наличие четырех углов — таких, как B и C на рис. 35 — с обеих сторон каждого из $1/a$ s-слоев).

Во-вторых, выход слоев к поверхности пластинки меняет энергию системы во внешнем поле, т. е. энергию $-\mathscr{M}\mathfrak{H}/2$. Магнитный момент пластинки обусловлен токами на поверхностях s-слоев. При скачке тангенциальной компоненты индукции от H до 0 поверхностная плотность токов $g = \pm cH/(4\pi)$. Поэтому на единицу длины оси z на каждую граничную поверхность s-слоя приходится магнитный момент

$$-\int\limits_{OCD} \frac{H}{4\pi} y\,ds \quad \left(ds = \sqrt{dx^2+dy^2}\right).$$

Если бы слой не выходил к поверхности, отрезок OC отсутствовал бы, а на CD было бы везде $y = Y$. Поэтому избыток магнитного момента для каждого из четырех углов равен

$$-\int\limits_{OCD} \frac{H}{4\pi} y\,ds + \int_0^\infty \frac{H_c}{4\pi} Y\,dx.$$

Соответственно, избыточная энергия

$$\varPhi_3 = -\frac{\mathfrak{H}}{2}\frac{4}{a}\left[\int\limits_0^\infty \frac{H_c}{4\pi}Y\,dx - \int\limits_{OCD} \frac{H}{4\pi}y\,ds\right] =$$

$$= \frac{\mathfrak{H}}{2a\pi}\left[H_c\int\limits_{CD}(-Y\,dx + y\,ds) + \int\limits_{OC} Hy\,dy\right]. \quad (57.12)$$

Координаты x и y, выраженные через ζ, пропорциональны a. Поэтому все интегралы в $\varPhi_1 + \varPhi_2$ пропорциональны a^2, так что эта часть термодинамического потенциала пропорциональна a. Сумма же $\varPhi_1 + \varPhi_2 + \varPhi_3$ имеет, следовательно, вид

$$\varPhi = \frac{H_c^2}{4\pi}\left[\frac{l\Delta}{a} + af(h)\right]. \quad (57.13)$$

Условие ее минимальности дает

$$a = \sqrt{\frac{l\Delta}{f(h)}}. \quad (57.14)$$

Интегралы в (57.11), (57.12) могут быть вычислены до конца [1]), и для функции $f(h)$ получается следующее выражение:

$$f(h) = \frac{1}{4\pi}\{(1+h)^4\ln(1+h) + (1-h)^4\ln(1-h) -$$
$$- (1+h^2)^2\ln(1+h^2) - 4h^2\ln 8h\}. \quad (57.15)$$

Предельные выражения этой функции:

$$f(h) = \frac{h^2}{\pi}\ln\frac{0{,}56}{h} \quad \text{при } h \ll 1;$$
$$f(h) = \frac{\ln 2}{\pi}(1-h)^2 \quad \text{при } 1-h \ll 1. \quad (57.16)$$

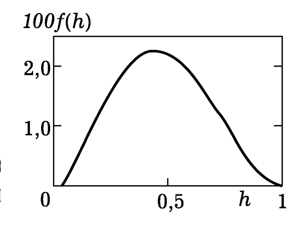


Рис. 36

На рис. 36 изображен график функции $f(h)$.

Отметим, что в n-слоях вблизи поверхности пластинки магнитное поле может быть существенно меньшим, чем H_c, т. е. здесь имеет место ситуация, соответствующая изображенной на рис. 33 *а* [2]). Ее

[1]) См. *Fortini A.*, *Paumier E.* // Phys. Rev. B. 1972. V. 5. P. 1850.

[2]) Так, при $h = 1/2$ поле на поверхности в средней точке n-слоя составляет всего $0{,}73H_c$, а при $h \to 0$ стремится к $0{,}65H_c$.

термодинамическая невыгодность компенсируется в данном случае энергией поверхностного натяжения, препятствующей дальнейшему уменьшению толщины слоев.

Как уже указывалось, при увеличении толщины пластинки должно наступить разветвление слоев. Это приводит, в свою очередь, к изменению зависимости периода структуры a от l; в предельном случае многократного разветвления $a \propto l^{2/3}$. Фактические численные соотношения показывают, однако, что разветвление должно начаться сравнительно поздно [1]).

[1]) Расчет модели с многократным разветвлением слоев — см. *Ландау Л.Д.* // ЖЭТФ. 1943. Т. 13. С. 377 (Собрание трудов, статья 47, «Наука», 1969).

ГЛАВА VII

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 58. Уравнения квазистационарного поля

До сих пор мы рассматривали постоянные электрические и магнитные поля, а уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{58.1}$$

применялось (в § 31) лишь со вспомогательной целью при выводе выражения для энергии магнитного поля.

Характер переменных электромагнитных полей в материальных средах существенно зависит от рода этих сред и от порядка величины частоты поля. В этом параграфе мы рассмотрим явления, происходящие в массивных проводниках, помещенных во внешнее переменное магнитное поле. Мы будем предполагать при этом, что скорость изменения поля не слишком велика, будучи ограничена рядом условий, сформулированных ниже. Электромагнитные поля и токи, удовлетворяющие этим условиям, называют *квазистационарными.*

Прежде всего, будем считать, что длина волны $\lambda \sim c/\omega$, соответствующая (в пустоте или диэлектрической среде, окружающей проводник) частоте поля ω, велика по сравнению с размерами тела l:

$$\omega \ll \frac{c}{l}.$$

Тогда распределение магнитного поля вне проводника в каждый момент времени можно описывать уравнениями статического поля

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \tag{58.2}$$

пренебрегая всеми эффектами, связанными с конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений. Разумеется, такое пренебрежение возможно лишь на не слишком больших (малых по сравнению с λ) расстояниях от тела (что во всяком случае достаточно для целей определения поля внутри него).

Полная же система уравнений поля внутри проводника складывается из уравнения (58.1) и уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{58.3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \tag{58.4}$$

(в электрически анизотропном — не кубическом — кристалле надо писать $j_i = \sigma_{ik}E_k$). Второе из этих уравнений было выведено, строго говоря, для постоянных токов и магнитных полей. Поэтому необходимо указать критерий, позволяющий с достаточной точностью использовать это уравнение для переменных полей. В уравнении (58.4) существенно, что связь тока с напряженностью электрического поля дается соотношением $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ с постоянным значением σ, относящимся к стационарному случаю. Это имеет место, если период изменения поля велик по сравнению с временами, характерными для микроскопического механизма проводимости. Другими словами, частота поля должна быть мала по сравнению с обратным временем свободного пробега электронов в проводнике. Для типичных металлов (при комнатной температуре) предельные допускаемые этим условием частоты лежат в инфракрасной области спектра[1]).

Кроме того, однако, есть и другое условие, ограничивающее в данном случае применимость уравнений. Уравнение (58.4) подразумевает, что связь между током и полем является *локальной*, т. е. что плотность тока в некоторой точке проводника определяется значением поля только в этой точке. Это, в свою очередь, предполагает малость длин свободного пробега электронов по сравнению с расстояниями, на которых заметно меняется поле. К этому условию мы вернемся в § 59.

В уравнениях (58.1) и (58.4) $\mathbf{E}$ есть напряженность индукционного электрического поля, возникающего благодаря переменности магнитного поля. По известному $\mathbf{H}$ поле $\mathbf{E}$ определяется непосредственно уравнением (58.4). Уравнение же для $\mathbf{H}$ получается путем исключения $\mathbf{E}$ из (58.1) и (58.4):

$$\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{\sigma}. \tag{58.5}$$

[1]) Для плохих проводников (например, полупроводников) применимость уравнения (58.4) требует соблюдения еще одного условия, которое может оказаться даже более сильным. У таких тел может иметь смысл одновременное введение проводимости и диэлектрической проницаемости. Тогда в правой части уравнения (58.4) добавляется член $-\dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ и условие его малости по сравнению с $4\pi\sigma\mathbf{E}/c$ гласит: $\sigma/\omega \gg \varepsilon$. У хороших же проводников — металлов — фактически $\sigma/\omega \gg 1$ во всей области частот, для которых еще можно говорить о постоянной проводимости (см. также примеч. на с. 298).

В однородной среде с постоянными проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ множитель $1/\sigma$ можно вынести из-под знака rot, а согласно (58.3) имеем $\operatorname{div}\mathbf{B} = \mu \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$. Поэтому $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H}$, и мы получаем уравнение

$$\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{58.6}$$

Вместе с уравнением $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ оно составляет полную систему, достаточную для определения магнитного поля. Отметим, что уравнение (58.6) имеет вид уравнения теплопроводности, причем роль «коэффициента температуропроводности» χ играет $c^2/(4\pi\sigma\boldsymbol{\mu})$.

Граничные условия для магнитного поля на поверхности проводника очевидны из вида самих уравнений:

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}. \tag{58.7}$$

Выражение в правой части уравнения (58.4) не влияет на второе из этих условий в силу своей ограниченности. При $\mu = 1$ можно написать [1])

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2. \tag{58.8}$$

В силу уравнения (58.4) имеем $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$; граничное условие к последнему уравнению: $j_n = 0$ на поверхности проводника. В электрически изотропном проводнике отсюда следует (в силу $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$), что на границе и $E_n^{(i)} = 0$, где индекс (i) отличает поле внутри проводника (в общем же случае анизотропного проводника нормальная компонента поля в нем на границе, вообще говоря, отлична от нуля).

Граничное условие (58.8) недостаточно для полной формулировки задачи, если проводник представляет собой составное тело, состоящее из участков с различными проводимостями. На границах раздела этих участков наряду с непрерывностью $\mathbf{H}$ необходимо учесть также и условие непрерывности $\mathbf{E}_t$; для магнитного поля это условие означает, что

$$\frac{(\operatorname{rot}\mathbf{H})_{t1}}{\sigma_1} = \frac{(\operatorname{rot}\mathbf{H})_{t2}}{\sigma_2}. \tag{58.9}$$

---

[1]) Для обычных диа- и парамагнитных тел μ очень близко к 1 и учет μ в следующих ниже формулах был бы не имеющим смысла превышением точности. Заметно отличные от 1 значения μ могут существовать у ферромагнитных металлов, магнитные свойства которых (в достаточно слабых полях) можно описывать с помощью большой постоянной проницаемости. У этих веществ, однако, уже сравнительно рано наступает дисперсия μ (появление зависимости ее от частоты ω), сопровождающаяся уменьшением μ практически до 1. Имея в виду эти обстоятельства, ниже в этой главе мы полагаем $\mu = 1$.

Предположим, что проводник помещен в магнитное поле, источники которого в некоторый момент времени выключаются. Поле в проводнике (и вокруг него) не исчезнет при этом мгновенно, а ход его затухания со временем определяется уравнением (58.6). Для решения такого рода задач надо, следуя общим методам математической физики, поступить следующим образом. Ищем решения уравнения (58.6), имеющие вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m(x, y, z)e^{-\gamma_m t}$$

с постоянными γ_m. Для функций $\mathbf{H}_m(x, y, z)$ получим уравнения

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}_m = -\gamma_m\mathbf{H}_m. \tag{58.10}$$

При заданной форме проводника эти уравнения имеют отличные от нуля решения (удовлетворяющие необходимым граничным условиям) лишь при определенных γ_m, составляющих набор его собственных значений. Все эти значения вещественны и положительны [1]), а соответствующие им функции $\mathbf{H}_m(x, y, z)$ составляют полную систему взаимно ортогональных векторных функций. Пусть распределение поля в начальный момент времени дается функцией $\mathbf{H}_0(x, y, z)$. Разлагая ее по системе функций $\mathbf{H}_m$,

$$\mathbf{H}_0(x, y, z) = \sum_m c_m\mathbf{H}_m(x, y, z),$$

мы получим решение поставленной задачи о затухании поля в виде

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \sum_m c_m e^{-\gamma_m t}\mathbf{H}_m(x, y, z). \tag{58.11}$$

Скорость затухания поля определяется в основном тем членом этой суммы, который соответствует наименьшему из γ_m; пусть это будет γ_1. Время затухания поля можно определить как $\tau = 1/\gamma_1$. Порядок величины этого времени очевиден из самого уравнения (58.10). Поскольку $\Delta\mathbf{H} \sim \mathbf{H}/l^2$ (где l — размеры проводника), то

$$\tau \sim 4\pi\sigma l^2/c^2. \tag{58.12}$$

---

[1]) В этом легко убедиться следующим образом. Для того чтобы избежать необходимости учитывать граничные условия на поверхности тела, исходим из уравнения (58.5), в котором можно представить себе, что σ обращается в нуль вне тела непрерывным образом. Умножив уравнение

$$-\frac{4\pi}{c^2}\gamma_m\mathbf{H}_m = -\operatorname{rot}\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}_m}{\sigma}$$

с обеих сторон на $\mathbf{H}_m^*$ и проинтегрировав по всему пространству, получим

$$\frac{4\pi}{c^2}\gamma_m\int|\mathbf{H}_m|^2\,dV = \int\mathbf{H}_m^*\operatorname{rot}\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}_m}{\sigma}\,dV = \int\frac{1}{\sigma}|\operatorname{rot}\mathbf{H}_m|^2\,dV,$$

откуда вещественность и положительность γ_m очевидны.

§ 59. Глубина проникновения магнитного поля в проводник

Рассмотрим проводник, помещенный во внешнее переменное магнитное поле с заданной частотой ω. Магнитное поле, проникая внутрь проводника, индуцирует в нем переменное электрическое поле, а последнее в свою очередь вызывает появление токов (так называемые *токи Фуко*). Общее представление о характере проникновения поля в проводник можно получить, уже исходя из указанной выше аналогии между уравнением (58.6) и уравнением теплопроводности. Из теории теплопроводности известно, что величина, удовлетворяющая такому уравнению, за интервал времени t распространяется в пространстве на расстояние порядка $\sqrt{\chi t}$. Поэтому мы сразу можем прийти к заключению, что магнитное поле проникает в глубь проводника на расстояние δ порядка величины

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{\sigma\omega}}.$$

То же самое относится, конечно, и к индуцируемым им электрическому полю и токам.

В переменном поле с частотой ω зависимость всех величин от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$. Уравнение (58.6) принимает при этом вид

$$\Delta\mathbf{H} = -\frac{4\pi i\sigma\omega}{c^2}\mathbf{H}. \tag{59.1}$$

Рассмотрим два предельных случая. Если *глубина проникновения* δ велика по сравнению с размерами тела (малые частоты), то в первом приближении можно заменить правую часть уравнения (59.1) нулем. Тогда распределение магнитного поля в каждый момент времени будет таким, каким оно было бы в стационарном случае при заданном значении внешнего поля вдали от тела. Обозначим это решение как $\mathbf{H}_{\text{ст}}$; оно не зависит от частоты (точнее, содержит ее лишь во временном множителе $e^{-i\omega t}$). Индуцированное же электрическое поле появляется лишь в следующем приближении по ω, так как в стационарном случае оно вообще отсутствовало бы. Этому соответствует тот факт, что, вычисляя $\mathbf{E}$ по $\mathbf{H}_{\text{ст}}$ согласно уравнению (58.4), мы получили бы нуль, так как $\operatorname{rot}\mathbf{H}_{\text{ст}} = 0$. Поэтому для вычисления $\mathbf{E}$ надо обратиться к уравнению (58.1), согласно которому

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}_{\text{ст}}. \tag{59.2}$$

Это уравнение вместе с уравнением $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ (следующим из (58.4) при постоянной вдоль тела σ) полностью определяет распределение электрического поля. Отметим, что оно оказывается пропорциональным частоте ω.

Обратимся к обратному предельному случаю $\delta \ll l$ (большие частоты). Условие локальности уравнений поля, о котором упоминалось в § 58, требует, чтобы δ было все же велико по сравнению с длиной свободного пробега электронов проводимости [1]).

При $\delta \ll l$ магнитное поле проникает лишь в тонкий поверхностный слой проводника. Для вычисления поля вне проводника можно пренебречь толщиной этого слоя, т. е. считать, что внутрь тела магнитное поле вообще не проникает. В этом смысле проводник в высокочастотном магнитном поле ведет себя так же, как сверхпроводник в постоянном поле, и для вычисления поля вне его надо решить соответствующую стационарную задачу для сверхпроводника той же формы.

Исследование истинного распределения поля в поверхностном слое проводника можно произвести в общем виде, рассматривая небольшие участки поверхности как плоские. Речь идет тогда о решении уравнения (59.1) для проводящей среды, ограниченной плоской поверхностью, вне которой поле имеет заданное значение, которое обозначим как $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$. Этот вектор получается указанным выше образом в результате решения внешней задачи и параллелен поверхности проводника. В силу граничного условия (58.8) магнитное поле в проводнике у его поверхности равно тому же $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$.

Выберем поверхность проводника в качестве плоскости xy, причем проводящая среда заполняет полупространство $z > 0$. Ввиду однородности условий задачи по направлениям x и y искомое поле $\mathbf{H}$ зависит только от координаты z (и времени). Поэтому имеем $\operatorname{div} \mathbf{H} = \partial H_z / \partial z = 0$, и так как на границе $H_z = 0$, то и везде $H_z = 0$. Согласно (59.1) имеем для $\mathbf{H}$ уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{H} = 0,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} i} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}(1+i).$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль вдали от поверхности ($z \to \infty$), пропорционально e^{ikz}.

Учитывая также граничное условие при $z = 0$, получим

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp\left(-\tfrac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\tfrac{z}{\delta} - \omega t\right)\right], \qquad (59.3)$$

[1]) В металлах фактически именно это условие нарушается (при увеличении частоты) первым. Условие же $\omega \ll 1/\tau$, где τ — время свободного пробега, может оказаться более сильным для полупроводников с небольшой проводимостью.

где глубина проникновения δ определяется как

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \quad k = \frac{1+i}{\delta}. \tag{59.4}$$

Электрическое же поле определится теперь с помощью уравнения (58.4). Введя единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении оси z, получим

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}(1-i)[\mathbf{Hn}]. \tag{59.5}$$

Отметим, что $E \sim (\delta/\lambda)H$.

Если поле $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$ линейно поляризовано, то надлежащим выбором начала отсчета времени можно добиться вещественности $\mathbf{H}_0$. Выберем тогда направление этого вектора в качестве направления оси y. Отделив в (59.4) и (59.5) вещественную часть, получим

$$\begin{gathered} H_y = H = H_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right), \\ E_x = E = H_0 \sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}} e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right). \end{gathered} \tag{59.6}$$

Вместе с электрическим полем по такому же закону будет распределена плотность токов Фуко $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$.

Соотношение (59.5) в рассмотренном случае справедливо для поля во всем полупространстве $z > 0$. В более общих случаях соотношение вида

$$\mathbf{E}_t = \zeta[\mathbf{H}_t\mathbf{n}] \tag{59.7}$$

справедливо, вообще говоря, лишь на самой поверхности проводника для тангенциальных к ней составляющих полей (поскольку эти составляющие непрерывны на поверхности, то соотношение (59.7) относится к полю по обе стороны поверхности). Коэффициент ζ называют *поверхностным импедансом* проводника (к более общим аспектам этого понятия мы вернемся в § 87)[1]. В данном случае

$$\zeta = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}(1-i). \tag{59.8}$$

Возникновение токов Фуко сопровождается диссипацией энергии поля, выделяющейся в виде джоулева тепла. Средняя

[1]) В электрически анизотропных средах поверхностный импеданс является двумерным тензором:

$$E_{t\alpha} = \zeta_{\alpha\beta}[\mathbf{H}_t\mathbf{n}]_\beta \tag{59.7a}$$

(α, β — тензорные индексы в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{n}$). Отметим, что на этот тензор могут оказывать влияние тепловые потоки, возникающие в силу термоэлектрического эффекта (см. задачу 4).

(по времени) энергия Q, диссипируемая в проводнике в 1 с, равна

$$Q = \int \overline{\mathbf{jE}}\, dV = \int \sigma \overline{\mathbf{E}^2}\, dV.$$

Ее можно вычислить и как среднее количество энергии поля, втекающей в 1 с извне внутрь проводника, т. е. как интеграл

$$Q = \oint \overline{\mathbf{S}}\, d\mathbf{f} = \frac{c}{4\pi} \int \overline{[\mathbf{EH}]}\, d\mathbf{f}, \tag{59.9}$$

взятый по поверхности проводника [1]).

Мы видели выше, что в предельном случае $\delta \gg l$ амплитуда магнитного поля внутри проводника не зависит от частоты, а амплитуда электрического поля пропорциональна ω. Поэтому диссипация энергии Q при малых частотах пропорциональна ω^2.

В случае же $\delta \ll l$ магнитное и электрическое поля на поверхности проводника даются формулами (59.3) и (59.5) с $z = 0$. Вектор Пойнтинга нормален к поверхности, а его среднее значение

$$S = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} |\mathbf{H}_0|^2,$$

причем изменение $\mathbf{H}_0$ вдоль поверхности определяется указанным выше образом решением задачи о поле вне сверхпроводника той же формы. Диссипация энергии

$$Q = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \oint |\mathbf{H}_0|^2\, df. \tag{59.10}$$

Отметим, что при больших частотах она оказывается пропорциональной $\sqrt{\omega}$.

Диссипация энергии может быть выражена и через полный магнитный момент $\mathscr{M}$, приобретаемый проводником в магнит-

---

[1]) Если какие-либо две величины $a(t)$ и $b(t)$ пишутся в комплексном виде (пропорциональном $e^{-i\omega t}$), то при образовании их произведения надо, разумеется, сначала отделить вещественную часть. Но если нас интересует только среднее (по времени) значение этого произведения, то его можно вычислить как

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{ab^*\}.$$

Действительно, члены, содержащие множители $e^{\pm 2i\omega t}$, при усреднении обращаются в нуль, и потому имеет место равенство

$$\frac{1}{4}\overline{(a+a^*)(b+b^*)} = \frac{1}{4}(ab^* + a^*b).$$

В частности, $\overline{\mathbf{S}}$ можно вычислить как вещественную часть «комплексного вектора Пойнтинга» согласно

$$\overline{\mathbf{S}} = \operatorname{Re}\left\{\frac{c}{4\pi}\frac{1}{2}[\mathbf{EH}^*]\right\}. \tag{59.9a}$$

ном поле. В периодическом поле магнитный момент тоже есть периодическая функция времени с той же частотой. Согласно формуле (32.4) изменение свободной энергии тела со временем дается производной

$$-\mathscr{M}\frac{d\mathfrak{H}}{dt},$$

$\mathfrak{H}$ — внешнее однородное поле, в которое помещен проводник.

Это выражение не дает еще непосредственно искомую диссипацию, так как энергия тела изменяется не только благодаря диссипации, но и благодаря периодическому ее мигрированию между телом и окружающим полем. Если же произвести усреднение по времени, то последняя часть исчезнет и, таким образом, средняя диссипация энергии в единицу времени

$$Q = -\overline{\mathscr{M}\frac{d\mathfrak{H}}{dt}}. \tag{59.11}$$

Если $\mathscr{M}$ и $\mathfrak{H}$ выражены в комплексном виде, то $\mathfrak{H} = -i\omega\mathfrak{H}$ и Q можно вычислять как

$$Q = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{i\omega\mathscr{M}\mathfrak{H}^*\} = \frac{\omega}{2}\operatorname{Im}\{\mathscr{M}\mathfrak{H}^*\}. \tag{59.12}$$

Компоненты магнитного момента $\mathscr{M}$ являются линейными функциями внешнего поля:

$$\mathscr{M}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_k, \tag{59.13}$$

где безразмерные коэффициенты $\alpha_{ik}(\omega)$ зависят от формы тела и его ориентации во внешнем поле (но не от его объема V); $\mathscr{M}$ и $\mathfrak{H}$ в этой формуле предполагаются написанными в комплексном виде, так что и величины α_{ik}, вообще говоря, комплексны. Тензор $V\alpha_{ik}$ можно назвать тензором магнитной поляризуемости тела как целого. Этот тензор относится к категории величин, известных как обобщенные восприимчивости, и обладает всеми их свойствами. В частности, он симметричен (см. V, § 125):

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \tag{59.14}$$

Воспользовавшись этим свойством, можно написать

$$\mathscr{M}\mathfrak{H}^* = V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k^* = \frac{V}{2}\alpha_{ik}(\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k + \mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*) = V\alpha_{ik}\operatorname{Re}\{\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*\}.$$

Если, кроме того, написать комплексные величины α_{ik} в виде

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} + i\alpha''_{ik},$$

то для диссипации энергии (59.12) получим

$$Q = \frac{V}{2}\omega\alpha''_{ik}\operatorname{Re}\{\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*\}. \tag{59.15}$$

Таким образом, диссипация энергии определяется мнимой частью магнитной поляризуемости тела. Мы видели выше, что при малых частотах Q пропорциональна ω^2, а при больших $\sqrt{\omega}$. Отсюда следует, что величины α''_{ik} в этих двух предельных случаях пропорциональны соответственно ω и $\omega^{-1/2}$. Убывая как при $\omega \to 0$, так и при $\omega \to \infty$, они проходят в промежуточной области через максимум.

Магнитный момент проводника в переменном магнитном поле создается в основном возникающими в теле токами проводимости; он отличен от нуля даже при $\mu = 1$, когда статический момент обращается в нуль. Последний должен получаться из $\mathscr{M}(\omega)$ в пределе при $\omega \to 0$. Отсюда следует, что вещественная часть магнитной поляризуемости α'_{ik} стремится при $\omega \to 0$ к постоянному значению (к нулю при $\mu = 1$), соответствующему намагничению в постоянном поле. В пределе же $\omega \to \infty$, когда магнитное поле не проникает внутрь тела, величины α'_{ik} стремятся к другому постоянному пределу, соответствующему статическому намагничению сверхпроводника той же формы.

Задачи

1. Определить магнитную поляризуемость изотропного проводящего шара радиуса a в однородном периодическом внешнем поле.

Решение. Поле $\mathbf{H}^{(i)}$ внутри шара удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\mathbf{H}^{(i)} + k^2\mathbf{H}^{(i)} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H}^{(i)} = 0, \quad k = \frac{1+i}{\delta}.$$

Ищем его в виде $\mathbf{H}^{(i)} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, причем $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению $\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$; поскольку $\mathbf{H}$ — аксиальный вектор, $\mathbf{A}$ — полярный. Ввиду симметрии шара единственным постоянным вектором, от которого может зависеть искомое решение, является напряженность внешнего поля $\mathfrak{H}$. Обозначим через f сферически симметричное решение скалярного уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$:

$$f = \frac{\sin kr}{r}.$$

Тогда полярный вектор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий векторному уравнению $\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$ и зависящий линейно от аксиального постоянного вектора $\mathfrak{H}$, можно написать в виде

$$\mathbf{A} = \beta\operatorname{rot}(f\mathfrak{H})$$

(β — постоянная). Таким образом, ищем $\mathbf{H}^{(i)}$ в виде

$$\mathbf{H}^{(i)} = \beta\operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\mathfrak{H}) = \beta\left(\frac{f'}{r} + k^2 f\right)\mathfrak{H} - \beta\left(\frac{3f'}{r} + k^2 f\right)\mathbf{n}(\mathfrak{H}\mathbf{n}),$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$ (вторая производная f'' исключена с помощью уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$).

Поле $\mathbf{H}^{(e)}$ вне шара удовлетворяет уравнениям $\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(e)} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{H}^{(e)} = 0$. Ищем его в виде $\mathbf{H}^{(e)} = -\operatorname{grad}\varphi + \mathfrak{H}$, причем φ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$, а на бесконечности обращается в нуль. Такая функция φ, зависящая

линейно от постоянного вектора $\mathfrak{H}$, имеет вид

$$\varphi = -\alpha V \mathfrak{H} \nabla \frac{1}{r}$$

$(V = 4\pi a^3/3)$. Таким образом, ищем $\mathbf{H}^{(e)}$ в виде

$$\mathbf{H}^{(e)} = V\alpha \nabla \left(\mathfrak{H} \nabla \frac{1}{r} \right) + \mathfrak{H} = \frac{V\alpha}{r^3}[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}] + \mathfrak{H}.$$

Очевидно, что $\alpha V \mathfrak{H}$ есть магнитный момент шара, так что $V\alpha$ — его магнитная поляризуемость (в силу симметрии шара тензор α_{ik} сводится к скаляру: $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$).

На поверхности шара ($r = a$) непрерывны все компоненты $\mathbf{H}$. Приравняв отдельно компоненты, параллельные и перпендикулярные к $\mathbf{n}$, получим два уравнения для определения α и β. Для интересующей нас поляризуемости (отнесенной к единице объема) получаем

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'' = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3}{a^2k^2} + \frac{3}{ak} \operatorname{ctg} ak \right],$$

$$\alpha' = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3\delta}{2a} \frac{\operatorname{sh}(2a/\delta) - \sin(2a/\delta)}{\operatorname{ch}(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)} \right],$$

$$\alpha'' = -\frac{9\delta^2}{16\pi a^2} \left[1 - \frac{a}{\delta} \frac{\operatorname{sh}(2a/\delta) + \sin(2a/\delta)}{\operatorname{ch}(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)} \right].$$

В предельном случае малых частот ($\delta \gg a$)

$$\alpha' = -\frac{1}{105\pi} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 = -\frac{4\pi a^4 \sigma^2 \omega^2}{105 c^4},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{20\pi} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 = \frac{a^2 \sigma\omega}{10c^2}.$$

Для больших же частот ($\delta \ll a$)

$$\alpha' = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3\delta}{2a} \right] = -\frac{3}{8\pi} \left[1 - \frac{3c}{2a\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \right],$$

$$\alpha'' = \frac{9\delta}{16\pi a} = \frac{9c}{16\pi a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}.$$

Предельное значение $V\alpha' = -a^3/2$ соответствует магнитному моменту сверхпроводящего шара, а значение α'' можно было бы найти с помощью формулы (59.10), воспользовавшись формулой (54.3) для поля у поверхности сверхпроводящего шара.

Напомним, что внешнее поле предполагается записанным в комплексном виде $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{-i\omega t}$, с произвольным постоянным комплексным вектором $\mathfrak{H}_0$. Тем самым в рассмотрение включены как «линейно поляризованное» переменное поле с постоянным направлением, так и эллиптически или циркулярно поляризованные поля, вращающиеся в некоторой плоскости.

2. То же для проводящего цилиндра (радиуса a) в однородном периодическом магнитном поле, перпендикулярном к его оси.

Р е ш е н и е. Задача является «двумерным аналогом» задачи 1; ниже все векторные операции являются двумерными операциями в плоскости,

перпендикулярной к оси цилиндра, а $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор в этой плоскости. Поле внутри цилиндра ищем в виде

$$\mathbf{H}^{(i)} = \beta \operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\mathfrak{H}) = \beta\left(\frac{f'}{r} + k^2 f\right)\mathfrak{H} - \beta\left(\frac{2f'}{r} + k^2 f\right)\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathfrak{H}),$$

где $f = J_0(kr)$ — симметричное решение двумерного уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$, конечное при $r = 0$. Поле же вне цилиндра ищем как

$$\mathbf{H}^{(e)} = -2\alpha V\nabla(\mathfrak{H}\nabla\ln r) + \mathfrak{H} = \frac{2\alpha V}{r^2}[2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}] + \mathfrak{H}$$

$(V = \pi a^3)$. Магнитный момент единицы длины цилиндра есть $V\alpha\mathfrak{H}$ (см. задачу 2 § 3). Из условия $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)}$ при $r = a$, как и в задаче 1, получаем

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi}\left[1 - \frac{2}{ak}\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right]$$

(использовано соотношение $J_0'(kr) = -kJ_1(kr)$).

При $\delta \gg a$, разлагая функции Бесселя по степеням ka, получим

$$\alpha' = -\frac{1}{24\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = -\frac{\pi a^4\sigma^2\omega^2}{6c^4},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 = \frac{a^2\sigma\omega}{4c^2}.$$

При $\delta \ll a$ используем асимптотические выражения функций Бесселя и находим

$$\alpha' = -\frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{\delta}{a}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{c}{a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\right),$$

$$\alpha'' = \frac{\delta}{2\pi a} = \frac{c}{2\pi a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}.$$

3. То же для цилиндра в магнитном поле, параллельном его оси.

Р е ш е н и е. Магнитное поле параллельно оси цилиндра во всем пространстве. Вне цилиндра $\mathbf{H}^{(e)} = \mathfrak{H}$, а внутри $\mathbf{H}^{(i)} = f\mathfrak{H}$, где f — симметричное решение двумерного уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$, обращающееся в 1 при $r = a$:

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathfrak{H}\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}.$$

Токи Фуко в цилиндре циркулярны (т. е. $\mathbf{j}$ имеет в цилиндрических координатах только компоненту $j_\varphi = j$) и определяются по полю $H_z = H$ согласно

$$\frac{4\pi j}{c} = -\frac{\partial H}{\partial r}.$$

Магнитный момент единицы длины цилиндра $\mathcal{M} = \pi a^2\alpha\mathfrak{H}$, создаваемый токами проводимости, направлен вдоль его оси и равен

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c}\int jr\,dV = -\frac{1}{4}\int\frac{\partial H}{\partial r}r^2\,dr.$$

Вычислив интеграл, получим

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi}\left[1 - \frac{2}{ka}\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right].$$

Таким образом, продольная поляризуемость цилиндра в два раза меньше поперечной поляризуемости, найденной в задаче 2.

4. Определить наименьший из коэффициентов затухания магнитного поля в проводящем шаре.

Решение. Среди решений уравнений (58.10) для шара имеются функции различной симметрии. Наиболее симметричным было бы решение, определяющееся заданием произвольного постоянного скаляра. Оно, однако, не может существовать по следующей причине. Такое решение было бы сферически-симметричным: $H = H_r(r)$, и в силу уравнения

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH) = 0$$

(которое справедливо как вне, так и внутри шара) было бы $H = \mathrm{const}/r$. Но эта функция не удовлетворяет условию конечности в центре шара.

Наименьшему значению γ соответствует одно из решений, определяющихся заданием произвольного постоянного вектора. Вид этих решений совпадает, очевидно, с найденным в задаче 1, с той лишь разницей, что в поле $\mathbf{H}^{(e)}$ надо опустить постоянный член, так как на бесконечности должно быть $\mathbf{H} = 0$. При этом k есть теперь вещественная величина ($k^2 = 4\pi\sigma\gamma/c^2$), а вектор $\mathbf{H}$ играет роль произвольного постоянного вектора. Из граничного условия $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)}$ при $r = a$ получаем два уравнения, исключая из которых α и β, найдем $\sin ka = 0$. Наименьший отличный от нуля корень этого уравнения есть $ka = \pi$, так что наименьшее значение γ есть

$$\gamma_1 = \frac{\pi c^2}{4\sigma a^2}.$$

5. Плоская поверхность одноосного металлического кристалла вырезана таким образом, что нормаль к ней образует угол θ с главной осью симметрии кристалла. Определить поверхностный импеданс с учетом термоэлектрического эффекта (*М.И. Каганов*, *В.М. Цукерник*, 1958).

Решение. Выбираем поверхность кристалла в качестве плоскости xy, ось z — внутренняя нормаль к поверхности, и пусть главная ось симметрии кристалла расположена в плоскости xz под углом θ к оси z. Магнитное поле у поверхности кристалла пусть направлено вдоль оси y: $H_y = H_0 e^{-i\omega t}$; тогда и везде внутри металла оно направлено так же. Учитывая, что все величины зависят только от координаты z (и от времени как $e^{-i\omega t}$), находим, что уравнения Максвелла (58.1), (58.4) принимают вид

$$-H_y' = \frac{4\pi}{c}j_x, \quad j_y = j_z = 0, \quad E_x' = \frac{i\omega}{c}H_y, \tag{1}$$

а также $E_y' = 0$, откуда $E_y = 0$ (штрих означает дифференцирование по z). Для учета термоэлектрического эффекта сюда надо добавить уравнение теплопроводности $C\,\partial T/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{q} = 0$ или

$$-i\omega C\tau + q_z' = 0, \tag{2}$$

где τ — переменная добавка к средней температуре ($T = \overline{T} + \tau$), C — теплоемкость единицы объема металла, $\mathbf{q}$ — плотность теплового потока; $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}$ связаны с полем $\mathbf{E}$ и градиентом температуры соотношениями (26.12).

Тензоры $\rho_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}$ и $\varkappa_{ik}$ симметричны; будем считать, что симметрия кристалла такова, что и тензор α_{ik} симметричен. При сделанном выборе

осей x, y, z имеем

$$\rho_{xx} = \rho_\parallel \sin^2\theta + \rho_\perp \cos^2\theta, \quad \rho_{yy} = \rho_\perp, \quad \rho_{zz} = \rho_\parallel \cos^2\theta + \rho_\perp \sin^2\theta,$$
$$\rho_{xy} = \rho_{yz} = 0, \quad \rho_{xz} = (\rho_\parallel - \rho_\perp)\sin\theta\cos\theta,$$

где $\rho_\parallel$, $\rho_\perp$ — главные значения тензора ρ_{ik} вдоль оси кристалла и в перпендикулярной к ней плоскости; аналогичные формулы имеют место для тензоров $\varkappa_{ik}$, α_{ik}. С этими тензорами имеем из (26.12)

$$E_x = \rho_{xx} j_x + \alpha_{xz}\tau', \quad q_z = T\alpha_{zx} j_x - \varkappa_{zz}\tau', \tag{3}$$
$$E_z = \rho_{zx} j_x + \alpha_{zz}\tau'. \tag{4}$$

Исключив H_y из уравнений (1)–(3), получим

$$E_x'' + k^2(E_x + E_T) = 0,$$
$$(1+a)E_T'' + k^2[(b-a)E_T - aE_x] = 0,$$

где введено обозначение $E_T = -\alpha_{xz}\tau'$ и параметры

$$k^2 = \frac{4\pi i\omega}{c^2\rho_{xx}}, \quad a = \frac{T\alpha_{xz}^2}{\rho_{xx}\varkappa_{zz}}, \quad b = \frac{c^2 C\rho_{xx}}{4\pi\varkappa_{zz}}.$$

Решение этой системы двух уравнений для полупространства ($z > 0$), занятого металлом:

$$E_x = Ae^{ik_1 z} + Be^{ik_2 z},$$
$$E_T = -\left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right)Ae^{ik_1 z} - \left(1 - \frac{k_2^2}{k^2}\right)Be^{ik_2 z},$$

где

$$k_{1,2} = k\left[\frac{1 + b \pm \sqrt{(1-b)^2 - 4ab}}{2(1+a)}\right]^{1/2},$$

причем мнимые части k_1 и k_2 должны быть положительными.

Связь между коэффициентами A и B устанавливается из граничных условий для температуры, а формула (4) определяет поле E_z в металле (напомним, что непрерывность нормальной компоненты поля $\mathbf{E}$ на поверхности проводника не требуется). Для поверхностного импеданса имеем, согласно определению (59.7а):

$$\zeta_{xx} = \left.\frac{E_x}{H_y}\right|_{z=0} = \frac{\omega}{c}\frac{A+B}{k_1 A + k_2 B}, \quad \zeta_{yx} = 0.$$

Приведем окончательные выражения импеданса в предположении $a \ll 1$ (как это фактически имеет место для обычных металлов) в двух случаях: при граничном условии $\tau = 0$ (изотермическая граница):

$$\zeta_{xx}^{(\text{изот})} = \zeta_0\left[1 + \frac{a}{2(1+\sqrt{b})^2}\right];$$

при граничном условии $q_z = 0$ (адиабатическая граница):

$$\zeta_{xx}^{(\text{ад})} = \zeta_0\left[1 + \frac{a + (1 + 2\sqrt{b})}{2(1+\sqrt{b})^2}\right],$$

причем $\zeta_0 = (\omega\rho_{yy}/8\pi)^{1/2}(1-i)$ — импеданс без учета термоэлектрического эффекта. Параметр a, а с ним и поправка в импедансе обращаются в нуль при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 0$, т. е. когда главная ось кристалла лежит в плоскости его поверхности или перпендикулярна к ней.

Если поле $\mathbf{H}$ направлено по оси x, то $E_x = 0$, $j_x = j_z = 0$ и градиент температуры не возникает. Поэтому $\zeta_{yy} = \zeta_0$.

§ 60. Скин-эффект

Рассмотрим распределение плотности тока по сечению проводника, в котором течет отличный от нуля полный переменный ток. На основании полученных в предыдущем параграфе результатов мы заранее можем ожидать, что при увеличении частоты ток будет в основном концентрироваться вблизи поверхности проводника. Это явление называют *скин-эффектом* [1]).

Точное решение задачи о скин-эффекте зависит, вообще говоря, не только от формы проводника, но и от способа возбуждения в нем тока, т. е. от характера внешнего переменного магнитного поля, индуцирующего ток. Есть, однако, важный случай, когда распределение тока можно считать не зависящим от способа его возбуждения. Это — ток в тонком проводе, толщина которого мала по сравнению с его длиной.

При вычислении распределения тока по сечению тонкого провода последний можно считать прямолинейным. При этом электрическое поле параллельно оси провода, а магнитный вектор $\mathbf{H}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси.

Рассмотрим провод кругового сечения. Этот случай особенно прост в связи с тем, что вид поля вне провода заранее ясен. Действительно, в силу симметрии на поверхности провода $\mathbf{E} = \mathrm{const}$ (в каждый данный момент времени). Но при таком граничном условии уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ в пространстве вне провода имеют решением лишь $\mathbf{E} = \mathrm{const}$ во всем пространстве. По аналогичным причинам и магнитное поле вокруг провода будет таким же, каким оно было бы вокруг провода с постоянным током, равным данному мгновенному значению переменного тока.

Внутри провода электрическое поле удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},$$

совпадающему с уравнением (58.6) для $\mathbf{H}$ (оно получается путем исключения $\mathbf{H}$ из уравнений (58.1) и (58.4) так же, как уравнение

[1]) В более общем смысле о скин-эффекте говорят во всех ситуациях, когда переменное электромагнитное поле (а с ним и вызываемые им токи) проникает лишь на относительно небольшую глубину в проводник.

(58.6) было получено путем исключения $\mathbf{E}$). В цилиндрической системе координат с осью z вдоль оси провода поле $\mathbf{E}$ имеет лишь z-компоненту и зависит только от координаты r; для периодического поля с частотой ω получаем уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)+k^2E=0,\quad k=\frac{\sqrt{2i}}{\delta}=\frac{1+i}{\delta},\tag{60.1}$$

где δ есть введенная в предыдущем параграфе глубина проникновения (59.4). Решение этого уравнения, остающееся конечным при $r=0$, есть

$$E=E_z=\mathrm{const}\cdot J_0(kr)e^{-i\omega t}\tag{60.2}$$

(J_0 — функция Бесселя). По такому же закону распределена плотность тока $j=\sigma E$.

Магнитное же поле $H_\varphi=H$ находим по электрическому согласно уравнению (58.1):

$$\frac{i\omega}{c}H_\varphi=(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_\varphi=-\frac{\partial E_z}{\partial r}.\tag{60.3}$$

Имея в виду, что $J_0'(u)=-J_1(u)$, получим

$$H=H_\varphi=-i\cdot\mathrm{const}\cdot\sqrt{\frac{4\pi\sigma i}{\omega}}J_1(kr)e^{-i\omega t}\tag{60.4}$$

с той же const, что и в (60.2). Эту постоянную легко определить из условия, что на поверхности провода должно быть $H=2I/ca$, где a — его радиус, а I — полный ток, протекающий по проводу.

В предельном случае малых частот ($a/\delta\ll1$) на всем протяжении сечения провода можно ограничиться первыми членами разложения функции Бесселя:

$$\begin{aligned}E_z&=\mathrm{const}\cdot\left[1-\frac{i}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\right]e^{-i\omega t},\\ H_\varphi&=\mathrm{const}\cdot\frac{2\pi\sigma}{c}r\left[1-\frac{i}{4}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2-\frac{1}{48}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\right]e^{-i\omega t}.\end{aligned}\tag{60.5}$$

Амплитуда E, а с нею и амплитуда плотности тока, возрастает при удалении от оси пропорционально $[1+(r/2\delta)^4]$.

В обратном предельном случае больших частот ($a/\delta\gg1$) на большей части сечения провода можно воспользоваться известной асимптотической формулой

$$J_0(u\sqrt{2i})\sim\frac{1}{\sqrt{u}}e^{(1-i)u},\tag{60.6}$$

применимой при больших значениях аргумента функции Бесселя. Сохраняя лишь наиболее быстро меняющийся экспоненци-

альный множитель, получим

$$E_z = \text{const} \cdot \exp\left[-\frac{a-r}{\delta} + i\left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t\right)\right],$$
$$H_\varphi = \text{const} \cdot (1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \exp\left[-\frac{a-r}{\delta} + i\left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t\right)\right]. \tag{60.7}$$

Эти формулы, естественно, совпадают с формулами (59.3)–(59.5), которые при сильном скин-эффекте применимы вблизи поверхности проводника любой формы.

В общем случае провода с некруговым сечением точный расчет скин-эффекта представляет значительно более сложную задачу, так как требует одновременного определения поля как внутри, так и снаружи провода. Лишь в предельном случае сильного скин-эффекта задача снова упрощается, поскольку поле вне провода может быть заранее определено как статическое поле вокруг сверхпроводника той же формы.

§ 61. Комплексное сопротивление

До тех пор, пока частота переменного тока достаточно мала, мгновенное значение силы тока $J(t)$ в линейном контуре определяется значением электродвижущей силы $\mathscr{E}(t)$ в тот же момент времени, согласно

$$\mathscr{E}(t) = RJ(t), \tag{61.1}$$

где R — сопротивление провода постоянному току.

Но при произвольных частотах нет никаких оснований ожидать существования прямой связи между значениями $\mathscr{E}$ и J в один и тот же момент времени. Можно лишь утверждать, что значение $J(t)$ должно зависеть линейным образом от значений $\mathscr{E}(t)$ во все предыдущие моменты времени. Запишем символически эту связь в виде $J = \widehat{Z}^{-1}\mathscr{E}$ или, для обратной связи,

$$\mathscr{E} = \widehat{Z}J, \tag{61.2}$$

где $\widehat{Z}$ — некоторый линейный оператор[1]). Если функции $J(t)$ и $\mathscr{E}(t)$ разложены в интегралы Фурье, то для каждой из их монохроматических компонент (зависящих от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$) результат действия оператора $\widehat{Z}$ сводится, в силу линейности последнего, к умножению на некоторую вели-

[1]) Мы не останавливаемся здесь на обсуждении общих свойств этого оператора, так как они вполне аналогичны свойствам оператора $\widehat{\varepsilon}$, которые будут подробно изложены в § 77, 82.

чину Z, зависящую от значения частоты:

$$\mathscr{E} = Z(\omega)J. \tag{61.3}$$

Функция $Z(\omega)$, вообще говоря, комплексна. Она называется *комплексным сопротивлением* или *импедансом* проводника.

Из сравнения (61.3) с (61.1) ясно, что обычное сопротивление R представляет собой нулевой член разложения функции $Z(\omega)$ по степеням ω. Для определения следующего члена надо учесть наряду с R также и самоиндукцию L проводника[1]).

Рассмотрим линейный контур, в котором действует переменная электродвижущая сила $\mathscr{E}(t)$. По определению последней работа, производимая в 1 с электрическим полем над движущимися в проводе зарядами, дается произведением $\mathscr{E}J$. Эта работа частично переходит в джоулево тепло, а частично затрачивается на изменение энергии магнитного поля тока. По определению R и L джоулево тепло, выделяющееся в проводе в 1 с, есть RJ^2, а магнитная энергия тока есть $LJ^2/2c^2$. Поэтому закон сохранения энергии выражается уравнением

$$\mathscr{E}J = RJ^2 + \frac{d}{dt}\frac{LJ^2}{2c^2} = RJ^2 + \frac{1}{c^2}LJ\frac{dJ}{dt}$$

или

$$\mathscr{E} = RJ + \frac{1}{c^2}L\frac{dJ}{dt}. \tag{61.4}$$

Оперируя с квадратичными выражениями ($\mathscr{E}J$, J^2), надо писать величины $\mathscr{E}$ и L в виде вещественных функций. Но после того как получено линейное уравнение (61.4), можно перейти к монохроматическим компонентам в комплексном представлении: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{-i\omega t}$, $J = J_0 e^{-i\omega t}$. Тогда уравнение (61.4) сводится к алгебраическому соотношению

$$\mathscr{E} = ZJ, \quad Z = R - \frac{i}{c^2}\omega L. \tag{61.5}$$

Отделив в соотношении $J = \mathscr{E}/Z$ вещественную часть, получим

$$J(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2/c^4}}\cos(\omega t - \varphi), \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{c^2 R}, \tag{61.6}$$

чем определяется амплитуда тока и сдвиг фаз между током и электродвижущей силой.

Вещественная часть выражения (61.5) совпадает с сопротивлением R, определяющим диссипацию энергии в контуре. Легко видеть, что и в общем случае произвольной зависимости $Z(\omega)$

[1]) Здесь и ниже мы понимаем под R и L величины, относящиеся к постоянному току.

имеется аналогичная связь между $\operatorname{Re} Z$ и диссипацией энергии (при заданной силе тока).

Усреднив по времени мощность $\mathscr{E}J$, потребляемую в контуре при протекании в нем периодического тока, мы найдем ту ее часть, которая систематически затрачивается на покрытие диссипативных потерь. Таким образом, отнесенная к 1 с диссипация энергии Q в контуре:

$$Q = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\mathscr{E}J^*\},$$

где $\mathscr{E}$ и J выражены в комплексном виде (ср. примеч. на с. 300). Подставив сюда $\mathscr{E} = ZJ$ и обозначив вещественную и мнимую части Z соответственно как Z' и Z'' [1]):

$$Z = Z' + iZ'', \tag{61.7}$$

получим

$$Q = \frac{1}{2}Z'|J|^2$$

или, с помощью вещественной функции $J(t)$:

$$Q = Z'(\omega)\overline{J^2}, \tag{61.8}$$

чем и устанавливается искомая связь.

Отметим, что поскольку Q — существенно положительная величина, то и Z' всегда положительно:

$$Z' > 0. \tag{61.9}$$

Вычислим $Z(\omega)$ для провода кругового сечения при произвольных (но, разумеется, удовлетворяющих условиям квазистационарности) частотах, т. е. не пренебрегая при этом скин-эффектом. Для этого снова воспользуемся законом сохранения энергии, представив его в другом виде.

Разобьем мощность $\mathscr{E}J$ ($\mathscr{E}$ и J — вещественные выражения) на два члена, из которых один представляет теперь изменение энергии магнитного поля вне провода, а другой — полную энергию, потребляемую внутри провода (как на изменение энергии поля в нем, так и на выделение тепла). Вторую часть можно вычислить как полный поток энергии, втекающий в 1 с внутрь проводника через его поверхность. Таким образом, получим

$$J\mathscr{E} = \frac{d}{dt}\frac{L_eJ^2}{2c^2} + \frac{cEH}{4\pi}2\pi al = \frac{L_e}{c^2}J\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2}cEHal,$$

где L_e — внешняя часть самоиндукции провода, E и H — напряженности электрического и магнитного поля на его поверхности, a — его радиус, l — длина. Поле H связано с током J соотношением $H = 2J/ca$. Поэтому, разделив написанное равенство на J,

[1]) Их называют иногда *активным* и *реактивным* сопротивлениями.

получим

$$\mathscr{E} = \frac{1}{c^2} L_e \frac{dJ}{dt} + El.$$

Это уравнение линейно, и потому можно перейти к комплексному представлению величин. Тогда

$$\mathscr{E} = ZJ = -\frac{i\omega}{c^2} L_e J + El,$$

откуда

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{lE}{J} = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{2El}{caH}. \tag{61.10}$$

При произвольных частотах сюда надо подставить E и H из (60.2) и (60.4):

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + R \frac{ak}{2} \frac{J_0(ak)}{J_1(ak)} \tag{61.11}$$

$(R = l/(\pi a^2 \sigma))$. При слабом скин-эффекте пользуемся разложениями (60.5); произведя вычисления с точностью до членов порядка $(a/\delta)^4$ и отделив вещественную часть, получим

$$Z' = R\left[1 + \frac{1}{48}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4\right] = R\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)^2\right]. \tag{61.11a}$$

В обратном случае сильного скин-эффекта с помощью выражений (60.7) получим

$$Z' = R\frac{a}{2\delta} = \frac{l}{ac}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}},$$
$$Z'' = -\frac{\omega}{c^2}\left[L_e + L_i \frac{2\delta}{a}\right] = -\frac{\omega}{c^2}\left[L_e + \frac{lc}{a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\right]. \tag{61.12}$$

Из (61.11a) видно, что можно полагать $Z' = R$ при $(\pi\sigma\omega a^2/c^2)^2 \ll 12$. В то же время

$$\frac{Z''}{Z'} = \frac{\omega L}{c^2 R} = \left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)^2 2\ln\frac{l}{a}$$

(L_e взято из (34.1)). Сравнив с предыдущим неравенством, мы видим, что область частот, в которой следует пользоваться выражением (61.5), не пренебрегая в нем самоиндукцией, зависит от отношения l/a и сравнительно узка.

На практике, однако, наиболее важен случай, когда основным носителем самоиндукции в цепи являются включенные в нее катушки, обладающие повышенной, по сравнению с растянутым проводом, самоиндукцией (см. § 34). В таких контурах область частот, в которой должна применяться формула (61.5) (т. е. уравнение (61.4) с постоянными R и L), достаточно широка.

Рассмотрим контур, находящийся во внешнем переменном магнитном поле $\mathbf{H}_e$, которое может иметь любое происхождение. Обозначим через $\mathbf{E}_e$ электрическое поле, которое индуцировалось бы переменным полем $\mathbf{H}_e$ в отсутствие проводников. Как $\mathbf{H}_e$, так и $\mathbf{E}_e$ очень слабо меняются на протяжении толщины тонкого провода (в противоположность собственному полю текущих по проводу токов). Поэтому можно рассматривать циркуляцию $\mathbf{E}_e$ по контуру тока, не уточняя, где именно внутри провода этот контур проведен. Эта циркуляция есть не что иное, как электродвижущая сила $\mathscr{E}$, индуцируемая в контуре переменным внешним магнитным полем. Согласно интегральной форме уравнения Максвелла имеем

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}_e\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}_e\, d\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt}, \tag{61.13}$$

где Φ_e — поток внешнего поля через рассматриваемый контур. Подставив это выражение в уравнение (61.4), получим

$$RJ + \frac{1}{c^2}L\frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt}.$$

Если перенести член с самоиндукцией в правую часть равенства, то это уравнение запишется в виде

$$RJ = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt} - \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{61.14}$$

где $\Phi = \Phi_e + LJ/c$ — полный магнитный поток, как от внешнего магнитного поля, так и от собственного поля тока. В таком виде это уравнение выражает собой закон Ома для цепи в целом, т. е. равенство между RJ и полной электродвижущей силой в цепи.

Формулировка уравнения (61.14), как выражающего собой закон Ома, позволяет обобщить его на случай, когда с течением времени меняется также и форма самого проводящего контура. При этом функцией времени будет и самоиндукция L и вместо (61.14) надо писать

$$RJ = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(LJ) - \frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt}. \tag{61.15}$$

При выводе же из закона сохранения энергии необходимо было бы учитывать еще работу, затрачиваемую на деформацию проводника.

Если имеется несколько расположенных вблизи друг от друга контуров с токами J_a, то для каждого из них роль Φ_e в уравнении (61.14) играет сумма магнитных потоков от других контуров (и от внешнего постороннего поля, если таковое имеется). Магнитный поток, создаваемый током J_b через контур тока J_a, есть $L_{ab}J_b/c$, где L_{ab} — коэффициент взаимной индукции обоих контуров. Поэтому получаем следующую систему уравнений для

переменного тока в контурах:

$$R_a J_a + \frac{1}{c}\sum_b L_{ab}\frac{dJ_b}{dt} = \mathscr{E}_a. \tag{61.16}$$

В сумму по b включен также и член с самоиндукцией ($b = a$), а $\mathscr{E}_a$ есть электродвижущая сила, создаваемая в a-м контуре источниками, посторонними по отношению к рассматриваемой системе токов.

Для периодических (монохроматических) токов система дифференциальных уравнений (61.16) сводится к системе алгебраических уравнений:

$$\sum_b Z_{ab} J_b = \mathscr{E}_a, \tag{61.17}$$

где величины

$$Z_{ab} = \delta_{ab} R_a - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab} \tag{61.18}$$

составляют *матрицу импеданса.* Подобно (61.5) выражения (61.18) представляют собой первые члены разложения функций $Z_{ab}(\omega)$ по степеням частоты.

Отметим, что в этом приближении отсутствует взаимное влияние контуров на вещественную часть импеданса. Такое влияние осуществляется тем, что магнитное поле переменного тока в одном проводнике создает токи Фуко (а с ними и дополнительную диссипацию энергии) в другом проводнике. Для линейных проводников этот эффект ничтожен. Он может, однако, стать заметным при наличии расположенных вблизи них массивных проводников.

Наконец, остановимся на вопросе о том, каким образом связаны полученные в этом параграфе уравнения переменных токов в линейных контурах с общими уравнениями переменного магнитного поля в произвольных проводниках. Проследим за этой связью на простейшем примере тока, возникающего в контуре при выключении действовавшей в нем до момента времени $t = 0$ постоянной электродвижущей силы $\mathscr{E}_0$. Из уравнения (61.4) имеем [1]):

$$\begin{aligned} J &= \frac{\mathscr{E}_0}{R} \quad &\text{при} \quad t < 0, \\ J &= \frac{\mathscr{E}_0}{R}\exp\left(-\frac{c^2 R}{L}t\right) \quad &\text{при} \quad t > 0. \end{aligned} \tag{61.19}$$

[1]) Строго говоря, эти формулы непригодны для очень малых значений t, когда в спектральном разложении функции существенны компоненты с большими частотами и потому нельзя пользоваться уравнением (61.4). Но за этот малый промежуток времени ток J успевает измениться лишь весьма незначительно, и поэтому формула (61.19) достаточно точно определяет величину тока в дальнейшие моменты времени.

Мы видим, что после выключения электродвижущей силы ток затухает со временем по экспоненциальному закону с декрементом

$$\gamma = \frac{c^2 R}{L}. \tag{61.20}$$

С точки зрения точной формулировки задачи эта γ является наименьшей из величин γ_m, получающихся в результате решения точного уравнения (58.10) для данного проводника. Среди значений γ_m для линейного проводника есть одно (наименьшее из всех), которое по порядку величины в $\ln(l/a)$ раз меньше остальных; это и есть значение (61.20).

§ 62. Емкость в цепи квазистационарного тока

В отличие от постоянного тока переменный ток может течь не только в замкнутой, но и в разомкнутой цепи. Рассмотрим линейный контур, концы которого присоединены к обкладкам конденсатора, находящимся на малом расстоянии друг от друга. При распространении по контуру переменного тока обкладки конденсатора будут периодически заряжаться и разряжаться, тем самым играя роль «источников» и «стоков» тока в разомкнутой цепи.

Ввиду малости расстояния между обкладками конденсатора магнитную энергию тока можно по-прежнему положить равной $LJ^2/(2c^2)$, где L — самоиндукция замкнутого контура, который получился бы из данного путем соединения обкладок коротким отрезком провода [1]). После этого единственное изменение в уравнении (61.4) будет состоять в добавлении к падению напряжения на сопротивлении, RJ, разности потенциалов на обкладках конденсатора: e/C, где C — емкость конденсатора, а $\pm e(t)$ — заряды на его обкладках. Таким образом,

$$\mathscr{E} = RJ + \frac{e}{C} + \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}.$$

Но сила тока J равна убыли заряда одной или приращению заряда другой обкладки:

$$J = \frac{de}{dt}.$$

Выразив в уравнении J через e, получим

$$\frac{L}{c^2}\frac{d^2 e}{dt^2} + R\frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = \mathscr{E}. \tag{62.1}$$

Это и есть искомое уравнение для переменного тока в цепи с емкостью.

---

[1]) В этом параграфе скин-эффектом пренебрегаем.

Если $\mathscr{E}$ — периодическая функция времени с частотой ω, то уравнение (62.1) сводится к алгебраическому соотношению между $\mathscr{E}$ и зарядом e, или, что то же, между $\mathscr{E}$ и током $J = -i\omega e$. Именно, имеем $JZ = \mathscr{E}$, где импеданс Z определяется согласно

$$Z = R - i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{62.2}$$

Отделив в соотношении $J = \mathscr{E}/Z$ вещественную часть, получим

$$J(t) = \frac{\mathscr{E}_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)\frac{1}{R}, \tag{62.3}$$

чем определяется сила тока в цепи с приложенной извне электродвижущей силой $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos\omega t$.

Если же $\mathscr{E} = 0$, то ток в цепи представляет собой свободные электрические колебания. Частота (комплексная) этих колебаний определяется условием $Z = 0$, откуда

$$\omega = -i\frac{Rc^2}{2L} \pm \sqrt{\frac{c^2}{LC} - \left(\frac{Rc^2}{2L}\right)^2}. \tag{62.4}$$

В зависимости от знака подкоренного выражения мы будем иметь затухающие (с декрементом $Rc^2/2L$) колебания или же чисто апериодически затухающий разряд. В предельном случае $R \to 0$ имеем незатухающие колебания с частотой, выражающейся *формулой Томсона*:

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{LC}} \tag{62.5}$$

(*W. Thomson*, 1853).

Уравнение (62.1) непосредственно обобщается на систему нескольких индуктивно связанных контуров с конденсаторами. Ток J_a в a-м контуре связан с зарядами $\pm e_a$ на обкладках соответствующего конденсатора:

$$J_a = \frac{de_a}{dt},$$

а вместо (62.1) имеем систему уравнений

$$\sum_b \frac{1}{c^2} L_{ab} \frac{d^2 e_b}{dt^2} + R_a \frac{de_a}{dt} + \frac{e_a}{C_a} = \mathscr{E}_a. \tag{62.6}$$

Для периодических (монохроматических) токов эти уравнения сводятся к алгебраической системе

$$\sum_b Z_{ab} J_b = \mathscr{E}_a, \tag{62.7}$$

причем элементы матрицы Z_{ab} даются формулами

$$Z_{ab} = \delta_{ab}\left(R_a + \frac{i}{\omega C_a}\right) - \frac{i\omega}{c^2}L_{ab}. \qquad (62.8)$$

Собственные частоты системы токов даются условием совместности уравнений (62.7) при $\mathscr{E}_a = 0$, т. е. условием равенства нулю определителя:

$$\det|Z_{ab}| = 0. \qquad (62.9)$$

Если сопротивления R отличны от нуля, то все «частоты» имеют мнимую часть, т. е. электрические колебания затухают.

Обратим внимание на то, что уравнения (62.6) формально совпадают с механическими уравнениями движения системы с несколькими степенями свободы, совершающей затухающие малые колебания. При этом роль обобщенных координат играют заряды e_a, роль обобщенных скоростей — токи $J_a = \dot{e}_a$. Функция Лагранжа системы есть

$$\mathscr{L} = \sum_{a,b}\frac{1}{2c^2}L_{ab}\dot{e}_a\dot{e}_b - \sum_a \frac{e_a^2}{2C_a} + \sum_a e_a\mathscr{E}_a. \qquad (62.10)$$

Роль кинетической и потенциальной энергии механической системы играют в ней соответственно магнитная и электрическая энергии системы токов, а величины $\mathscr{E}_a$ соответствуют приложенным извне силам, возбуждающим вынужденные колебания системы. Величины же R_a входят в диссипативную функцию

$$\mathscr{R} = \frac{1}{2}\sum_a R_a\dot{e}_a^2. \qquad (62.11)$$

Уравнения (62.6) совпадают с уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{e}_a} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial e_a} = -\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial\dot{e}_a}. \qquad (62.12)$$

Задачи

1. Определить собственные частоты электрических колебаний в двух индуктивно связанных контурах, содержащих самоиндукции L_1 и L_2 и емкости C_1 и C_2; сопротивлениями R_1 и R_2 пренебрегаем.

Решение. Искомые частоты определяются из условия

$$\det|Z_{ab}| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = 0,$$

где

$$Z_{11} = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_{22} = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right), \quad Z_{12} = -\frac{i\omega}{c^2}L_{12}.$$

Вычисление дает

$$\omega_{1,2}^2 = c^2\frac{L_1C_1 + L_2C_2 \mp \left[(L_1C_1 - L_2C_2)^2 + 4C_1C_2L_{12}^2\right]^{1/2}}{2C_1C_2(L_1L_2 - L_{12}^2)}.$$

Обе частоты вещественны, что является следствием пренебрежения R_1 и R_2. При $L_{12} \to 0$ частоты ω_1 и ω_2 стремятся к значениям $c/\sqrt{L_1C_1}$ и $c/\sqrt{L_2C_2}$, соответствующим раздельным колебаниям в каждом из контуров.

2. То же для цепи из параллельно соединенных сопротивления R, емкости C и самоиндукции L.

Р е ш е н и е. Импедансы трех ветвей цепи равны

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = \frac{i}{\omega C}, \quad Z_3 = -\frac{i\omega}{c^2}L,$$

а токи в них связаны соотношениями

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0, \quad Z_1J_1 = Z_2J_2 = Z_3J_3.$$

Отсюда находим уравнение

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = 0,$$

решение которого дает

$$\omega = -\frac{i}{2RC} \pm \sqrt{\frac{c^2}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}.$$

3. Рассмотреть распространение электрических колебаний по цепи, составленной из бесконечной последовательности одинаковых ячеек, содержащих импедансы

$$Z_1 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_2 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right),$$

как это показано на рис. 37. Найти область частот колебаний, которые могут распространяться вдоль цепи без затухания [1]).

Р е ш е н и е. Токи i_α определим как контурные токи в каждой из ячеек цепи (рис. 37). Уравнение Кирхгофа для α-го контура гласит:

$$Z_1i_\alpha + Z_2(2i_\alpha - i_{\alpha-1} - i_{\alpha+1}) = 0.$$

Это есть линейное разностное уравнение (по целочисленной переменной α) с постоянными коэффициентами. Ищем его решение в виде

$$i_\alpha = \mathrm{const}\cdot q^\alpha$$

и для параметра q получаем характеристическое уравнение

$$q^2 - \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)q + 1 = 0. \quad (1)$$

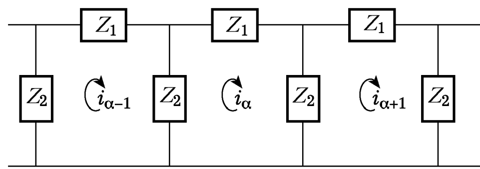


Рис. 37

Пусть $-4 \leqslant Z_1/Z_2 \leqslant 0$, чему соответствуют значения ω^2, лежащие между меньшей и большей из величин

$$\frac{c^2}{L_1C_1} \quad \text{и} \quad \frac{c^2(4/C_2 + 1/C_1)}{4L_2 + L_1}.$$

[1]) Условие применимости квазистационарной теории к такой периодической цепи заключается в малости размеров отдельной ее ячейки по сравнению с «длиной волны» c/ω.

Тогда уравнение (1) имеет два комплексно сопряженных корня с модулями $|q| = 1$. Это значит, что при переходе от одной ячейки цепи к следующей амплитуда тока не убывает, т. е. электрические колебания распространяются по цепи без затухания. Если обозначить в этом случае $q = e^{ikl}$ (l — длина одной ячейки цепи), то k играет роль «волнового вектора» распространяющихся вдоль цепи колебаний. Скорость же распространения можно вычислить по общим правилам как производную $u = d\omega/dk$.

Если же ω лежит вне указанных пределов, то уравнение (1) имеет два вещественных корня q_1 и q_2; поскольку $q_1 q_2 = 1$, то один из них (пусть q_1) по абсолютной величине меньше, а другой (q_2) больше 1. Легко видеть, что это означает невозможность незатухающего распространения колебаний вдоль цепи. Для уяснения причины этого рассмотрим цепь большой, но конечной длины. Начальный колебательный импульс вносится в начале цепи, а на конце цепь тем или иным способом замкнута. Математически замкнутость конца цепи описывается определенным граничным условием, с помощью которого в общем решении

$$i_\alpha = c_1 q_1^{-(A-\alpha)} + c_2 q_2^{-(A-\alpha)}$$

(A — «координата» конца цепи) определяется отношение коэффициентов c_1/c_2, которое при написанной форме решения будет порядка 1. Но тогда по мере увеличения $A-\alpha$ второй член (в котором $|q_2| < 1$) быстро станет очень малым по сравнению с первым. Таким образом, почти по всей длине цепи, за исключением лишь малого ее участка вблизи конца, решение имеет вид

$$i_\alpha = c_1 q_1^{-(A-\alpha)},$$

в котором $|i_\alpha|$ убывает по направлению от начала цепи к ее концу.

Следует подчеркнуть, что это затухание не имеет характера диссипативного поглощения (для которого нет причин ввиду отсутствия сопротивлений в цепи); оно может быть наглядно описано как результат отражений колебательного импульса от каждой последующей ячейки цепи.

§ 63. Движение проводника в магнитном поле

Во всем предыдущем изложении молчаливо подразумевалось, что проводники в электромагнитном поле покоятся (относительно системы отсчета K, в которой определены все величины $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и т. д.). В частности, и связь $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ между током и полем справедлива, вообще говоря, лишь для неподвижных проводников.

Для определения связи между током и полем в движущемся проводнике перейдем от системы отсчета K к другой системе, K', в которой проводник (или его отдельный участок) в данный момент времени покоится. В этой системе имеем $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}'$, где $\mathbf{E}'$ — напряженность электрического поля в K'. Но согласно известной формуле преобразования полей $\mathbf{E}'$ выражается через поле в системе K через [1])

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}], \qquad (63.1)$$

[1]) См. II, § 24. Микроскопические значения напряженностей электрического и магнитного полей заменены их усредненными значениями $\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{E}$, $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$.

где $\mathbf{v}$ — скорость системы K' относительно системы K, т. е. в данном случае — скорость проводника (которую мы предполагаем, естественно, малой по сравнению со скоростью света). Таким образом, находим

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}] \right). \tag{63.2}$$

Это и есть формула, определяющая связь между током и полем в движущихся проводниках. По поводу ее вывода надо сделать еще следующее замечание. Произведя переход от одной системы отсчета к другой, мы преобразовали поле, но оставили величину $\mathbf{j}$ неизменной. Преобразование плотности тока привело бы, при $v \ll c$, к появлению добавочных членов высшего порядка малости. В формуле же (63.2) второй член, появившийся в результате преобразования поля, вообще говоря, не мал по сравнению с первым, хотя и содержит множитель v/c. Так, если электрическое поле само обусловлено электромагнитной индукцией от переменного магнитного поля, то его порядок величины содержит лишний множитель $1/c$ по сравнению с магнитным полем.

Диссипация энергии в проводнике при протекании в нем заданного тока не может, разумеется, зависеть от движения проводника. Поэтому плотность выделения (в 1 с) джоулева тепла в движущемся проводнике, выраженная через плотность тока, дается той же формулой j^2/σ, как и в неподвижном проводнике. Но вместо произведения $\mathbf{jE}$ теперь имеем [1])

$$\frac{j^2}{\sigma} = \mathbf{j} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}] \right).$$

Таким образом, в движущемся проводнике сумма $\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]/c$ играет роль «эффективной» напряженности электрического поля, создающей ток проводимости. Поэтому электродвижущая сила, действующая в замкнутой линейной цепи C, дается интегралом

$$\mathscr{E} = \oint\limits_C \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}] \right) d\mathbf{l}. \tag{63.3}$$

Преобразуем его следующим образом. Согласно уравнению Мак-

---

[1]) Из этой формулы видно, что дополнительное тепло, выделяющееся (в течение времени δt) в проводнике при его движении в магнитном поле, есть

$$\delta t \frac{1}{c} \int \mathbf{j}[\mathbf{vB}]\, dV = -\frac{1}{c} \int \delta\mathbf{u}[\mathbf{jB}]\, dV,$$

где $\delta\mathbf{u} = \mathbf{v}\delta t$ — смещение за время δt. Эта величина равна и противоположна по знаку работе, произведенной за то же время над проводником объемными силами $\mathbf{f} = [\mathbf{jB}]/c$; тем самым разъясняется кажущееся противоречие, упомянутое на с. 193.

свелла $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ имеем

$$\oint\limits_C \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \int\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \mathbf{B}\,d\mathbf{f},$$

или, обозначив через Φ магнитный поток через поверхность S, опирающуюся на контур тока,

$$\oint\limits_C \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\mathbf{v}=0}.$$

Производная по времени с индексом $\mathbf{v} = 0$ означает изменение магнитного потока, обусловленное изменением во времени самого магнитного поля при неизменном положении контура C.

Во втором же члене пишем $\mathbf{v} = d\mathbf{u}/dt$, где $d\mathbf{u}$ — бесконечно малое смещение элемента контура. Тогда

$$\oint\limits_C [\mathbf{vB}]\,d\mathbf{l} = \int\limits_C \frac{[d\mathbf{u}\mathbf{B}]\,d\mathbf{l}}{dt} = -\frac{\int \mathbf{B}\,d\mathbf{f}}{dt},$$

где $d\mathbf{f} = [d\mathbf{u}\cdot d\mathbf{l}]$ — элемент площади «боковой» поверхности между двумя бесконечно близкими положениями C и C' контура тока, занимаемыми им в моменты времени t и $t + dt$ (рис. 38). Поскольку полный магнитный поток через всякую замкнутую поверхность равен нулю, то ясно, что поток через боковую поверхность равен разности потоков через поверхности, опирающиеся на C и C'. Таким образом,

$$\oint\limits_C [\mathbf{vB}]\,d\mathbf{l} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\mathbf{B}=\mathrm{const}},$$

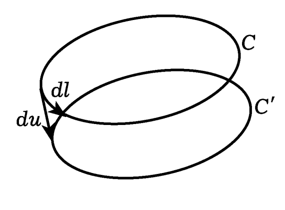


Рис. 38

где производная по времени означает изменение магнитного потока, связанное с перемещением проводника при неизменном поле.

Складывая оба члена, получим окончательно

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{63.4}$$

где производная по времени означает теперь полное изменение магнитного потока через движущийся контур. Таким образом, выражаемый формулой (63.4) *закон Фарадея* справедлив независимо по какой причине происходит изменение магнитного потока — или от изменения самого поля (о чем уже шла речь в § 61, формула (61.13)) или от движения проводника.

В постоянном магнитном поле изменение потока может быть связано только с перемещением контура. Если контур движется так, что все его точки перемещаются вдоль силовых линий поля,

никогда не пересекая их, то поток поля через контур не меняется. Это обстоятельство является очевидным следствием того, что магнитный поток через всякую замкнутую поверхность равен нулю, а поток через «боковую» поверхность, описываемую движущимся контуром, в этом случае равен нулю тождественно (так как на ней $B_n = 0$). Таким образом, можно сказать, что для возникновения индукционной электродвижущей силы проводник во всяком случае должен пересекать при своем движении магнитные силовые линии.

Электромагнитное поле в движущихся проводниках определяется системой уравнений:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right), \tag{63.5}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0.$$

Выразив из второго уравнения $\mathbf{E}$ через $\mathbf{H}$ и подставив в первое, получим

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\mathbf{vB}] = -\frac{c^2}{4\pi}\operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{\sigma}\right). \tag{63.6}$$

В однородном проводнике с постоянными проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\mathbf{vH}] = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\Delta\mathbf{H}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{63.7}$$

Эти уравнения обобщают те, которые были получены в § 58.

Следует, однако, указать, что если имеется всего один проводник, движущийся как целое (не деформируясь) во внешнем магнитном поле, то решение задачи значительно упрощается при использовании системы координат, жестко связанной с телом. В этой системе проводник неподвижен, а внешнее поле меняется со временем по заданному закону, так что мы возвращаемся к типу задач о токах Фуко, рассмотренных в § 59. Возможность такого перехода связана, однако, не с галилеевским (или эйнштейновским) принципом относительности, так как новая система координат, вообще говоря, неинерциальна. Эквивалентность обеих задач есть следствие отмеченной выше независимости электромагнитной индукции от причины, вызывающей изменение магнитного потока. В ней можно убедиться и чисто математическим путем. Для этого раскроем выражение $\operatorname{rot}[\mathbf{vB}]$, учитывая при этом, что $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, а при движении тела как целого также и $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ (это равенство выражает собой несжимаемость тела).

Тогда левая часть уравнения (63.6) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v}. \qquad (63.8)$$

Но эта сумма есть не что иное, как производная от $\mathbf{B}$ по времени, определяющая изменение $\mathbf{B}$ по отношению к вращающемуся телу. Действительно, сумма первых двух членов есть «субстанциональная» производная по времени $d\mathbf{B}/dt$, дающая изменение $\mathbf{B}$ в точке, перемещающейся со скоростью $\mathbf{v}$. Третий же член учитывает изменение ориентации $\mathbf{B}$ по отношению к телу: он равен нулю при чисто поступательном движении ($\mathbf{v} = \text{const}$) и равен $-[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{B}]$ при вращении тела ($\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость).

В заключение этого параграфа рассмотрим своеобразное явление (*униполярную индукцию*), возникающее при вращении намагниченного проводника. Оно заключается в том, что если при помощи двух скользящих контактов (A и B на рис. 39) присоединить к вращающемуся магниту неподвижный провод, то по последнему потечет ток. Не представляет труда вычислить электродвижущую силу, создающую этот ток. Для этого проще всего перейти к системе координат, вращающейся вместе с магнитом. Если $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения магнита, то в новой системе провод вращается с угловой скоростью $-\boldsymbol{\Omega}$ (а магнит неподвижен). Таким образом, мы имеем теперь дело с проводником, движущимся в заданном постоянном магнитном поле $\mathbf{B}$, создаваемом неподвижным магнитом; искажением поля самим проводником мы пренебрегаем. Согласно формуле (63.3) электродвижущая сила, действующая между концами провода, дается интегралом

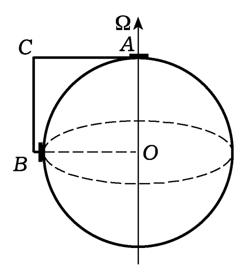


Рис. 39

$$\mathscr{E} = \frac{1}{c}\int\limits_{ACB} [\mathbf{v}\mathbf{B}]\,d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\int\limits_{ACB} [\mathbf{B}[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]]\,d\mathbf{l}, \qquad (63.9)$$

взятым вдоль длины провода. Эта формула и решает поставленную задачу.

Задачи

1. Определить магнитный момент проводящего шара (с $\mu = 1$), равномерно вращающегося в однородном постоянном магнитном поле; определить действующий на шар момент сил.

Решение. Пусть в неподвижной системе координат (с осью z вдоль вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$) внешнее поле имеет составляющие $\mathfrak{H}_x$, 0, $\mathfrak{H}_z$. В системе координат ξ, η, z, вращающейся вместе с шаром, составляющие поля:

$$\mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_x \cos\Omega t, \quad \mathfrak{H}_\eta = -\mathfrak{H}_x \sin\Omega t, \quad \mathfrak{H}_z$$

или, в комплексном виде,

$$\mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t}, \quad \mathfrak{H}_\eta = -i\mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t}, \quad \mathfrak{H}_z.$$

Таким образом, вдоль осей ξ и η действует переменное поле с частотой Ω и индуцируемый им магнитный момент

$$\mathscr{M}_\xi = V\,\mathrm{Re}\,\{\alpha\mathfrak{H}_\xi\} = V\mathfrak{H}_x(\alpha'\cos\Omega t + \alpha''\sin\Omega t),$$
$$\mathscr{M}_\eta = V\,\mathrm{Re}\,\{\alpha\mathfrak{H}_\eta\} = V\mathfrak{H}_x(-\alpha'\sin\Omega t + \alpha''\cos\Omega t),$$

где $V\alpha$ — комплексная магнитная поляризуемость шара, определенная в задаче 1 § 59. Вдоль же оси z магнитное поле постоянно и потому не создает (при $\mu = 1$) магнитного момента. Составляющие магнитного момента относительно неподвижной системы координат:

$$\mathscr{M}_x = V\alpha'\mathfrak{H}_x, \quad \mathscr{M}_y = V\alpha''\mathfrak{H}_x, \quad \mathscr{M}_z = 0.$$

Таким образом, в этой задаче α' и α'' определяют составляющие магнитного момента шара соответственно в плоскости векторов $\mathbf{\Omega}$, $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$ и перпендикулярно к ней.

Действующий на шар момент сил $\mathbf{K} = [\mathscr{M}\boldsymbol{\mathfrak{H}}]$. Его составляющие относительно неподвижных осей:

$$K_x = V\alpha''\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z, \quad K_y = -V\alpha'\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z, \quad K_z = -V\alpha''\mathfrak{H}_x^2.$$

Использованное здесь сведение задачи о вращающемся в поле шаре к задаче о неподвижном шаре в переменном поле вполне естественно в свете замечания, сделанного в конце решения задачи 1 § 59. Обратим внимание на интересный аспект этой аналогии: при увеличении частоты ω переменного магнитного поля оно «выталкивается» из шара — в пределе $\omega \to \infty$ все силовые линии «обтекают» шар, не проникая внутрь его; таким же образом из быстро вращающегося шара выталкивается магнитное поле, перпендикулярное к оси вращения.

2. Определить электродвижущую силу униполярной индукции, возникающую между полюсом и экватором (см. рис. 39) однородно намагниченного шара, равномерно вращающегося вокруг оси, совпадающей с направлением намагничения.

Р е ш е н и е. При вращении шара вокруг направления его намагничения создаваемое им поле постоянно; учитывая также, что внутри шара нет токов, найдем из (63.6), что $\mathrm{rot}\,[\mathbf{vB}] = 0$. Поэтому интеграл от $[\mathbf{vB}]$ по замкнутому контуру $OACBO$ (рис. 39) обращается в нуль и, следовательно, интегрирование по пути ACB в формуле (63.9) можно заменить интегрированием по пути AOB, проходящему внутри шара. Интеграл вдоль отрезка AO оси вращения обращается в нуль ввиду совпадения направлений $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{r}$, а интегрирование вдоль радиуса OB дает (с учетом совпадения направлений $\mathbf{B}$ и $\mathbf{\Omega}$ внутри шара):

$$\mathscr{E} = \frac{1}{c}\int\limits_0^a B_0\Omega r\,dr = \frac{B_0\Omega a^2}{2c}$$

(a — радиус шара, B_0 — магнитная индукция в нем). В однородно намагниченном шаре (в отсутствие приложенного внешнего поля) связь индукции с намагничением определяется уравнениями $B_0 + 2H = 0$ (ср. (8.1)) и $B_0 - H = 4\pi M$, откуда $B_0 = 8\pi M/3$. Вводя полный магнитный момент шара $\mathscr{M}$, получим окончательно

$$\mathscr{E} = \frac{\Omega\mathscr{M}}{ac}.$$

3. Определить полный заряд, протекающий по линейному замкнутому контуру при изменении (по любой причине) магнитного потока через него от одного постоянного значения (Φ_1) до другого (Φ_2).

Р е ш е н и е. Искомый полный заряд есть интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} J\,dt$, где $J(t)$ — возникающий в контуре индукционный ток. С математической точки зрения этот интеграл представляет собой компоненту Фурье функции $J(t)$ с частотой $\omega = 0$. Поэтому он связан с такой же компонентой электродвижущей силы соотношением

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}\,dt = Z(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} J\,dt$$

(см. (61.3)). Подставив $Z(0) = R$ (R — сопротивление контура для постоянного тока) и $\mathscr{E} = -(1/c)\,d\Phi/dt$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} J\,dt = \frac{1}{cR}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

§ 64. Возбуждение тока ускорением

Рассматривая в предыдущем параграфе движение проводника, мы пренебрегли возможным влиянием ускорения (если таковое имеется). Между тем ускоренное движение металла эквивалентно появлению дополнительных инерционных сил, действующих на электроны проводимости. Если $\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение проводника, а m — масса электрона, то эта сила равна $-m\dot{\mathbf{v}}$. Она оказывает на электрон такое же действие, какое произвело бы электрическое поле с напряженностью $m\dot{\mathbf{v}}/e$, где $-e$ есть заряд электрона. Таким образом, эффективное электрическое поле, действующее на электроны проводимости в ускоренно движущемся металле, есть

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{m}{e}\dot{\mathbf{v}}. \tag{64.1}$$

Соответственно для плотности тока имеем

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}' = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{m}{e}\dot{\mathbf{v}}\right). \tag{64.2}$$

Выразим из (64.1) $\mathbf{E}$ через $\mathbf{E}'$ и подставим в уравнение

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

(полагаем везде $\mu = 1$). Тогда

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \frac{m}{e}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{v}}. \tag{64.3}$$

Напишем $\mathbf{v}$ в виде суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}],$$

где $\mathbf{u}$ — скорость поступательного движения, а $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения тела. Дифференцируя по времени, найдем

ускорение

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{\Omega}\mathbf{v}] + [\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r}] = \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{u}\mathbf{\Omega}] + [\mathbf{\Omega}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]] + [\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r}].$$

Первые два члена не зависят от $\mathbf{r}$ и потому дают нуль при дифференцировании по координатам. Третий член может быть написан в виде

$$[\mathbf{\Omega}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]] = -\frac{1}{2}\operatorname{grad}[\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]^2$$

и потому его rot тоже обращается в нуль. Наконец, $\operatorname{rot}[\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r}] = 2\dot{\mathbf{\Omega}}$. Таким образом, подставив $\dot{\mathbf{v}}$ в (64.3), получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \frac{2m}{e}\dot{\mathbf{\Omega}}$$

или

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}'}{\partial t}, \qquad (64.4)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \frac{2mc}{e}\mathbf{\Omega}. \qquad (64.5)$$

Поскольку $\mathbf{\Omega}$ от координат не зависит, то уравнение

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

сохраняет свой вид, если выразить в нем $\mathbf{H}$ через $\mathbf{H}'$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}' = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}'. \qquad (64.6)$$

Исключив $\mathbf{E}'$ из уравнений (64.4) и (64.6), мы получим для $\mathbf{H}'$ уравнение

$$\Delta\mathbf{H}' = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}'}{\partial t}, \qquad (64.7)$$

совпадающее с уравнением, которому удовлетворяет $\mathbf{H}$ в неподвижном проводнике.

Вне тела поле удовлетворяет уравнению $\Delta\mathbf{H} = 0$ (длина волны предполагается большой по сравнению с размерами тела); такому же уравнению будет удовлетворять и $\mathbf{H}'$.

Наконец, на поверхности проводника вместе с $\mathbf{H}$ будет непрерывным и $\mathbf{H}'$. Различно лишь условие на бесконечности: $\mathbf{H}$ стремится к нулю, а $\mathbf{H}'$ — к конечному пределу $-2mc\mathbf{\Omega}/e$.

Таким образом, задача об определении переменного магнитного поля $\mathbf{H}$ вокруг неравномерно вращающегося тела эквивалентна задаче об определении поля $\mathbf{H}'$ вокруг неподвижного тела, находящегося в однородном внешнем магнитном поле с напряженностью

$$\mathfrak{H} = -\frac{2mc}{e}\mathbf{\Omega}. \qquad (64.8)$$

По решению $\mathbf{H}'$ этой задачи искомое поле $\mathbf{H}^{(e)}$ вне проводника получается вычитанием $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$.

Возникающее таким образом магнитное поле, как и всякое переменное поле, индуцирует в самом проводнике электрические токи. В односвязном теле эти токи проявляются в виде приобретаемого телом магнитного момента. В неравномерно вращающемся кольце эффект проявляется как возникновение электродвижущей силы (*эффект Стюарта–Толмэна*).

Тот факт, что в формулу (64.8) входит сама угловая скорость, а не ее производная по времени, может дать повод к недоразумению. Поэтому напомним, что все рассмотрение, а с ним и указанный выше смысл величины (64.8), относится только к неравномерному вращению. Действительно, при постоянном $\boldsymbol{\Omega}$ уравнение (64.7) с требуемым условием на бесконечности тождественно удовлетворяется значением $\mathbf{H}' = \boldsymbol{\mathfrak{H}}$; тогда в силу определения (64.5) имеем $\mathbf{H} = 0$. Что касается магнитного поля, возникающего при равномерном вращении благодаря гиромагнитному эффекту (§ 36), то оно является малой величиной, не учитываемой нами здесь.

Отметим также, что при выводе мы отвлекались от деформации тела, возникающей при неравномерном вращении. Очевидно, что учет этой деформации не отразился бы на эффекте — если характерное время изменения угловой скорости велико по сравнению со временем релаксации электронов проводимости при деформации (что и предполагается). Действительно, электрический ток в проводнике вызывается градиентом суммы $\varphi + \zeta_0/e$, где φ — потенциал поля, а ζ_0 — химический потенциал электронов проводимости (см. § 26). Неоднородная деформация создает градиент ζ_0, но он компенсируется электрическим полем, возникающим в силу условия термодинамического равновесия $e\varphi + \zeta_0 = \text{const}$.

З а д а ч и

1. Определить магнитный момент неравномерно вращающегося шара (радиуса a). Скорость вращения предполагается настолько малой, что глубина проникновения $\delta \gg a$.

Р е ш е н и е. Магнитный момент, приобретаемый шаром в поле $\boldsymbol{\mathfrak{H}}(t)$ (64.8), есть

$$\mathscr{M} = V\widehat{\alpha}\mathfrak{H},$$

где $\widehat{\alpha}$ — оператор, действие которого на компоненты Фурье функции $\mathfrak{H}(t)$ определяется формулами, полученными в задаче 1 § 59. Для компонент с частотами ω такими, что $\delta \gg a$, имеем

$$\mathscr{M} = V\alpha(\omega)\mathfrak{H} = -i\omega\frac{4\pi m a^5\sigma}{15ce}\Omega.$$

Эта формула, переписанная в виде

$$\mathscr{M} = \frac{4\pi m a^5\sigma}{15ce}\frac{d\Omega}{dt},$$

не содержит в явном виде ω, а потому справедлива и для не разложенных по Фурье функций $\Omega(t)$, $\mathscr{M}(t)$ (предполагаем, что в их разложение входят в основном лишь частоты, удовлетворяющие поставленному условию).

2. Определить полный заряд, который протечет по тонкому круговому кольцу при остановке его равномерного вращения вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости.

Р е ш е н и е. В формуле, полученной в задаче 3 § 63, надо понимать под Φ поток поля $\mathfrak{H}$ (64.8). Полный заряд, протекающий при изменении угловой скорости от Ω до 0, есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} J\,dt = \frac{2mc}{eRc}\Omega\pi b^2 = \frac{m\sigma V}{2\pi e}\Omega$$

(b — радиус кольца, V — объем провода).

3. Определить ток, возникающий в сверхпроводящем круговом кольце при остановке его равномерного вращения.

Р е ш е н и е. Из условия постоянства полного магнитного потока через кольцо (см. (54.5)) найдем

$$J = \frac{2mc^2}{eL}\Omega\pi b^2 = \frac{mc^2 b\Omega}{2e[\ln(8b/a) - 2]}$$

(значение L — см. примеч. на с. 273).

ГЛАВА VIII

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

§ 65. Уравнения движения жидкости в магнитном поле

Если проводящая жидкая (или газообразная) среда находится в магнитном поле, то при ее гидродинамических движениях в ней индуцируются электрические поля и возникают электрические токи. Но на токи в магнитном поле действуют силы, которые могут существенно повлиять на движение жидкости. С другой стороны, эти токи меняют и само магнитное поле. Таким образом, возникает сложная картина взаимодействия магнитных и гидродинамических явлений, которая должна рассматриваться на основе совместной системы уравнений поля и уравнений движения жидкости.

В область применений магнитной гидродинамики входят очень разнообразные физические объекты — от жидких металлов до космической плазмы. Мы не будем обсуждать специфические условия, существующие в различных конкретных объектах. Укажем лишь, что для буквальной применимости магнитной гидродинамики необходимо, разумеется, чтобы для рассматриваемого движения характерные расстояния и промежутки времени были велики по сравнению соответственно с длиной пробега и временем пробега носителей тока (электронов, ионов). В некоторых случаях, однако, уравнениями, совпадающими формально с уравнениями магнитной гидродинамики идеальной жидкости, может описываться и движение среды с большой длиной пробега. Такая ситуация имеет, например, место в неравновесной плазме с температурой электронов, много большей температуры ионов (ср. X, § 38).

Магнитная проницаемость сред, о которых фактически идет речь в магнитной гидродинамике, мало отличается от единицы, и это отличие не имеет значения для изучаемых здесь явлений. Поэтому везде в этой главе мы будем полагать $\mu = 1$ [1]).

Составим, прежде всего, систему магнитогидродинамических уравнений в условиях, когда можно пренебречь всеми диссипа-

[1]) В литературе по магнитной гидродинамике магнитное поле в этих условиях часто обозначают как $\mathbf{B}$, подчеркивая тем самым, что речь идет именно об усредненной микроскопической напряженности $\boldsymbol{h} = \mathbf{B}$. Мы, однако, будем пользоваться здесь обозначением $\mathbf{H}$ для единообразия с другими главами этой книги, где рассматриваются немагнитные среды.

тивными процессами — для идеальной жидкости. Это значит, что не учитываются как процессы вязкости и теплопроводности, так и конечность электрической проводимости среды σ; последняя рассматривается как сколь угодно большая.

Положив в уравнениях (63.7) $\sigma \to \infty$, пишем

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{65.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\,[\mathbf{vH}]. \tag{65.2}$$

Гидродинамические уравнения содержат уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \tag{65.3}$$

(ρ — плотность жидкости) и уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\mathbf{f}}{\rho},$$

где $\mathbf{f}$ — объемная плотность сторонних, в данном случае электромагнитных, сил. Согласно (35.4) имеем

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}] = \frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}].$$

Таким образом, уравнение движения жидкости принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]. \tag{65.4}$$

К этим уравнениям надо еще присоединить уравнение состояния

$$P = P(\rho, T), \tag{65.5}$$

связывающее между собой давление, плотность и температуру жидкости, и уравнение сохранения энтропии, выражающее адиабатичность движения в отсутствие диссипации:

$$\frac{ds}{dt} \equiv \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s = 0, \tag{65.6}$$

где s — энтропия единицы массы жидкости, а

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla$$

обозначает «субстанциональную» производную, определяющую изменение величины при перемещении вместе с движущейся частицей жидкости. Уравнения (65.1)–(65.6) и составляют полную систему магнитогидродинамических уравнений идеальной жидкости.

Как известно, уравнение Эйлера может быть приведено (с использованием также и уравнения непрерывности) к виду, выражающему закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{65.7}$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса (см. VI, § 7). В отсутствие сторонних сил

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik}.$$

Преобразовав последний член в уравнении (65.4) с помощью равенства

$$[\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}] = \frac{1}{2}\nabla H^2 - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}$$

и учтя также, что $\mathrm{div}\,\mathbf{H} \equiv \partial H_k/\partial x_k = 0$, найдем, что в магнитной гидродинамике

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{1}{2}H^2\delta_{ik}\right). \tag{65.8}$$

Как и должно быть, к тензору Π_{ik} добавляется максвелловский тензор напряжений.

Закон сохранения энергии в обычной гидродинамике выражается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right),$$

где ε и $w = \varepsilon + P/\rho$ — внутренняя энергия и тепловая функция единицы массы жидкости; оно автоматически следует из уравнений движения § 6 т. VI. При наличии в проводящей среде магнитного поля к плотности энергии добавляется магнитная энергия $H^2/(8\pi)$, а к плотности потока энергии — вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = c[\mathbf{EH}]/(4\pi)$. В последнем надо при этом выразить $\mathbf{E}$ через $\mathbf{H}$ согласно формуле

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{vH}], \tag{65.9}$$

получающейся из (63.2) при $\sigma \to \infty$ (и конечном $\mathbf{j}$)[1]. Таким образом, сохранение энергии в магнитной гидродинамике выражается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + \frac{H^2}{8\pi}\right) = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}, \tag{65.10}$$

[1]) Это выражение отвечает равному нулю полю $\mathbf{E}'$ (63.1) в системе отсчета, движущейся вместе с данным элементом объема жидкости: в идеально проводящей среде происходит полная экранировка электрического поля.

где плотность потока энергии

$$\mathbf{q} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) + \frac{1}{4\pi}[\mathbf{H}[\mathbf{v}\mathbf{H}]]. \tag{65.11}$$

Легко проверить это уравнение и прямым вычислением.

В основе написанной системы магнитогидродинамических уравнений лежит пренебрежение током смещения в уравнениях Максвелла. Это значит, что предполагается

$$\frac{1}{c}\left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right| \ll |\operatorname{rot}\mathbf{H}|. \tag{65.12}$$

Выразив **E** через **H** согласно (65.9), получим отсюда условие

$$\frac{vl}{c^2\tau} \ll 1, \tag{65.13}$$

где l и τ — характерные для данного движения параметры длины и времени. Из (65.2) имеем оценку $l/\tau \sim v$ и тогда из (65.13) находим условие $v \ll c$ — движение должно быть нерелятивистским (что и предполагалось нами с самого начала). Из уравнения же (65.4) имеем оценку $\rho v/\tau \sim H^2/l$; в совокупности с (65.13) это дает условие для величины магнитного поля:

$$H^2 \ll \rho c^2. \tag{65.14}$$

Обратим внимание на то, что в левой части уравнения (65.10) нет электрической энергии $E^2/(8\pi)$, а в левой части уравнения (65.7) нет импульса электромагнитного поля $\mathbf{S}/c^2$. Это — автоматическое следствие пренебрежения током смещения. Малость электрической энергии по сравнению с магнитной соответствует неравенству $E \sim vH/c \ll H$, а малость $S/c^2 \sim EH/c \sim vH^2/c^2$ по сравнению с ρv — неравенству (65.14).

Вернемся к уравнению (65.2); ему может быть дано важное наглядное истолкование (*H. Alfven*, 1942). Раскроем rot в правой части уравнения, учтя при этом, что $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} - \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Подставив сюда согласно уравнению непрерывности (65.3)

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}}{\rho}\nabla\rho,$$

получим после простой перегруппировки членов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right)\frac{\mathbf{H}}{\rho} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho}\nabla\right)\mathbf{v}. \tag{65.15}$$

С другой стороны, рассмотрим какую-либо «жидкую линию», т. е. линию, перемещающуюся вместе с составляющими

ее частицами жидкости. Пусть $\delta\mathbf{l}$ — элемент длины этой линии; определим, как он меняется с течением времени. Если $\mathbf{v}$ есть скорость жидкости в точке на одном конце элемента $\delta\mathbf{l}$, то ее скорость на другом конце есть $\mathbf{v} + (\delta\mathbf{l}\nabla)\mathbf{v}$. Поэтому в течение времени dt элемент $\delta\mathbf{l}$ изменится на $dt(\delta\mathbf{l}\nabla)\mathbf{v}$, т. е.

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{l} = (\delta\mathbf{l}\nabla)\mathbf{v}.$$

Мы видим, что изменение векторов $\delta\mathbf{l}$ и $\mathbf{H}/\rho$ со временем определяется одним и тем же уравнением. Отсюда следует, что если в начальный момент эти векторы совпадают по направлению, то они останутся параллельными и в дальнейшем, а их длины будут меняться пропорционально друг другу. Другими словами, если две бесконечно близкие частицы жидкости находятся на одной и той же силовой линии, то они будут находиться на одной и той же силовой линии и в дальнейшем, а величина H/ρ будет меняться пропорционально расстоянию между ними.

Переходя от бесконечно близких точек к точкам, находящимся на любом конечном расстоянии друг от друга, мы приходим к выводу, что каждая силовая линия перемещается вместе с находящимися на ней жидкими частицами. Можно сказать, что (при $\sigma \to \infty$) магнитные силовые линии как бы *вморожены* в вещество жидкости, перемещаясь вместе с ним. Величина же H/ρ меняется в каждой точке пропорционально растяжению соответствующей «жидкой линии». Если движущуюся жидкость можно считать несжимаемой, то $\rho = \text{const}$ и тогда пропорционально растяжению силовых линий меняется сама напряженность H.

Эти результаты имеют и другой наглядный аспект. Из них следует, что при перемещении со временем какого-либо замкнутого жидкого контура он не будет пересекать силовых линий. Это значит (ср. § 63), что поток магнитного поля через всякую поверхность, опирающуюся на жидкий контур, остается неизменным во времени.

§ 66. Диссипативные процессы в магнитной гидродинамике

В обычной гидродинамике диссипативные процессы определяются тремя величинами — двумя коэффициентами вязкости и коэффициентом теплопроводности. В магнитной гидродинамике это число значительно возрастает: как ввиду появления новых величин электрической природы, так и вследствие наличия в каждой точке выделенного направления — направления $\mathbf{H}$, чем нарушается изотропия жидкости. Мы ограничимся, однако, простейшим случаем, когда все кинетические коэффициенты можно считать постоянными вдоль среды, в частности — не зависящими

от величины и направления магнитного поля. Тогда к обычным коэффициентам вязкости η, ζ и теплопроводности $\varkappa$ добавляется всего одна величина – электрическая проводимость σ [1]).

Предположение о независимости кинетических коэффициентов от магнитного поля подразумевает выполнение определенных условий, существенно сужающих область применимости уравнений по сравнению с уравнениями магнитной гидродинамики идеальной жидкости. Именно, длина пробега носителей тока должна быть мала по сравнению с радиусом кривизны их траектории в магнитном поле; другими словами, частота столкновений должна быть велика по сравнению с ларморовской частотой носителей тока. Это условие нарушается в слишком разреженной среде или в слишком сильном магнитном поле [2]).

При учете вязкости и электропроводности уравнение (65.2) заменяется полным уравнением (63.7),

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}, \tag{66.1}$$

а магнитогидродинамическое уравнение Эйлера (65.4) заменяется уравнением Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla \operatorname{div}\mathbf{v} - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]. \tag{66.2}$$

Отметим, что уравнение (66.1) не содержит вязкости; поэтому свойство «вмороженности» силовых линий при $\sigma \to \infty$ остается и в вязкой идеально проводящей жидкости.

Уравнение адиабатичности (65.6) заменяется уравнением переноса тепла. В обычной гидродинамике оно гласит

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\varkappa\nabla T)$$

(см. VI, § 49). Выражение в левой части равенства представляет собой количество тепла (отнесенное к 1 см^3), выделяющееся в 1 с в движущемся элементе жидкости. Выражение же в правой части равенства есть энергия, диссипируемая в том же объеме за то же время. Первый член в нем связан с вязкостью; σ'_{ik} есть

[1]) Связь между током и электрическим полем в термодинамически неоднородной, но изотропной в каждой точке среде содержит еще и термоэлектрический коэффициент α (§ 26). Но если этот коэффициент постоянен, он выпадает из уравнений движения.

[2]) Вопрос об уравнениях магнитной гидродинамики для плазмы при нарушении этих условий рассмотрен в другом томе этого курса — см. X, § 58, 59.

вязкий тензор напряжений

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right) + \zeta\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Второй же дает диссипацию, связанную с теплопроводностью. В проводящей жидкости сюда должно быть добавлено джоулево тепло. Отнесенное к единице объема, оно равно

$$\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} = \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2.$$

Поэтому уравнение переноса тепла в магнитной гидродинамике гласит

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \varkappa\Delta T + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2. \tag{66.3}$$

В тензоре плотности потока импульса добавляется вязкий тензор напряжений:

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik} - \sigma'_{ik} - \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{1}{2}H^2\delta_{ik}\right). \tag{66.4}$$

Плотность же потока тепла дается теперь выражением

$$\mathbf{q} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) - (\mathbf{v}\sigma') - \varkappa\nabla T + \frac{1}{4\pi}[\mathbf{H}[\mathbf{v}\mathbf{H}]] - \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}] \tag{66.5}$$

(где $(\mathbf{v}\sigma')$ — вектор с составляющими $\sigma'_{ik}v_k$). Здесь добавляются члены, связанные как с вязкостью и теплопроводностью, так и с электрической проводимостью; последний получается при подстановке в вектор Пойнтинга напряженности $\mathbf{E}$ из (63.2):

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]. \tag{66.6}$$

Уравнения несколько упрощаются, если движущуюся жидкость можно считать несжимаемой. Уравнение непрерывности сводится тогда к $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, а в уравнении (66.2) исчезает предпоследний член. Выпишем еще раз соответствующую систему уравнений (в уравнениях (66.1), (66.2) удобно при этом преобразовать члены $\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ и $[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]$ с помощью известных формул векторного анализа):

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{66.7}$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}, \tag{66.8}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(P + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{66.9}$$

($\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость). Что касается уравнения (66.3), то для решения задач о движении несжимаемой жидкости оно не нужно, если только мы не интересуемся специально распределением температуры в ней.

В обычной гидродинамике вводится, как известно, число Рейнольдса, характеризующее роль вязких членов в уравнениях движения по сравнению с конвекционными: $\mathrm{R} = ul/\nu$, где l и $u \sim l/\tau$ — характерные параметры длины и скорости для данного движения жидкости. Наряду с этим числом, в магнитной гидродинамике можно ввести *магнитное число Рейнольдса*

$$\mathrm{R}_m = \frac{ul}{\nu_m}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \tag{66.10}$$

характеризующее роль члена с проводимостью в уравнении (66.1). Этот член аналогичен члену $\nu\Delta\mathbf{v}$ в уравнении Навье–Стокса, и величина ν_m играет роль «коэффициента диффузии» магнитного поля. При $\mathrm{R}_m \gg 1$ может оказаться возможным пренебрежение этим членом. Однако, вопрос о том, в каких случаях фактически можно пренебречь диссипативными процессами в жидкости, не имеет общего ответа, так как соответствующие условия существенно зависят от конкретного характера движения; например, они совершенно различны для стационарных и нестационарных движений.

В обратном предельном случае плохо проводящей жидкости, $\mathrm{R}_m \ll 1$, система магнитогидродинамических уравнений допускает существенное упрощение (*С.И. Брагинский*, 1959).

Дело в том, что в этом случае возмущение магнитного поля движением жидкости мало. Если невозмущенное поле $\mathfrak{H}$ не зависит от времени (что и предполагается ниже), то его изменение $\mathbf{H}'$ в движущейся жидкости можно оценить из сравнения двух членов в правой части уравнения (66.1):

$$\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathfrak{H}] \sim \nu_m \Delta\mathbf{H}',$$

откуда $H' \sim \mathrm{R}_m\mathfrak{H}$ и при $\mathrm{R}_m \ll 1$ действительно $H' \ll \mathfrak{H}$. Пренебрегая этим изменением, можно считать магнитное поле $\mathbf{H}$ совпадающим с тем ($\mathfrak{H}$), которое было бы создано внешними источниками в пустоте. При этом, ввиду постоянства $\mathfrak{H}$, имеем $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathfrak{H}/\partial t \equiv 0$, т. е. электрическое поле потенциально: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Уравнение для потенциала φ можно получить из равенства $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, удовлетворяющегося тождественно при пренебрежении током смещения (т. е. в силу уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$). Подставив сюда плотность тока в виде

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathfrak{H}]\right)$$

и заметив, что для невозмущенного поля $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0$, получим (при $\sigma = \text{const}$) уравнение

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c}\mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathbf{v}. \tag{66.11}$$

Вторым уравнением является уравнение Навье–Стокса

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f} \tag{66.12}$$

(выписываем его для несжимаемой жидкости), в котором объемная плотность сторонних сил

$$\mathbf{f} = \frac{1}{v}[\mathbf{j}\mathfrak{H}] = \frac{\sigma}{c}\left\{[\mathfrak{H}\nabla\varphi] + \frac{1}{c}[\mathfrak{H}[\mathfrak{H}\mathbf{v}]]\right\}. \tag{66.13}$$

Уравнения (66.11)–(66.13) и составляют искомую систему.

§ 67. Магнитогидродинамическое течение между параллельными плоскостями

Поучительный пример магнитогидродинамического движения вязкой проводящей жидкости представляет стационарное течение в пространстве между двумя параллельными твердыми плоскостями, причем в перпендикулярном плоскостям направлении приложено однородное магнитное поле $\mathfrak{H}$ (*J. Hartmann*, 1937). Это движение — простейший аналог пуазейлевого течения в обычной гидродинамике.

Естественно предположить, что скорость жидкости имеет везде одинаковое направление (которое выберем в качестве оси x); она зависит только от координаты z в направлении, перпендикулярном к твердым плоскостям. То же относится и к возникающему благодаря движению жидкости продольному полю H_x. Давление же P зависит также и от x, так как в направлении движения имеется градиент давления, поддерживающий стационарное течение. Уравнение $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ выполняется тождественно, а из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ следует, что $H_z = \text{const} = \mathfrak{H}$. В силу z-компоненты уравнения (66.9) сумма

$$P + \frac{H_x^2}{8\pi}$$

является функцией только x. Поскольку в то же время H_x от x не зависит, то градиент давления dP/dx мог бы быть функцией только x, а фактически (ввиду однородности вдоль оси x) равен постоянной величине $-\Delta P/l$ (ΔP — падение давления на длине l).

Далее, x-компоненты уравнений (66.8), (66.9) дают

$$\mathfrak{H}\frac{dv}{dz} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{d^2H_x}{dz^2} = 0, \tag{67.1}$$

$$\eta\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{dH_x}{dz} = \text{const} \equiv -\frac{\Delta P}{l}. \tag{67.2}$$

Граничные условия на твердых поверхностях требуют равенства нулю скорости вязкой жидкости, а также непрерывности тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля:

$$v = 0, \quad H_x = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm a,$$

где $2a$ — расстояние между твердыми плоскостями, а плоскость $z = 0$ расположена посередине между ними. Удовлетворяющее этим условиям решение уравнений (67.1), (67.2) есть

$$\begin{gathered} v = v_0\frac{\operatorname{ch}(a/\delta) - \operatorname{ch}(z/\delta)}{\operatorname{ch}(a/\delta) - 1}, \quad \delta = \frac{c}{\mathfrak{H}}\sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}, \\ H_x = -v_0\frac{4\pi}{c}\sqrt{\sigma\eta}\,\frac{(z/a)\operatorname{sh}(a/\delta) - \operatorname{sh}(z/\delta)}{\operatorname{ch}(a/\delta) - 1}. \end{gathered} \tag{67.3}$$

Постоянная v_0 есть скорость жидкости в средней плоскости $z = 0$. Ее связь с градиентом давления можно получить, подставив (67.3) в (67.2). Средняя (по сечению) скорость жидкости

$$\overline{v} = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} v\,dz = \frac{\Delta P}{l}\frac{a\delta}{\eta}\left(\operatorname{cth}\frac{a}{\delta} - \frac{\delta}{a}\right). \tag{67.4}$$

Критерием степени влияния магнитного поля на течение жидкости по сравнению с влиянием вязкости оказывается величина

$$\mathrm{G} = \frac{a}{\delta} = \frac{a\mathfrak{H}}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \tag{67.5}$$

(ее называют *числом Гартманна*). При $\mathrm{G} \ll 1$ получается

$$v = v_0\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right), \quad \overline{v} = \frac{\Delta P}{l}\frac{a^2}{3\eta}, \tag{67.6}$$

т. е. обычное пуазейлево течение. Если же $\mathrm{G} \gg 1$, то

$$v = v_0\left[1 - \exp\left(-\frac{a - |z|}{\delta}\right)\right], \quad \overline{v} = \frac{\Delta P}{l}\frac{ac}{\mathfrak{H}\sqrt{\sigma\eta}}. \tag{67.7}$$

Увеличение магнитного поля делает профиль скоростей более плоским на большей части сечения и уменьшает среднюю скорость движения (при заданном градиенте давления); основное падение скорости происходит в пристеночных слоях с толщиной $\sim \delta$.

Движение жидкости приводит к появлении электрического поля в направлении оси y. В силу стационарности движения $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, откуда $E_y = \text{const}$. В жидкости текут токи с плотностью

$$j_y = \sigma\left(E_y - \frac{v}{c}\mathfrak{H}\right).$$

Но полный ток через сечение жидкости должен быть равен нулю; действительно, поскольку в то же время $j_y = (c/4\pi)(\operatorname{rot}\mathbf{H})_y$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} j_y\,dz = \frac{c}{4\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\partial H_x}{\partial z}\,dz = \frac{c}{4\pi}[H_x(a) - H_x(-a)] = 0.$$

Поэтому имеем

$$\int\limits_{-a}^{a} j_y\,dz = 2a\sigma E_y - \frac{\sigma}{c}\mathfrak{H}\int\limits_{-a}^{a} v\,dz = 0,$$

откуда

$$E_y = \frac{\overline{v}}{c}\mathfrak{H}. \qquad (67.8)$$

§ 68. Равновесные конфигурации

Равновесие идеально проводящей жидкости (будем говорить здесь для определенности о плазме), покоящейся в постоянном магнитном поле, описывается уравнениями

$$\nabla P = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}], \qquad (68.1)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}, \qquad (68.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \qquad (68.3)$$

Первое из них — уравнение (65.4), в котором положено $\mathbf{v} = 0$ и введена, для наглядности, плотность электрического тока, связанная с магнитным полем уравнением Максвелла (68.2). Мы рассмотрим в этом параграфе некоторые общие свойства равновесных конфигураций, являющиеся следствием этих уравнений, совершенно не вдаваясь в сложные и многообразные вопросы об их устойчивости [1]).

Умножив уравнение (68.1) скалярно на $\mathbf{H}$ или на $\mathbf{j}$, найдем, что

$$(\mathbf{H}\nabla)P = 0, \quad (\mathbf{j}\nabla)P = 0, \qquad (68.4)$$

[1]) Основные результаты, относящиеся к этому вопросу (в рамках магнитной гидродинамики), можно найти в статье *Б.Б. Кадомцева* «Гидромагнитная устойчивость плазмы» в сб. «Вопросы теории плазмы». В. 2. — М.: 1963.

т. е. равны нулю производные давления вдоль магнитных силовых линий и вдоль линий тока. Другими словами, те и другие лежат на поверхностях

$$P(x, y, z) = \text{const}; \tag{68.5}$$

их называют *магнитными поверхностями.* В принципе, каждая магнитная поверхность могла бы быть границей равновесной конфигурации [1]).

Уравнение равновесия (68.1), (68.2) можно представить также и в виде

$$\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \Pi_{ik} = P\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{1}{2}H^2\delta_{ik}\right), \tag{68.6}$$

если исходить из уравнения движения, записанного в виде уравнения сохранения импульса (65.7), (65.8). Умножив это уравнение на x_k, проинтегрируем его по некоторому объему, ограниченному замкнутой поверхностью. Преобразовав интеграл по частям и заметив, что $\partial x_k/\partial x_i = \delta_{ik}$, получим [2])

$$\int \Pi_{ii}\, dV = \oint \Pi_{ik} x_k\, df_i. \tag{68.7}$$

После подстановки выражения Π_{ik} из (68.6) это равенство принимает вид

$$\int \left(3P + \frac{H^2}{8\pi}\right) dV = \oint \left\{\left(P + \frac{H^2}{8\pi}\right)\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{Hr})\mathbf{H}}{4\pi}\right\} d\mathbf{f} \tag{68.8}$$

(*S. Chandrasekhar*, *E. Fermi*, 1953).

Пусть плазма занимает некоторый конечный объем, вне которого давление $P = 0$, и пусть вне ее нет никаких заданных источников поля (жестких проводников с током). Тогда вдали от плазмы поле убывает как $1/r^3$, и если распространить интегрирование по всему пространству, то интеграл по поверхности обращается в нуль. Но интеграл от заведомо положительной величины $3P + H^2/(8\pi)$ не может обратиться в нуль. Отсюда следует невозможность существования ограниченной в пространстве равновесной конфигурации, не поддерживаемой магнитным полем от внешних источников; при наличии же таких источников правая часть равенства (68.8) сведется к интегралу по их поверхности и условие может, в принципе, быть удовлетворено (*В.Д. Шафранов*, 1957).

---

[1]) Давление P определяется уравнениями (68.1), (68.2) лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Поэтому любая из магнитных поверхностей может быть поверхностью $P = 0$.

[2]) Этот вывод подобен известному выводу теоремы вириала — см. II, § 34.

Рассмотрим простейшую неограниченную конфигурацию — неограниченно длинный цилиндрический *плазменный шнур* (или *пинч* [1])), однородный вдоль своей длины; в цилиндрической системе координат r, φ, z с осью z вдоль оси шнура все величины в нем зависят только от радиальной координаты r. Радиальная компонента H_r должна быть равна нулю; в противном случае в силу уравнения

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH_r) = 0, \quad H_r = \frac{\text{const}}{r},$$

она обращалась бы в бесконечность при $r \to 0$. Тоже самое относится к j_r в силу уравнения $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, автоматически следующего из (68.2).

Равенство (68.2), написанное в компонентах, дает

$$j_\varphi = -\frac{c}{4\pi}\frac{dH_z}{dr}, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r}\frac{d}{dr}(rH_\varphi).$$

Из второй формулы имеем

$$H_\varphi = \frac{2J(r)}{cr}, \quad J(r) = \int_0^r j_z \cdot 2\pi r\,dr. \tag{68.9}$$

После этого уравнения (68.1) принимает вид

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{1}{2\pi c^2 r^2}\frac{dJ^2(r)}{dr} + \frac{1}{8\pi}\frac{dH_z^2}{dr}. \tag{68.10}$$

Здесь возможны два существенно различных частных случая. В одном из них (его называют *z-пинчем*) $H_z = 0$, $j_\varphi = 0$. Умножив уравнение (68.10) на r^2 и проинтегрировав его по r от 0 до радиуса шнура a (с граничным условием $P(a) = 0$), получим условие равновесия в виде

$$\int_0^a P(r)\cdot 2\pi r\,dr = \frac{J^2(a)}{2c^2}, \tag{68.11}$$

где $J(a)$ — полный ток вдоль шнура (*W. Bennett*, 1934). Удержание равновесной конфигурации осуществляется в этом случае полем продольного тока.

В другом случае (*тэта-пинч* [2])): $H_\varphi = 0$, $j_z = 0$. Из (68.10) имеем в этом случае

$$P + \frac{H_z^2}{8\pi} = \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, \tag{68.12}$$

где $\mathfrak{H}$ — продольное магнитное поле вне шнура. Удержание плазмы осуществляется здесь внешним продольным полем.

---

[1]) От английского слова to pinch — сжимать.

[2]) Название происходит от угла в цилиндрических координатах, часто обозначаемого буквой θ.

В произвольной ограниченной в пространстве аксиально-симметричной конфигурации радиальные компоненты H_r и j_r могут быть отличны от нуля (в тороидальной конфигурации). Кроме того, все величины могут теперь зависеть не только от r, но и от z.

Уравнения (68.1)–(68.3), записанные в компонентах, принимают вид

$$j_\varphi H_z - j_z H_\varphi = c\frac{\partial P}{\partial r}, \quad j_r H_\varphi - j_\varphi H_r = c\frac{\partial P}{\partial z}, \quad j_z H_r = j_r H_z, \tag{68.13}$$

$$j_r = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi), \quad j_\varphi = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right), \tag{68.14}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \tag{68.15}$$

Очевидное (уже из векторной записи (68.1)) следствие этих уравнений: если плотность тока распределена *азимутально* ($j_r = j_z = 0$, $j_\varphi \neq 0$), то магнитное поле *меридионально* ($H_\varphi = 0$). Если же магнитное поле азимутально, то можно сделать и более сильное утверждение: плотность тока не только меридиональна, но и вся равновесная конфигурация может быть только z-пинчем ($j_r = 0$, H_φ и j_z не зависят от z); в этом легко убедиться, исключив P из первых двух уравнений (68.13) и воспользовавшись затем остальными уравнениями.

Систему уравнений (68.13)–(68.15) можно свести всего к одному уравнению (*В.Д. Шафранов*, 1957; *H. Grad*, 1958).

Для этого введем величины

$$\psi(r,z) = \int_0^r H_z \cdot 2\pi r\, dr, \quad J(r,z) = \int_0^r j_z \cdot 2\pi r\, dr \tag{68.16}$$

— магнитный поток и полный ток через круг радиуса r, перпендикулярный к оси z. Из этих определений и уравнений $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ находим меридиональные компоненты поля и плотности тока:

$$\begin{aligned} H_r &= -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad & H_z &= \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ j_r &= -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial J}{\partial z}, \quad & j_z &= \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial J}{\partial r}. \end{aligned} \tag{68.17}$$

Эти выражения показывают, что градиенты ψ и J ортогональны соответственно магнитной силовой линии и линии тока. Вспомнив сказанное в начале параграфа о поверхностях (68.5), заключаем отсюда, что величины ψ и J постоянны на магнитных поверхностях, а тем самым — каждые две из величин ψ, J, P могут быть выражены в функции только от третьей. В частности,

$$P = P(\psi), \quad J = J(\psi). \tag{68.18}$$

Азимутальные компоненты поля и тока выражаются через ψ и J с помощью уравнений (68.14)

$$H_\varphi = \frac{2J}{cr}, \quad j_\varphi = -\frac{c}{8\pi^2 r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right). \tag{68.19}$$

Наконец, подставив полученные выражения в первое из уравнений (68.13), найдем искомое уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -16\pi^3 r^2\frac{dP}{d\psi} - \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{dJ^2}{d\psi}. \tag{68.20}$$

Задаваясь конкретной (произвольно выбранной) зависимостью $P(\psi)$ и $J(\psi)$ и решив это уравнение, получим некоторую, в принципе возможную равновесную конфигурацию; распределение поля и токов в ней определяется формулами (68.17) и (68.19), а магнитные поверхности даются равенствами $\psi(r,z) = \mathrm{const}$.

Для иллюстрации приведем выражение

$$\frac{\psi}{\psi_0} = \frac{1}{2}(bR^2 + r^2)z^2 + \frac{a-1}{8}(r^2 - R^2)^2, \tag{68.21}$$

являющееся решением уравнения (68.20) при $dP/d\psi = \mathrm{const}$ и $dJ^2/d\psi = \mathrm{const}$; ψ_0, a, b, R — постоянные, причем

$$16\pi^3\frac{dP}{d\psi} = -a\psi_0, \quad \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{dJ^2}{d\psi} = -bR^2\psi_0.$$

Это решение описывает тороидальную конфигурацию, состоящую из вложенных друг в друга тороидальных магнитных поверхностей $\psi = \mathrm{const}$; любая из них может быть принята за границу плазмы, $P = 0$. Самая внутренняя поверхность вырождается в линию — в окружность $r = R$, $z = 0$ (эту линию называют *магнитной осью*). Вблизи магнитной оси

$$\frac{\psi}{\psi_0} \approx \frac{1}{2}R^2(b+1)z^2 + \frac{1}{2}R^2(a-1)(r-R)^2.$$

Так, если $b+1>0$, $a>1$, то сечения магнитных поверхностей вблизи оси — эллипсы. При удалении от оси ψ возрастает, а давление падает. Снаружи от поверхности с $P = 0$ (граница плазмы) необходимое для поддержания равновесия магнитное поле определяется уравнением (68.20) без правой части, с граничными условиями непрерывности функции ψ и ее нормальной производной.

§ 69. Магнитогидродинамические волны

Рассмотрим распространение малых возмущений в однородной проводящей среде, находящейся в однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{H}_0$. При этом будем рассматривать жидкость как идеальную, т. е. пренебрежем всеми процессами диссипации в ней [1]).

Исходим из системы магнитогидродинамических уравнений (65.1)–(65.4). Уравнение же адиабатичности (65.6) означает лишь, что если невозмущенная среда однородна, то и в возмущенной среде будет $s = \text{const}$, т. е. движение изэнтропично.

Полагаем

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad P = P_0 + P',$$

где индексом 0 отмечены постоянные равновесные значения величин, а $\mathbf{h}$, ρ', P' — их малые изменения в волне. Малой того же порядка является и скорость $\mathbf{v}$, равная нулю в равновесии. Ввиду изэнтропичности движения изменения плотности и давления связаны друг с другом равенством

$$P' = u_0^2 \rho',$$

где $u_0^2 = (\partial P/\partial \rho)_s$ — квадрат обычной скорости звука в данной среде. Пренебрегая в уравнениях (65.1)–(65.4) малыми величинами порядка выше первого, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{gathered}\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{h}], \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{u_0^2}{\rho}\nabla\rho' - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{h}].\end{gathered} \tag{69.1}$$

Здесь и ниже для краткости обозначений индекс 0 у равновесных значений величин опускается.

Ищем решение этих уравнений в виде плоской волны $\sim e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$. Тогда система (69.1) сводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}-\omega\mathbf{h} = [\mathbf{k}[\mathbf{v}\mathbf{H}]], \quad \omega\rho' = \rho\mathbf{k}\mathbf{v}, \\ -\omega\mathbf{v} + \frac{u_0^2}{\rho}\rho'\mathbf{k} = -\frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}[\mathbf{k}\mathbf{h}]]\end{gathered} \tag{69.2}$$

(равенство же $\mathbf{kh} = 0$, следующее из $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$, выполняется автоматически и может отдельно не рассматриваться).

---

[1]) Условие допустимости такого пренебрежения состоит в малости коэффициента затухания волн, который вычислен в задаче к этому параграфу.

Первое из уравнений (69.2) показывает, что вектор **h** перпендикулярен к волновому вектору, направление которого выберем в качестве оси x. Плоскость же, проходящую через **k** и **H**, выберем в качестве плоскости xy. Кроме того, введем фазовую скорость волны $u = \omega/k$. Исключив ρ' из третьего уравнения с помощью второго и переписав уравнения в компонентах, получим следующую систему:

$$uh_z = -v_z H_x, \quad uv_z = -\frac{H_x}{4\pi\rho} h_z, \tag{69.3}$$

$$\begin{gathered} uh_y = v_x H_y - v_y H_x, \quad uv_y = -\frac{H_x}{4\pi\rho} h_y, \\ \left(u - \frac{u_0^2}{u}\right) v_x = \frac{H_y}{4\pi\rho} h_y. \end{gathered} \tag{69.4}$$

Мы разбили здесь уравнения на две группы, из которых первая содержит только переменные h_z, v_z, а вторая — только h_y, v_x, v_y. Отсюда следует, что возмущения этих двух групп переменных распространяются независимо друг от друга. Что касается возмущений плотности (а с нею и давления), то они распространяются вместе с возмущениями h_y, v_x, v_y, будучи связаны с v_x соотношением

$$\rho' = \frac{\rho}{u} v_x. \tag{69.5}$$

Условие совместности двух уравнений (69.3) дает

$$u = \frac{|H_x|}{\sqrt{4\pi\rho}} \equiv u_{\mathrm{A}} \tag{69.6}$$

(ниже будем считать, что $H_x > 0$ и опускать знак модуля). В этих волнах испытывает колебания компонента h_z магнитного поля, перпендикулярная к направлению распространения волны и направлению постоянного поля **H**. Вместе с h_z колеблется скорость v_z, связанная с h_z посредством

$$v_z = -\frac{h_z}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{69.7}$$

Связь между ω и **k** (*закон дисперсии*), даваемая формулой (69.6), существенно зависит от направления волнового вектора

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \mathbf{Hk}. \tag{69.8}$$

Физической же скоростью распространения волн является групповая скорость — производная $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$. В данном случае она равна

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} \tag{69.9}$$

и не зависит от направления **k**; направление распространения волны, понимаемое как направление ее групповой скорости, совпадает с направлением поля **H**. Эти волны называют *альвеновскими* (*H. Alfvén*, 1942), а скорость (69.6) — *альвеновской скоростью.*

Обратимся к волнам, описываемым уравнениями (69.4); их называют *магнитозвуковыми.* Составив определитель уравнений (69.4) и приравняв его нулю, получим квадратное по u^2 уравнение, корни которого:

$$u^2_{\delta,\text{ м}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{H^2}{4\pi\rho} + u_0^2 \pm \left[\left(\frac{H^2}{4\pi\rho} + u_0^2\right)^2 - \frac{H_x^2}{\pi\rho}u_0^2\right]^{1/2}\right\}. \qquad (69.10)$$

Таким образом, мы получаем еще два типа волн; волны, отвечающие знакам + и − в формуле (69.10), называют соответственно *быстрой* и *медленной магнитозвуковыми.*

В предельном случае, когда $H^2 \ll 4\pi\rho u_0^2$, имеем $u_б \approx u_0$, а из уравнений (69.4) следует, что $v_y \ll v_x$. Другими словами, быстрые магнитозвуковые волны в пределе переходят в обычные звуковые волны, распространяющиеся со скоростью u_0. Слабое поперечное магнитное поле в волне связано с v_x соотношением

$$h_y \approx \frac{v_x H_y}{u_0}.$$

В том же предельном случае скорость медленной магнитозвуковой волны совпадает с альвеновской скоростью u_A. При этом

$$v_x \approx 0, \quad v_y \approx -\frac{h_y}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

как и в волне первого типа, но только с другой поляризацией: векторы **v** и **h** лежат в плоскости, проходящей через **k** и **H**, а не перпендикулярно к ней.

В несжимаемой жидкости (чему формально соответствует предельный переход $u_0 \to \infty$) остается всего один тип волн — альвеновские с двумя независимыми направлениями поляризации. Закон дисперсии для этих волн дается формулой (69.8), а векторы **v** и **h** перпендикулярны к волновому вектору и связаны соотношением

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}. \qquad (69.11)$$

Тот факт, что при наличии продольного магнитного поля поперечные смещения жидкости распространяются в ней в виде волн, может быть наглядно истолкован. Ввиду «вмороженности» силовых линий, поперечное смещение частиц жидкости приводит к их искривлению и тем самым к растяжению и, в некоторых местах, сгущению. Но характер действующих в магнитном поле сил

(выражаемых максвелловским тензором напряжений) таков, как если бы магнитные силовые линии стремились сокращаться и в то же время отталкиваться друг от друга[1]). Поэтому при их искривлении появляются квазиупругие силы, стремящиеся вновь выпрямить их, что и приводит к возникновению колебаний.

Обратимся снова к формулам (69.4) и (69.10) и рассмотрим обратный предельный случай, когда $H^2 \gg 4\pi\rho u_0^2$. Для $u_б$ имеем тогда в первом приближении

$$u_б = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Поскольку это выражение не зависит от $\mathbf{k}$, то групповая скорость совпадает по величине с $u_б$ и направлена вдоль $\mathbf{k}$. Вектор $\mathbf{v}$ в этой волне перпендикулярен к $\mathbf{H}$ (рис. 40) и его абсолютная величина связана с $h = |h_y|$ соотношением

$$v = \frac{h}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Для $u_м$ имеем в этом случае

$$u_м = u_0 \frac{H_x}{H}.$$

При этом групповая скорость

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = u_0 \frac{\mathbf{H}}{H}.$$

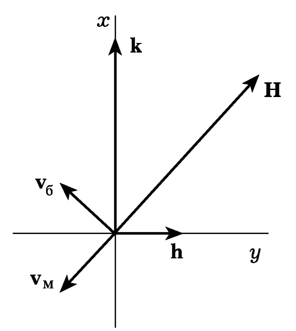


Рис. 40

Вектор $\mathbf{v}$ в этой волне антипараллелен $\mathbf{H}$, а по величине связан с h соотношением

$$v = h\frac{H^2}{4\pi\rho u_0 H_y}.$$

При произвольном соотношении между H^2 и ρu_0^2 как $u_б$, так и $u_м$ зависят от направления волнового вектора. При увеличении угла между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$, $u_б$ монотонно возрастает, а $u_м$ монотонно убывает. Легко видеть, что всегда имеют место неравенства

$$u_м \leqslant u_А \leqslant u_б, \quad u_б \geqslant u_0, \quad u_м \leqslant u_0. \tag{69.12}$$

Если $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$, то $u_б$ и $u_м$ равны соответственно большей и меньшей из величин u_0 и $u_А = H/\sqrt{4\pi\rho}$. Если же $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$, то имеем

$$u_б = \sqrt{u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}}, \tag{69.13}$$

[1]) Действительно, пусть силовая линия совпадает с осью z. Тогда продольное напряжение Π_{zz} (65.8) содержит отрицательный член $-H^2/(8\pi)$, а поперечные Π_{xx}, Π_{yy} — положительный член $H^2/(8\pi)$.

а $u_{\rm A}$ и $u_{\rm M}$ обращаются в нуль, т. е. остаются лишь быстрые магнитозвуковые волны.

Наконец, рассмотрим два точных решения уравнений магнитной гидродинамики в виде плоской волны произвольной (не обязательно малой) амплитуды.

Одно из них — плоская альвеновская волна в несжимаемой жидкости, распространяющаяся со скоростью $u_{\rm A}$, т. е. являющаяся функцией x и t только в комбинации $x - u_{\rm A}t$. Действительно, обратимся к точным уравнениям (65.1)–(65.4). Уравнение непрерывности (65.3) в несжимаемой жидкости сводится к $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, откуда $v_x = \text{const}$; без ограничения общности можно положить $v_x = 0$, что сводится к надлежащему выбору системы отсчета. Из уравнения же $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ следует, что $H_x = \text{const}$. Обозначив поперечные компоненты $\mathbf{H}$ через $\mathbf{h}$, получим из уравнений (65.2) и (65.4)

$$\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} = H_x\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial x},$$

т. е. точные уравнения автоматически сводятся к линейным уравнениям, описывающим плоскую волну с фазовой скоростью (69.6), причем $\mathbf{v}$ и $\mathbf{h}$ связаны соотношением (69.11); профиль волны, т. е. зависимость $\mathbf{h}(x - u_{\rm A}t)$, произволен. Для x-компоненты уравнения (65.4) имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{h}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$P + \frac{h^2}{8\pi} = \text{const}, \tag{69.14}$$

чем определяется ход изменения давления в волне.

Другой случай — простая волна, распространяющаяся перпендикулярно к магнитному полю (*С.А. Каплан, К.П. Станюкович*, 1954). Пусть поле направлено вдоль оси y; ось x — по-прежнему в направлении распространения волны. Тогда $H_x = 0$, $H_y = H$ и уравнение $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ удовлетворяется автоматически. Уравнения же (65.2)–(65.4) дают

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(v_x H)}{\partial x} = 0, \tag{69.15}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(v_x\rho)}{\partial x} = 0, \tag{69.16}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{8\pi\rho}\frac{\partial H^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{69.17}$$

Из первых двух уравнений следует, как легко убедиться, что отношение $H/\rho = b$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x\frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

или $db/dt = 0$, где полная производная означает изменение величины при перемещении данного элемента жидкости. Отсюда следует, что если в начальный момент отношение b было постоянно, то и в дальнейшем будет $b = \text{const}$. Подставив $H = \rho b$ в третье уравнение, получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{b^2}{8\pi}\rho^2\right). \tag{69.18}$$

Таким образом, магнитное поле исключается из уравнений, и задача сводится к решению уравнений (69.16) и (69.18). Но эти уравнения отличаются от уравнений одномерного движения в обычной гидродинамике лишь изменением уравнения состояния газа; вместо истинного уравнения $P = P(\rho)$ (при заданной энтропии s) надо пользоваться уравнением

$$P^*(\rho) = P(\rho) + \frac{b^2}{8\pi}\rho^2.$$

Это обстоятельство позволяет перенести на рассматриваемый случай магнитогидродинамического движения все результаты обычной гидродинамики. В частности, переносятся формулы точного решения для одномерных бегущих волн (риманово решение — простые волны; см. VI, § 101), причем роль скорости звука в них будет играть

$$u^* = \left(\frac{\partial P^*}{\partial \rho}\right)_s^{1/2} = \sqrt{u_0^2 + \frac{b^2}{4\pi}\rho} = \sqrt{u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}},$$

в соответствии с формулой (69.13).

З а д а ч а

Определить коэффициент поглощения альвеновской волны (предполагая его малым) в несжимаемой жидкости.

Р е ш е н и е. Коэффициент поглощения волны определяется как

$$\gamma = \frac{\overline{Q}}{2\overline{q}},$$

где $\overline{Q}$ — среднее (по времени) значение энергии, диссипируемой в 1 с в 1 см^3, а $\overline{q}$ — средняя плотность потока энергии в волне; амплитуда волны убывает по мере ее распространения пропорционально $e^{-\gamma x}$. Диссипация Q дается правой частью уравнения (66.3); в несжимаемой жидкости для волны, распространяющейся вдоль оси x (соответственно чему $v_x = 0$), имеем

$$Q = \eta\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right)^2 + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x}\right)^2.$$

В плотности же потока энергии (66.5) малые диссипативные члены опускаем и имеем

$$q_x = -\frac{1}{4\pi}H_x \mathbf{hv}.$$

Используя формулы (69.6) и (69.11), получим в результате

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2u_{\text{A}}^3}\left(\frac{\eta}{\rho} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right).$$

§ 70. Условия на разрывах

Как и в обычной гидродинамике, уравнения движения идеальной магнитогидродинамической среды допускают разрывные течения. Для выяснения условий, которые должны выполняться на поверхности разрыва, рассмотрим какой-либо элемент этой поверхности и воспользуемся системой координат, движущейся вместе с ним [1]).

Прежде всего на поверхности разрыва должен быть непрерывен поток вещества: количество газа, входящего с одной стороны, должно быть равно количеству газа, выходящему с другой стороны поверхности. Это значит, что

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n},$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум сторонам разрыва, а индекс n означает нормальную к поверхности составляющую вектора. Ниже мы будем обозначать разность значений какой-либо величины с обеих сторон поверхности разрыва фигурными скобками. Таким образом,

$$\{\rho v_n\} = 0.$$

Далее, должен быть непрерывен поток энергии. Воспользовавшись выражением (65.11), получим

$$\{q_n\} = \left\{\rho v_n\left(\frac{v^2}{2} + w\right) + \frac{1}{4\pi}[v_n H^2 - H_n(\mathbf{vH})]\right\} = 0.$$

Должен быть непрерывен также и поток импульса. Это условие означает, что $\{\Pi_{ik}n_k\} = 0$, где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности. С помощью (65.8) получим отсюда уравнения

$$\left\{P + \rho v_n^2 + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}_t^2 - H_n^2)\right\} = 0,$$

$$\left\{\rho v_n \mathbf{v}_t - \frac{1}{4\pi}H_n\mathbf{H}_t\right\} = 0,$$

где индексом t отмечены тангенциальные к поверхности составляющие векторов.

---

[1]) Этим условием система координат фиксируется лишь в отношении своей скорости в направлении, нормальном к поверхности. К касательной же ее скорости может еще быть добавлен произвольный постоянный вектор.

Наконец, непрерывны нормальная составляющая магнитного поля и тангенциальная составляющая электрического поля. При бесконечной проводимости среды индукционное электрическое поле $\mathbf{E} = -[\mathbf{vH}]/c$. Поэтому условие $\{\mathbf{E}_t\} = 0$ дает

$$\{H_n \mathbf{v}_t - \mathbf{H}_t v_n\} = 0.$$

Ниже нам будет часто удобнее пользоваться вместо плотности газа его удельным объемом $V = 1/\rho$. Плотность же потока массы через разрыв обозначим через j:

$$j = \rho v_n = \frac{v_n}{V}. \tag{70.1}$$

Учитывая непрерывность j и H_n, остальные граничные условия можно написать в следующем виде:

$$j\left\{w + \frac{j^2V^2}{2} + \frac{\mathbf{v}_t^2}{2} + \frac{V\mathbf{H}_t^2}{4\pi}\right\} = \frac{H_n}{4\pi}\{\mathbf{H}_t\mathbf{v}_t\}, \tag{70.2}$$

$$\{P\} + j^2(V) + \frac{1}{8\pi}\{\mathbf{H}_t^2\} = 0, \tag{70.3}$$

$$j\{\mathbf{v}_t\} = \frac{H_n}{4\pi}\{\mathbf{H}_t\}, \tag{70.4}$$

$$H_n\{\mathbf{v}_t\} = j\{V\mathbf{H}_t\}. \tag{70.5}$$

Это и есть основная система уравнений, описывающих разрывы в магнитной гидродинамике.

§ 71. Тангенциальные и вращательные разрывы

В обычной гидродинамике возможны, как известно, разрывы двух различных типов — ударные волны и тангенциальные разрывы. Возникновение двух типов разрывов связано математически с тем, что некоторые из граничных условий оказывается возможным представить в виде равенства нулю произведения двух множителей; приравнивая нулю каждый из множителей в отдельности, мы получаем два независимых решения.

В магнитной же гидродинамике уравнения (70.2)–(70.5) не имеют такого вида, и на этом основании можно было бы думать, что имеется всего один единый тип разрывов, охватывающий все возможные частные случаи. В действительности, однако, оказывается, что и здесь существуют различные типы разрывов, не являющиеся частными случаями один другого (*F. Hoffmann, E. Teller*, 1950).

Рассмотрим прежде всего такие разрывы, в которых $j = 0$. Это значит, что и $v_{1n} = v_{2n} = 0$, т. е. жидкость движется параллельно поверхности разрыва. Если при этом $H_n \neq 0$, то из уравнений (70.2)–(70.5) видно, что должны быть непрерывны

скорость, давление и магнитное поле. Произвольный же скачок может испытывать плотность (а также энтропия, температура и т. п.). Такой разрыв, который можно назвать *контактным*, представляет собой просто границу раздела между двумя неподвижными средами с различными плотностями и температурами.

Если же при $j = 0$ также и $H_n = 0$, то из четырех уравнений (70.2)–(70.5) тождественно удовлетворяются сразу три; уже отсюда ясно, что этот случай является особым. Таким образом, мы находим тип разрывов, которые можно назвать, как и в обычной гидродинамике, *тангенциальными*. На таком разрыве скорость и магнитное поле касательны к его поверхности и испытывают произвольные по величине и направлению скачки:

$$j = 0, \quad H_n = 0, \quad \{\mathbf{v}_t\} \neq 0, \quad \{\mathbf{H}_t\} \neq 0. \tag{71.1}$$

Произволен также скачок плотности, а скачок давления связан со скачком $\mathbf{H}_t$ уравнением (70.3):

$$\{V\} \neq 0, \quad \left\{P + \frac{\mathbf{H}_t^2}{8\pi}\right\} = 0. \tag{71.2}$$

Скачки же других термодинамических величин (энтропии, температуры и т. д.) определяются по скачкам V и P с помощью уравнения состояния газа.

Другим типом разрывов являются разрывы, в которых плотность газа не испытывает скачка. Ввиду непрерывности потока $j = v_n/V$ из отсутствия скачка плотности сразу следует, что будет непрерывной и нормальная составляющая скорости:

$$j \neq 0, \quad \{V\} = 0, \quad \{v_n\} = 0. \tag{71.3}$$

Далее, в правой части уравнения (70.5) выносим V за фигурные скобки и, разделив почленно уравнения (70.5) и (70.4) друг на друга, получаем

$$j = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi V}}. \tag{71.4}$$

После этого уравнение (70.4) или (70.5) дает

$$\{\mathbf{v}_t\} = \sqrt{\frac{V}{4\pi}}\{\mathbf{H}_t\}. \tag{71.5}$$

В уравнении (70.2) пишем $w = \varepsilon + PV$; учитывая непрерывность V, заменив H_n согласно (71.4) и произведя перегруппировку членов, перепишем его в виде

$$j\{\varepsilon\} + jV\left\{P + \frac{1}{8\pi}\mathbf{H}_t^2\right\} + \frac{j}{2}\left\{\left(\mathbf{v}_t - \sqrt{\frac{V}{4\pi}}\mathbf{H}_t\right)^2\right\} = 0.$$

Второй член здесь обращается в нуль в силу равенства (70.3), а третий — в силу (71.5), так что остается $\{\varepsilon\}=0$, т. е. наряду с плотностью непрерывна также и внутренняя энергия. Но всякая другая термодинамическая величина однозначно определяется заданием двух величин — ε и V. Поэтому непрерывны и все остальные термодинамические величины, в том числе давление. Из уравнения же (70.3) следует тогда, что непрерывен также квадрат H_t^2, т. е. абсолютная величина вектора $\mathbf{H}_t$:

$$\{P\} = 0, \quad \{H_t\} = 0. \tag{71.6}$$

Одновременная непрерывность H_t и H_n означает, что остаются неизменными также полная абсолютная величина вектора $\mathbf{H}$ и угол, образуемый им с нормалью к поверхности.

Формулы (71.3)–(71.6) определяют все свойства рассматриваемых разрывов. На них непрерывны термодинамические величины газа, а магнитное поле поворачивается вокруг направления нормали, оставаясь неизменным по своей абсолютной величине. Вместе с вектором $\mathbf{H}_t$ испытывает скачок касательная составляющая скорости (согласно (71.5)), а нормальная составляющая скорости $v_n = jV$ непрерывна и равна

$$v_n = H_n\sqrt{\frac{V}{4\pi}} = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{71.7}$$

Разрывы этого типа называют *вращательными* или *альвеновскими*.

Заметим, что путем соответствующего выбора системы координат всегда можно добиться, чтобы с обеих сторон поверхности вращательного разрыва скорость газа была параллельна полю. Для этого достаточно перейти к новой системе координат (см. примеч. на с. 350), движущейся относительно исходной со скоростью, равной

$$\mathbf{v}_{1t} - \mathbf{H}_{1t}\sqrt{\frac{V}{4\pi}} = \mathbf{v}_{2t} - \mathbf{H}_{2t}\sqrt{\frac{V}{4\pi}}.$$

В этой новой системе координат с обеих сторон разрыва отношения всех трех составляющих $\mathbf{v}$ к соответствующим компонентам $\mathbf{H}$ одинаковы:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1\sqrt{\frac{V}{4\pi}}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2\sqrt{\frac{V}{4\pi}}. \tag{71.8}$$

Другими словами, скорость поворачивается вместе с магнитным полем, оставаясь неизменной по величине и по углу, образуемому ею с нормалью.

Скорость v_n, взятая с обратным знаком, есть в то же время скорость распространения разрыва относительно жидкости.

Она совпадает с фазовой скоростью ($u_{\rm A}$) альвеновских волн. Тот факт, что это совпадение имеет место для любого вращательного разрыва, до известной степени случаен, но при малых скачках величин на разрыве такое совпадение обязательно. Действительно, такой разрыв представляет собой слабое возмущение, в котором скорость $\mathbf{v}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$ получают малые приращения, перпендикулярные к плоскости, проходящей через $\mathbf{H}$ и нормаль к поверхности $\mathbf{n}$. Это возмущение относится как раз к тому типу, который обладает фазовой скоростью $u_{\rm A}$. Физической скоростью распространения поверхности фронта малого возмущения является проекция групповой скорости на нормаль к ней, т. е. на волновой вектор $\mathbf{k}$. Но ввиду линейности связи ω с $\mathbf{k}$ имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\mathbf{k} = \omega,$$

и потому указанная проекция совпадает с фазовой скоростью $\omega/k = u_{\rm A}$.

Хотя тангенциальные и вращательные разрывы представляют собой различные типы разрывов, но существуют разрывы, которые обладают одновременно свойствами тех и других. Таковы разрывы, на которых $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ тангенциальны и лишь поворачиваются, не меняясь по абсолютной величине.

Как известно, в обычной гидродинамике тангенциальные разрывы всегда неустойчивы по отношению к бесконечно малым возмущениям, что приводит к их быстрому размыванию в турбулентные области. Магнитное же поле оказывает стабилизирующее влияние на движение проводящей жидкости, и тангенциальные разрывы в ней могут оказаться устойчивыми. Это обстоятельство является естественным следствием того, что поперечные (по отношению к полю) смещения жидкости при возмущении связаны с растяжением «вмороженных» магнитных силовых линий и тем самым приводят к возникновению сил, стремящихся восстановить невозмущенное движение.

Выясним условия устойчивости для тангенциального разрыва в несжимаемой жидкости (*С.И. Сыроватский*, 1953).

Пишем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{1,2} + \mathbf{v}', \quad P = P_{1,2} + P', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{1,2} + \mathbf{H}',$$

где $\mathbf{v}_{1,2}$, $P_{1,2}$, $\mathbf{H}_{1,2}$ — постоянные (с каждой из сторон разрыва) невозмущенные значения величин, а $\mathbf{v}'$, P', $\mathbf{H}'$ — их малые возмущения. Подставив в уравнения (66.7)–(66.9), получим для идеальной жидкости:

$$\operatorname{div}\mathbf{u}' = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}' = 0, \tag{71.9}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t} = (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v}' - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u}', \tag{71.10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho}\nabla P' - [\mathbf{u}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}'] =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\nabla(P' + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}') + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}'; \quad (71.11)$$

для краткости здесь и ниже опускаем индексы 1, 2 и вводим обозначение $\mathbf{u} = \mathbf{H}/\sqrt{4\pi\rho}$. Применив к уравнению (71.11) операцию div и учитывая (71.9), получим

$$\Delta(P' + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}') = 0. \quad (71.12)$$

Пусть $x = 0$ есть плоскость разрыва; векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ параллельны ей. В каждом из полупространств $x > 0$ и $x < 0$ ищем все величины $\mathbf{v}'$, $\mathbf{u}'$ ρ в виде, пропорциональном $\exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t) + \varkappa x\}$, где $\mathbf{k}$ — двумерный вектор в плоскости yz. Из уравнения (71.12) найдем, что $k^2 = \varkappa^2$, так что надо положить $\varkappa = k$ на стороне $x < 0$ и $\varkappa = -k$ на стороне $x > 0$. Далее, из x-компонент уравнений (71.10), (71.11) исключаем v'_x и находим

$$P' + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}' = -u'_x \frac{i\rho}{\varkappa(\mathbf{ku})}[(\omega - \mathbf{kv})^2 - (\mathbf{ku})^2] \quad (71.13)$$

(случай, когда выражение в квадратных скобках обращается в нуль, нас не интересует, так как при этом ω вещественно, а неустойчивость может быть связана лишь с комплексными значениями ω).

Пусть $\zeta(x, y, z)$ есть смещение вдоль оси x поверхности разрыва при возмущении. На смещенной поверхности должны выполняться условия (71.1), (71.2):

$$\{P + P' + \rho(\mathbf{u} + \mathbf{u}')^2\} \approx \{P' + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}'\} = 0,$$
$$u_{1n} + u'_{1n} \approx u'_{1x} - (\mathbf{u}_1\nabla)\zeta = 0,$$
$$u_{2n} + u'_{2n} \approx u'_{2x} - (\mathbf{u}_2\nabla)\zeta = 0$$

(условие отсутствия потока жидкости через поверхность разрыва выполняется при этом автоматически). Положив

$$\zeta = \mathrm{const} \cdot e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$$

и исключив ζ, u_{1x}, u_{2x} из написанных трех уравнений, получим уравнение, определяющее возможные значения ω:

$$(\omega - \mathbf{kv}_1)^2 + (\omega - \mathbf{kv}_2)^2 = (\mathbf{ku}_1)^2 + (\mathbf{ku}_2)^2.$$

Это квадратное уравнение не имеет комплексных корней, если

$$2(\mathbf{ku}_1)^2 + 2(\mathbf{ku}_2)^2 - (\mathbf{kv})^2 > 0$$

или

$$[2u_{1i}u_{1k} + 2u_{2i}u_{2k} - v_i v_k]k_i k_k > 0,$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ — скачок скорости на разрыве.

Эта квадратичная форма положительна, если положительны след и определитель тензора второго ранга, стоящего в квадратных скобках. Отсюда получаются искомые условия устойчивости [1])

$$H_1^2 + H_2^2 > 2\pi\rho v^2, \quad [\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2]^2 \geqslant 2\pi\rho\left([\mathbf{H}_1\mathbf{v}]^2 + [\mathbf{H}_2\mathbf{v}]^2\right). \quad (71.14)$$

Фактически, однако, благодаря наличию у жидкости малых, но все же конечных вязкости и электрического сопротивления тангенциальный разрыв не будет оставаться таковым в течение неограниченно долгого времени, даже если условия (71.14) выполнены. Хотя турбулентность при этом и не возникает, но вместо резкого разрыва получается постепенно расширяющаяся переходная область, в которой скорость и магнитное поле плавно меняются от одного своего значения к другому.

В этом легко убедиться на основании уравнений движения (66.8), (66.9), сохранив в них диссипативные члены. Выберем направление нормали к разрыву в качестве оси x. Предполагая все величины зависящими только от координаты x (и, возможно, от времени), напишем поперечные составляющие этих уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2 \mathbf{H}_t}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial x^2} \quad (71.15)$$

(жидкость предполагаем несжимаемой). Если предположить движение стационарным, то левые части этих уравнений заменяются нулями. Но тогда единственное решение, остающееся конечным при $x \to \pm\infty$, есть просто $\mathbf{H}_t = \mathrm{const}$, $\mathbf{v}_t = \mathrm{const}$, в противоречии с предположением о наличии скачка значений этих величин. Таким образом, тангенциальный разрыв не может иметь стационарной ширины (как ее имеет, например, слабая ударная волна). Уравнения (71.15) имеют вид уравнения теплопроводности. Как известно из теории теплопроводности, разрыв величины, описываемый этим уравнением, с течением времени размывается в переходную область, ширина которой растет пропорционально квадратному корню из времени. Ввиду различия коэффициентов в двух уравнениях (71.15), ширины δ_v и δ_H областей изменения скорости и поля будут различны:

$$\delta_v \sim (\nu t)^{1/2}, \quad \delta_H \sim \left(\frac{c^2 t}{\sigma}\right)^{1/2}. \quad (71.16)$$

[1]) Если плотности несжимаемых сред с двух сторон разрыва различны, то в этих условиях ρ заменяется на $2\rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2)$.

Что касается вращательных разрывов, то они оказываются устойчивыми (в несжимаемой жидкости) по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых значениях магнитного поля (*С.И. Сыроватский*, 1953). Однако, как и тангенциальные разрывы, они не могут иметь стационарной ширины и под влиянием вязкости и электрического сопротивления среды расширяются со временем (см. задачу).

Задача

Найти закон расширения со временем вращательного разрыва.

Решение. Предполагая все величины зависящими только от координаты x (и времени), найдем из уравнений $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, что $v_x = \text{const}$, $H_x = \text{const}$. Пусть система координат выбрана так, что значения $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ по обеим сторонам разрыва (т. е. вдали от переходного слоя) связаны соотношениями (71.8); тогда $v_x = ux$ (с тем же обозначением $\mathbf{u}$, что и в (71.9)–(71.11)). Для поперечных составляющих $\mathbf{u}_t$ и $\mathbf{v}_t$ имеем из (66.8), (66.9) уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} = u_x \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial x^2},\\ \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x} = u_x \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial x^2}.\end{gathered} \tag{1}$$

Поскольку при $x = \pm\infty$ разность $\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t$ обращается в нуль в силу соотношений (71.8), то внутри переходного слоя она мала по сравнению с суммой $\mathbf{v}_t + \mathbf{u}_t$. Сложив уравнения (1), мы можем поэтому пренебречь членом с $\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t$ и получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_t + \mathbf{u}_t) = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} + \nu\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{v}_t + \mathbf{u}_t).$$

Отсюда видно, что ширина разрыва меняется по закону

$$\delta \sim \left[\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} + \nu\right)t\right]^{1/2}.$$

§ 72. Ударные волны

Перейдем к следующему типу разрывов, в котором

$$j \neq 0, \quad \{V\} \neq 0. \tag{72.1}$$

Эти разрывы, как и в обычной гидродинамике, называют *ударными волнами*. Они характеризуются наличием скачка плотности и тем, что газ движется сквозь них (v_{n1} и v_{n2} отличны от нуля). Что касается нормальной компоненты магнитного поля, то она, вообще говоря, отлична от нуля, но в частном случае может быть и $H_n = 0$.

Сравнив уравнения (70.4) и (70.5), мы видим, что (при $H_n \neq 0$) векторы $\mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1}$ и $V_2\mathbf{H}_{t2} - V_1\mathbf{H}_{t1}$ параллельны одному и тому же вектору $\mathbf{v}_{t2} - \mathbf{v}_{t1}$ и потому параллельны между

собой. Отсюда в свою очередь следует коллинеарность $\mathbf{H}_{t1}$ и $\mathbf{H}_{t2}$, т. е. векторы $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ и нормаль к поверхности разрыва лежат в одной плоскости — в противоположность тангенциальным и альвеновским разрывам, в которых плоскости $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{n}$, вообще говоря, не совпадают. Этот результат справедлив и в случае $H_n = 0$, когда из (70.5) следует, что $V_1\mathbf{H}_{t1} = V_2\mathbf{H}_{t2}$ (этот случай будет более подробно рассмотрен в конце параграфа).

Скачок $\mathbf{v}_{t2} - \mathbf{v}_{t1}$ расположен в той же плоскости, что и $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$. Не ограничивая общности, можно считать, что и сами векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ лежат в той же плоскости, так что движение в ударной волне является по своей природе плоским. Более того, легко видеть, что путем соответствующего преобразования системы координат, можно (при $H_n \neq 0$) добиться того, чтобы с обеих сторон поверхности разрыва векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ были коллинеарны. Для этого надо перейти к новой системе координат, движущейся относительно первоначальной со скоростью

$$\mathbf{v}_t - \frac{v_n}{H_n}\mathbf{H}_t = \mathbf{v}_t - \frac{jV}{H_n}\mathbf{H}_t$$

(значения этой величины с обеих сторон разрыва одинаковы в силу граничного условия (70.5)). В следующих ниже формулах мы, однако, не будем предполагать этого специального выбора системы координат.

Выведем соотношение, играющее для ударных волн в магнитной гидродинамике роль адиабаты Гюгонио обычной гидродинамики. Исключив $\{\mathbf{v}_t\}$ из двух уравнений (70.4), (70.5), получим соотношение

$$j^2\{VH_t\} = \frac{H_n^2}{4\pi}\{H_t\}; \qquad (72.2)$$

мы пишем здесь H_t вместо $\mathbf{H}_t$, имея уже в виду коллинеарность $\mathbf{H}_{t1}$ и $\mathbf{H}_{t2}$ [1]). Для того чтобы исключить $\mathbf{v}_t$ из уравнения (70.2), переписываем его тождественно в следующем виде:

$$\{w\} + \frac{j^2}{2}\{V^2\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\mathbf{v}_t - \frac{H_n}{4\pi j}\mathbf{H}_t\right)^2\right\} + \\ + \frac{1}{4\pi}\{VH_t^2\} - \frac{1}{32\pi^2 j^2}H_n\{H_t^2\} = 0.$$

Третий член обращается в нуль в силу уравнения (70.4) и, таким образом, $\mathbf{v}_t$ выпадает. В последнем члене подставляем j^2 из

[1]) При этом, однако, векторы $\mathbf{H}_{t1}$ и $\mathbf{H}_{t2}$ могли бы быть направлены как в одну и ту же, так и в противоположные стороны, и в этом смысле H_{t1} и H_{t2} могли бы иметь как одинаковые, так и различные знаки. Лишь в дальнейшем (§ 73) мы увидим из других соображений, что фактически эти знаки должны быть одинаковыми.

(72.2), а в первом — из (70.3), т. е.

$$j^2 = \frac{P_2 - P_1 + (H_{t2}^2 - H_{t1}^2)/8\pi}{V_1 - V_2}. \tag{72.3}$$

После простых вычислений получим тогда окончательно

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{1}{2}(P_2 + P_1)(V_2 - V_1) + \frac{1}{16\pi}(V_2 - V_1)(H_{t2} - H_{t1})^2 = 0. \tag{72.4}$$

Это и есть искомое уравнение *ударной адиабаты* в магнитной гидродинамике. Оно отличается от обычного уравнения третьим членом.

Выпишем здесь еще раз также уравнение (70.4):

$$\mathbf{v}_{t2} - \mathbf{v}_{t1} = \frac{H_n}{4\pi j}(\mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1}), \tag{72.5}$$

определяющее скачок $\mathbf{v}_t$ по скачку $\mathbf{H}_t$. Уравнения (72.2)–(72.5) составляют полную систему уравнений, описывающих ударные волны. Ниже мы условимся приписывать индекс 1 той среде, в сторону которой волна распространяется; другими словами, сам газ проходит со стороны 1 перед ударной волной на сторону 2 позади нее. Напомним также, что мы условились пользоваться системой координат, в которой данный элемент поверхности разрыва покоится, а газ движется через него.

В обычной гидродинамике справедлива теорема Цемплена (см. VI, § 87), согласно которой в ударной волне давление и плотность увеличиваются:

$$P_2 > P_1, \quad \rho_2 > \rho_1; \tag{72.6}$$

другими словами, ударная волна — волна сжатия. При этом предполагается, что

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_s > 0; \tag{72.7}$$

хотя это неравенство — не термодинамическое, оно выполняется практически всегда. Теорема Цемплена является следствием закона возрастания энтропии.

Легко видеть, что теорема Цемплена остается справедливой и в магнитной гидродинамике для ударных волн слабой интенсивности — при одном только условии (72.7). В слабой ударной волне скачки всех величин малы. Разложив уравнение (72.4) по степеням скачков давления и энтропии, получим

$$T(s_2 - s_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_s (P_2 - P_1)^3 - \\ - \frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s (P_2 - P_1)(H_{t2} - H_{t1})^2; \tag{72.8}$$

первый член отвечает обычной гидродинамике (см. VI, § 86). Поскольку $-(\partial V/\partial P)_s > 0$ согласно одному из термодинамических неравенств, то согласно требованию $s_2 - s_1 > 0$ из (72.8) следует неравенство $P_2 > P_1$ и, соответственно, $V_2 < V_1$.

Если помимо (72.7) положителен также и коэффициент теплового расширения, $(\partial V/\partial T)_P > 0$, то теорему Цемплена в магнитной гидродинамике можно доказать сведением к доказательству в обычной гидродинамике, без предположения о малости скачков всех величин (*Р.В. Половин*, *Г.Я. Любарский*, 1958; *С.В. Иорданский*, 1958).

Пусть P_1, V_1 — заданное начальное состояние газа, и пусть $s_2^{(0)}$ — энтропия в конечном состоянии газа при заданном значении V_2 в отсутствие магнитного поля. Энтропию же в конечном состоянии газа при тех же значениях P_1, V_1, V_2 в присутствии магнитного поля обозначим как $s_2^{(H)}$. В обычной гидродинамике из $V_2 > V_1$ следует $s_2^{(0)} < s_1$, что означает невозможность волны разрежения. Покажем, что (в указанных выше условиях) $s_2^{(H)} < s_2^{(0)}$, так что тем более $s_2^{(H)} < s_1$; тем самым будет доказана невозможность волн разрежения и в магнитной гидродинамике.

Дифференцируем уравнение (72.4) по P_2 при постоянном V_2. Используя равенство $(\partial\varepsilon/\partial P)_V = T(\partial s/\partial P)_V$, получим

$$T_2\left(\frac{\partial s_2^{(H)}}{\partial P_2}\right)_{V_2} + \frac{1}{2}(V_2 - V_1) + \left(\frac{\partial Q}{\partial P_2}\right)_{V_2} = 0, \qquad (72.9)$$

где обозначено

$$Q = \frac{1}{16\pi}(V_2 - V_1)(H_{t2} - H_{t1})^2.$$

Ввиду термодинамических соотношений

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_V = \frac{T}{c_v}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

знак первого члена в (72.9) совпадает со знаком $(\partial V/\partial T)_P$ и, по предположению, положителен. Поэтому если $V_2 > V_1$, то $(\partial Q/\partial P_2)_{V_2} < 0$. Наличие магнитного поля вызывает увеличение Q (без поля $Q = 0$, а с полем $Q > 0$) и, следовательно, — уменьшение P_2 (при заданном V_2). Поскольку, по предположению, $(\partial s/\partial P)_V > 0$, то отсюда, в свою очередь, следует $s_2^{(H)} < s_2^{(0)}$, что и требовалось доказать.

Наконец, рассмотрим уже упомянутый в начале параграфа случай, когда магнитное поле с обеих сторон поверхности раз-

рыва лежит в тангенциальной к ней плоскости $H_n = 0$ (*перпендикулярная ударная волна*). Из (72.5) имеем в этом случае $\mathbf{v}_{t2} = \mathbf{v}_{t1}$, т. е. тангенциальная составляющая скорости остается непрерывной. Соответствующим выбором системы координат можно поэтому всегда добиться, чтобы с обеих сторон разрыва было $\mathbf{v}_t = 0$, т. е. газ двигался бы перпендикулярно к разрыву; будем считать это сделанным. Далее, из уравнения (72.2) имеем

$$V_2 H_2 = V_1 H_1.$$

Имея в виду это соотношение, легко убедиться в том, что уравнения (72.3), (72.4) могут быть написаны в виде

$$j^2 = \frac{P_2^* - P_1^*}{V_1 - V_2},$$

$$\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^* + \frac{1}{2}(P_2^* + P_1^*)(V_2 - V_1) = 0,$$

отличающемся от обычных уравнений для ударных волн в отсутствие магнитного поля лишь изменением уравнения состояния; вместо истинного уравнения $P = P(V, s)$ надо пользоваться уравнением $P^* = P^*(V, s)$, где

$$P^* = P + \frac{b^2}{8\pi V^2},$$

а буквой b обозначено постоянное произведение HV. Соответственно, ε^* должно быть определено так, чтобы выполнялось термодинамическое соотношение $(\partial\varepsilon^*/\partial V)_s = -P^*$, откуда

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \frac{b^2}{8\pi V}.$$

§ 73. Условие эволюционности ударных волн

Для возможности реального существования гидродинамический разрыв должен быть устойчив относительно расщепления на два или более других разрывов. Это условие можно иначе сформулировать как требование, чтобы любое бесконечно малое возмущение начального состояния приводило бы лишь к бесконечно малым же изменениям разрыва; удовлетворяющие этому требованию разрывы называют *эволюционными*. Подчеркнем, что свойство эволюционности отнюдь не совпадает с устойчивостью в обычном смысле этого слова. Обычная неустойчивость означает постепенное возрастание начального малого возмущения, приводящее в конце концов к разрушению данного режима движения; но даже при экспоненциальном (как $e^{\gamma t}$, $\gamma > 0$) возрастании в течение достаточно малого промежутка времени ($t \lesssim 1/\gamma$) возмущение остается малым. В неэволюционном

же разрыве возмущение сразу делается большим (хотя при малых t оно и занимает еще малую область пространства). Это иллюстрируется рисунком, на котором изображено расщепление скачка плотности $\rho(x)$ на два последовательных скачка (рис. 41); возмущение $\delta\rho$ не мало́, хотя и занимает при малых t (когда оба разрыва еще не разошлись на заметное расстояние) лишь малый интервал δx.

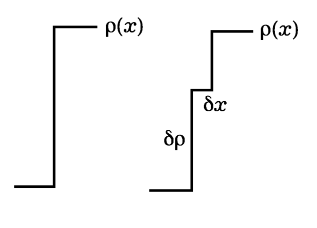


Рис. 41

Критерий эволюционности можно получить путем подсчета числа независимых параметров, определяющих произвольное начальное (при $t = 0$) малое возмущение разрыва, и числа уравнений (линеаризованных граничных условий на разрыве), которым они должны удовлетворять. Разрыв эволюционен, если оба числа одинаковы; тогда граничные условия однозначно определяют дальнейшее развитие возмущения, которое при малых $t > 0$ останется малым[1]). Если же число уравнений больше или меньше числа неизвестных параметров, то задача о малом возмущении разрыва не имеет решения вовсе или имеет их бесконечное множество. Ни то, ни другое невозможно, и такая ситуация будет свидетельствовать о неправомерности исходного допущения (малость возмущения при малых t); разрыв неэволюционен.

В обычной гидродинамике требование эволюционности ударных волн не приводит к каким-либо дополнительным ограничениям по сравнению с условием возрастания энтропии: ударные волны, допускаемые теоремой Цемплена, автоматически эволюционны (см. VI, § 88). В магнитной гидродинамике это не так, и требование эволюционности налагает новые существенные ограничения на характер изменения величин в ударной волне (*А.И. Ахиезер*, *Г.Я. Любарский*, *Р.В. Половин*, 1958).

Приступая к фактическому выяснению условия эволюционности магнитогидродинамических ударных волн, подсчитаем прежде всего число уравнений, которым должно удовлетворять произвольное малое возмущение на поверхности разрыва.

Будем представлять себе ударную волну как плоскую и выберем ее плоскость в качестве плоскости yz. Положительное направление оси x выберем в сторону движения газа через поверхность разрыва. Невозмущенные поля H_1, H_2 и скорости газа v_1, v_2 по обе стороны разрыва пусть лежат в плоскости xy.

---

[1]) При этом волна может быть как неустойчивой (если среди собственных частот уравнений имеются комплексные с положительной мнимой частью), так и устойчивой (если таких частот нет).

С каждой стороны поверхности разрыва подвергаются возмущению семь величин: три компоненты скорости жидкости (v_x, v_y, v_z), две компоненты магнитного поля (H_y, H_z), плотность $\rho = 1/V$ и энтропия s. Возмущения остальных термодинамических величин (P, w) определяются возмущениями ρ и s. В силу уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = \partial H_x/\partial x = 0$ продольная компонента поля H_x постоянна вдоль оси x и возмущению не подвергается. Кроме того, возмущению подвергается скорость распространения самой ударной волны, т. е. у нее появляется малая скорость (обозначим ее через δU) по отношению к выбранной системе координат (в которой невозмущенный разрыв покоится). Эта скорость, однако, может быть сразу выражена через возмущения ρ и v_x из условия непрерывности плотности потока массы j через разрыв. Действительно, скорость газа относительно разрыва есть

$$v_{x0} + \delta v_x - \delta U,$$

где v_{x0} — невозмущенная скорость, δv_x — ее возмущение; написав также $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, линеаризовав граничное условие $\{j\} = 0$ и опустив затем индекс 0 у невозмущенных величин, получим

$$\{\delta j\} = \{\rho \delta v_x\} + \{v_x \delta\rho\} - \delta U\{\rho\} = 0,$$

откуда определяется δU.

Линеаризация граничных условий непрерывности компоненты Π_{zx} потока импульса и компоненты E_y электрического поля (т. е. z-компонент уравнений (70.4), (70.5)) дает два уравнения

$$\left\{\rho v_x \delta v_z - \frac{1}{4\pi} H_x \delta H_z\right\} = 0, \quad \{H_x \delta v_z - v_x \delta H_z\} = 0$$

(напомним, что невозмущенные значения $v_z = 0$, $H_z = 0$). Эти уравнения содержат возмущения только двух величин:

$$\delta v_z, \quad \delta H_z. \tag{73.1}$$

Граничные же условия непрерывности потока энергии q_x, компонент Π_{xx}, Π_{yx} потока импульса и компоненты E_z электрического поля (т. е. уравнения (70.2), (70.3) и y-компоненты уравнений (70.4), (70.5)) дают четыре линейных уравнения, которые содержат возмущения

$$\delta v_x, \quad \delta v_y, \quad \delta H_y, \quad \delta\rho, \quad \delta s; \tag{73.2}$$

мы не будем выписывать их здесь.

Подсчитаем теперь число параметров, определяющих возмущение ударной волны. Возмущения, зависящие от времени как $e^{-i\omega t}$, распространяются в обе стороны от разрыва в виде магнитогидродинамических волн трех видов (альвеновские, быстрые

и медленные магнитозвуковые) и в виде энтропийной волны; последняя представляет собой малое возмущение энтропии, которое (в силу адиабатичности течения газа) переносится вместе с самим газом, с его скоростью. При этом все эти волны должны, конечно, быть уходящими — распространяться влево или вправо от разрыва. В каждой волне изменения всех величин связаны друг с другом определенными соотношениями (как это было показано в § 69); поэтому каждая волна определяется всего одним параметром — амплитудой какой-либо одной величины.

Магнитозвуковые и энтропийные волны переносят возмущения (73.2), а альвеновские волны — возмущения (73.1). Поскольку уравнения для этих двух групп возмущений разделяются, то условие эволюционности должно быть выполнено для каждой из них в отдельности (*С.И. Сыроватский*, 1958); это обстоятельство еще усиливает возникающие ограничения.

Рассмотрим сначала условия эволюционности относительно альвеновских возмущений. Оно требует, чтобы число уходящих волн равнялось двум — по числу уравнений. Фазовые скорости альвеновских волн относительно поверхности разрыва могут быть равны

$$u_{x1} \pm u_{A1}, \quad v_{x2} \pm u_{A2},$$

где u_A — фазовая скорость (69.6) волны относительно газа. По условленному выбору направления оси x скорости газа $v_{x1}, v_{x2} > 0$. В области *1* перед разрывом волна уходит от него, если ее фазовая скорость (относительно разрыва) отрицательна, а в области *2* позади разрыва — если она положительна. Волна со скоростью $v_{x1} + u_{A1}$ этому условию никогда не удовлетворяет (она всегда приходящая), а волна со скоростью $v_{x1} - u_{A1}$ — уходящая при $v_{x1} < u_{A1}$. Аналогичным образом волна со скоростью $v_{x2} + u_{A2}$ всегда уходящая, а со скоростью $v_{x2} - u_{A2}$ — уходящая при $v_{x2} > u_{A2}$. Поэтому существуют две области эволюционности относительно альвеновских волн:

$$1)\ v_{x1} > u_{A1}, \quad v_{x2} > u_{A2},$$
$$2)\ v_{x1} < u_{A1}, \quad v_{x2} < u_{A2}.$$

Эти области отмечены на рис. 42 вертикальной штриховкой; рисунок построен с учетом неравенств

$$u_м < u_A < u_б. \qquad (73.3)$$

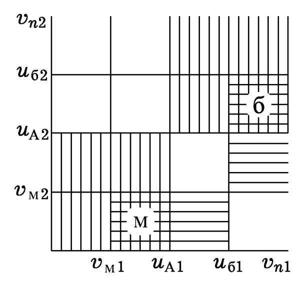


Рис. 42

Условие эволюционности по отношению к магнитозвуковым и энтропийным возмущениям требует, чтобы число уходящих волн было равно четырем. Уходящая энтропийная волна, перемещающаяся вместе с газом, всегда существует, но только со стороны *2*. Число

уходящих магнитозвуковых волн должно поэтому быть равно трем. Рассуждения, подобные проведенным выше для альвеновских волн, приводят к двум областям эволюционности по отношению к рассматриваемой группе возмущений, показанных на рис. 42 горизонтальной штриховкой [1]).

Пересечение обеих штриховок определяет две области эволюционности относительно всех возмущений: 1) *быстрые ударные волны*, для которых

$$v_{n1} > u_{\text{б}1}, \quad u_{\text{б}2} > v_{n2} > u_{\text{A}2}, \tag{73.4}$$

и 2) *медленные ударные волны*, для которых

$$u_{\text{A}1} > v_{n1} > u_{\text{м}1}, \quad u_{\text{м}2} > v_{n2} \tag{73.5}$$

(мы вернулись к обозначению нормальной компоненты скорости газа как v_n вместо v_x). В предельном случае слабой интенсивности волны (малые скачки всех величин) быстрые и медленные ударные волны распространяются со скоростью соответственно $u_{\text{б}2} \approx u_{\text{б}1}$ и $u_{\text{м}2} \approx u_{\text{м}1}$.

Применим полученные условия эволюционности к выяснению характера изменения магнитного поля в ударной волне. Исходим из равенства (72.2)

$$\frac{H_n^2}{4\pi j^2}\{\mathbf{H}_t\} = \left\{\frac{\mathbf{H}_t}{\rho}\right\} = \frac{1}{j}\{v_n\mathbf{H}_t\}$$

или

$$\left(\frac{H_n^2}{4\pi j} - v_{n1}\right)\mathbf{H}_{t1} = \left(\frac{H_n^2}{4\pi j} - v_{n2}\right)\mathbf{H}_{t2}. \tag{73.6}$$

Заметив, что $H_n^2/(4\pi\rho) = u_{\text{A}}^2$, можно иначе переписать его в виде

$$\frac{u_{\text{A}1}^2 - u_{n1}^2}{v_{n1}}\mathbf{H}_{t1} = \frac{u_{\text{A}2}^2 - v_{n2}^2}{v_{n2}}\mathbf{H}_{t2}. \tag{73.7}$$

С учетом неравенств (73.4), (73.5) из (73.7) видно, что тангенциальные поля по обе стороны ударной волны не только коллинеарны, но и направлены в одну сторону.

В медленных ударных волнах с обеих сторон разрыва

$$v_n < \frac{H_n^2}{4\pi j} = \frac{v_{\text{A}}^2}{v_n}.$$

Заметив также, что из непрерывности потока массы, $\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}$, и из неравенства $\rho_1 < \rho_2$ следует, что

$$v_{n1} > v_{n2}, \tag{73.8}$$

[1]) Отметим, что среди областей неэволюционности существуют случаи, когда число параметров как больше, так и меньше числа уравнений, — по каждой из двух групп возмущений.

из (73.6) приходим к заключению, что $H_{t2} < H_{t1}$, т. е. в медленной ударной волне тангенциальное магнитное поле ослабляется. В быстрой же волне $v_n > H_n^2/(4\pi j)$ и из (73.6) следует, что $H_{t2} > H_{t1}$, т. е. тангенциальное магнитное поле усиливается.

Отметим частный случай ударных волн, в котором магнитное поле с обеих сторон поверхности разрыва параллельно нормали к ней. Как было указано в начале § 72, всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы с обеих сторон векторы **v** и **H** были параллельны друг другу. Тогда в рассматриваемом случае будет

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} = 0, \quad \mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} = 0$$

(*параллельная ударная волна*). Для такой волны граничные условия вообще не содержат магнитного поля, т. е. совпадают с граничными условиями для ударной волны в обычной гидродинамике. Наличие магнитного поля приводит, однако, к тому, что в определенном интервале значений параметров волны нарушаются условия эволюционности и такие волны становятся невозможными (см. задачу).

Что касается рассмотренных в конце предыдущего параграфа перпендикулярных ударных волн, то все такие волны сжатия эволюционны, причем они являются быстрыми волнами. Последнее очевидно уже из того, что при $H_n = 0$ скорости $u_{\mathrm{A}} = u_{\mathrm{м}} = 0$.

Рассмотрев различные типы разрывов в магнитной гидродинамике, остановимся еще на вопросе о возможности существования переходных случаев между этими типами, т. е. разрывов, которые обладали бы одновременно свойствами двух типов. Такие возможности сильно ограничены условиями, вытекающими из требования эволюционности.

Прежде всего альвеновский разрыв не может непрерывно перейти в ударную волну. Действительно, в ударной волне нормаль к поверхности разрыва и магнитное поле по обе ее стороны лежат в одной плоскости. Такая ударная волна может совпасть с альвеновским разрывом, только если в нем вектор **H** поворачивается на 180°. Но тогда тангенциальная компонента поля меняет знак, между тем как в эволюционной ударной волне она не меняет знака.

Между быстрой и медленной ударными волнами непрерывный переход был бы возможен только при $\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} = 0$, так как в быстрой волне поле $\mathbf{H}_t$ (если оно отлично от нуля) усиливается, а в медленной — ослабляется; другими словами, непрерывный переход мог бы быть только между параллельными быстрой и медленной волнами. Но области эволюционности этих волн соприкасаются только при $u_{\mathrm{A}1} = u_{01}$, когда медленная волна исчезает (см. задачу 1). Таким образом, непрерывный переход между быстрыми и медленными ударными волнами невозможен.

Быстрая волна не может непрерывно перейти в тангенциальный разрыв в силу неравенств (73.4).

Таким образом, возможны непрерывные переходы лишь между тангенциальным разрывом, с одной стороны, и контактным разрывом, альвеновским разрывом или медленной ударной волной — с другой.

З а д а ч и

1. Найти область значений v_1, в которой нарушается эволюционность параллельной ударной волны в идеальном (в термодинамическом смысле) одноатомном газе с отношением теплоемкостей $c_p/c_v = 5/3$.

Р е ш е н и е. Для указанного газа тепловая функция $w = 5P/(2\rho)$ и система граничных условий (70.1)–(70.3) принимает вид

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2,$$
$$v_1^2 + 5\frac{P_1}{\rho_1} = v_2^2 + 5\frac{P_2}{\rho_2}.$$

Отсюда находим

$$v_2 = \frac{v_1^2 + 3u_{01}^2}{4v_1}$$

(где $u_0 = (5P/3\rho)^{1/2}$ — обычная скорость звука) и далее:

$$u_{A2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}u_{A1} = \sqrt{\frac{v_1^2 + 3u_{01}^2}{2v_1}}u_{A1},$$
$$u_{02} = \frac{\sqrt{(5v_1^2 - u_{01}^2)(v_1^2 + 3u_{01}^2)}}{4v_1},$$
$$u_{б1} = \max(u_{01}, v_{A1}), \quad u_{м1} = \min(u_{01}, u_{A1}),$$
$$u_{б2} = \max(u_{02}, u_{A2}), \quad u_{м2} = \min(u_{02}, u_{A2}).$$

При $u_{A1} < u_{01}$ условия эволюционности всегда выполняются, причем ударная волна является быстрой. На рис. 43 изображен примерный вид зависимостей $v_2(v_1)$ (жирная линия) и $u_{A2}(v_1)$, $u_{б2}(v_1) = u_{02}(v_1)$ в этом случае; наклонная штрихпунктирная прямая — биссектриса прямого угла.

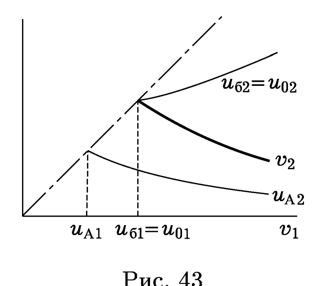


Рис. 43

Рис. 44

На рис. 44 изображена аналогичная диаграмма для случая $u_{A1} > u_{01}$. Тонкие линии — снова зависимости $u_{A2}(v_1)$ и $u_{02}(v_1)$; на различных участках этих линий указано, какая из скоростей, $u_{б2}$ или $u_{м2}$, с ними совпадает.

Жирная сплошная линия — зависимость $v_2(v_1)$ в областях эволюционности, причем левая ее часть отвечает медленным, а правая — быстрым ударным волнам. Жирная штриховая кривая — неэволюционный участок, занимающий интервал

$$u_{A1} < v_1 < \sqrt{4u_{A1}^2 - 3u_{01}^2};$$

он ограничен справа точкой, в которой $v_2 = u_{A2}$ [1]).

2. Впереди ударной волны тангенциальное магнитное поле $\mathbf{H}_{t1} = 0$, а позади $\mathbf{H}_{t2} \neq 0$ (такую ударную волну называют *волной включения*). Найти интервал значений скорости v_{n1}, которой может обладать такая волна в газе с теми же термодинамическими свойствами, как и в задаче 1.

Р е ш е н и е. Из (72.2) следует, что при $\mathbf{H}_{t1} = 0$ скорость волны относительно газа позади нее:

$$v_{n2} = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho_2}} = u_{A2},$$

а относительно газа впереди:

$$v_{n1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} v_{n2} = u_{A1}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} > u_{A1}.$$

Это волна — быстрая; v_{n1} и v_{n2} связаны друг с другом соотношением $v_{n1}v_{n2} = u_{A1}^2$ [2]).

Для волны включения в газе с указанными термодинамическими свойствами из граничных условий можно получить

$$\frac{H_{t2}^2}{8\pi} = \frac{\rho_1}{3u_{A1}^2}(v_{n1}^2 - u_{A1}^2)(4u_{A1}^2 - 3u_{01}^2 - v_{n1}^2).$$

Поскольку правая часть равенства должна быть положительна и поскольку $v_{n1} > u_{A1}$, то ясно, что возможные значения v_{n1} в волне включения ограничены интервалом

$$u_{A1} \leqslant v_{n1} \leqslant \sqrt{4u_{A1}^2 - 3u_{01}^2}.$$

Как видно из этих неравенств, волны включения возможны только при $u_{A1} > u_{01}$. На рис. 44 этим волнам отвечает отрезок тонкой сплошной линии, отмеченной буквами BB.

§ 74. Турбулентное динамо

Турбулентное движение проводящей жидкости обладает замечательным свойством: оно может приводить к самопроизвольной генерации сравнительно больших магнитных полей; об этом явлении говорят как о *турбулентном динамо*. В проводящей

---

[1]) Об отрезке линии BB — см. задачу 2.

[2]) *Волной выключения* называют ударную волну, в которой $\mathbf{H}_{t1} \neq 0$, $\mathbf{H}_{t2} = 0$. Она относится к медленным волнам; ее скорости

$$v_{n1} = u_{A1}, \quad v_{n2} = \sqrt{\rho_1/\rho_2}\,u_{A2} < u_{A2}, \quad v_{n1}v_{n2} = u_{A2}^2.$$

Может возникнуть сомнение в эволюционности волн включения и выключения; так, в волне включения $v_{n1} > u_{A1}$, и потому, казалось бы, от нее может отходить только одна альвеновская волна возмущений — со скоростью $v_{n2} + u_{A2} = 2u_{A2}$ назад. Не надо забывать, однако, что при наложении возмущения тангенциальное магнитное поле становится отличным от нуля.

жидкости всегда существуют малые возмущения, вызванные факторами, посторонними по отношению к самому движению жидкости, и сопровождающиеся появлением очень слабых электрических и магнитных полей (так, возмущения могут быть связаны с магнитомеханическим эффектом во вращающихся участках жидкости или даже с тепловыми флуктуациями). Вопрос заключается в дальнейшем поведении этих возмущений — будут ли они в результате турбулентного движения в среднем усиливаться со временем или же затухнут.

Ход изменения со временем раз возникнувших возмущений магнитного поля определяется игрой различных физических факторов. В направлении усиления поля действует специфический магнитогидродинамический эффект растяжения силовых линий. В § 65 было показано, что при движении жидкости (с достаточно большой проводимостью) магнитные силовые линии тоже перемещаются как «вмороженные» в нее, причем напряженность магнитного поля меняется пропорционально растяжению силовой линии в каждой ее точке. Но при турбулентном движении любые две близкие частицы жидкости с течением времени в среднем расходятся. В результате силовые линии растягиваются, а магнитное поле усиливается.

В направлении уменьшения поля действует диссипация магнитной энергии, выделяющейся в виде джоулева тепла индукционных токов. Поскольку диссипация энергии пропорциональна $(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2$, т. е. квадратична по пространственным производным поля, ясно, что для движения с достаточно большими пространственными масштабами изменения поля диссипация будет мала. Это еще отнюдь не означает, что поле на таких масштабах будет усиливаться. Дело в том, что упомянутое растяжение силовых линий сопровождается их «запутыванием», что приводит к уменьшению пространственного масштаба. Поэтому возможна ситуация, когда вместо усиления поля с данным масштабом возникает лишь поток энергии от турбулентных пульсаций с большими масштабами к пульсациям с меньшими масштабами; дойдя до достаточно малых масштабов, энергия диссипируется.

Именно такая ситуация имела бы место в случае «двумерной» турбулентности, когда скорость движения жидкости $\mathbf{v}$ везде параллельна одной и той же плоскости xy (*Я.Б. Зельдович*, 1956); подчеркнем, что генерируемое поле $\mathbf{H}$ при этом не предполагается двумерным. Покажем это.

Рассмотрим, прежде всего, эволюцию перпендикулярной по отношению к движению жидкости компоненты поля H_z. С учетом равенств $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ (в этом параграфе жидкость считаем несжимаемой!) z-компонента уравнения (66.1) принимает вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -(\mathbf{v}\nabla)H_z + \nu_m \Delta H_z; \tag{74.1}$$

в него входит только H_z. Первый член описывает просто перенос данного значения H_z вместе с элементом жидкости, к которому оно относится. Второй же член описывает «диффузионное» выравнивание значений H_z в разных точках жидкости. Очевидно, что ни тот, ни другой эффекты не могут привести к возрастанию H_z. Если начальное возмущение H_z занимает конечную область пространства, то вследствие «диффузии» с течением времени оно затухнет.

При доказательстве затухания компонент поля H_x, H_y можно положить $H_z = 0$, поскольку нам надо исключить именно возможность того, что эти компоненты останутся после затухания H_z [1]). Сделаем это при дополнительном ограничении, что все величины ($\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$) не зависят от координаты z [2]). Тогда вектор $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ направлен по оси z; то же самое относится к вектору $[\mathbf{vH}]$, а потому (как это видно из выражения (66.6)) по оси z направлено и электрическое поле $\mathbf{E}$. В таком случае можно описать электромагнитное поле с помощью векторного потенциала $\mathbf{A}$, направленного по оси z и не зависящего от координаты z:

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad E_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Подставив эти выражения в (66.6), получим, после простого преобразования, уравнение для A_z:

$$\frac{\partial A_z}{\partial t} = -(\mathbf{v}\nabla)A_z + \nu_m \Delta A_z, \tag{74.2}$$

точно совпадающее по виду с уравнением (74.1). Отсюда снова следует, что с течением времени возмущения A_z, а с ними и H_x, H_y, затухают.

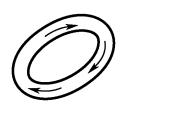
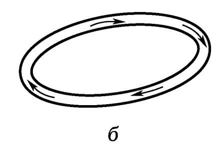
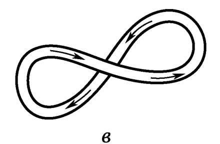
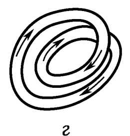
Таким образом, турбулентное динамо представляет собой существенно трехмерное явление. Для иллюстрации этого обстоятельства укажем следующий пример движения, приводящего к усилению поля без изменения его пространственного масштаба. Рассмотрим совокупность замкнутых магнитных силовых линий, вмороженных внутри некоторого тора в жидкости (рис. 45 *а*). Пусть при движении жидкости этот тор растянется по длине, скажем, вдвое (рис. 45 *б*); во столько же раз уменьшится площадь его сечения и увеличится величина магнитного поля. Далее, пусть при движении тор «скрутится» (рис. 45 *в*), а затем петли наложатся друг на друга (рис. 45 *г*). В результате получится конфигурация примерно тех же размеров, что и вначале, но

---

[1]) Последующими рассуждениями не исключается возможность возрастания поля на начальной стадии процесса.

[2]) Это предположение делается здесь только для упрощения и не имеет принципиального характера. Несколько более сложными рассуждениями можно доказать тот же результат и без этого ограничения.

с удвоенным значением поля в торе. Многократное повторение такого цикла приводит к неограниченному экспоненциальному усилению поля. Очевидно, что такое движение принципиально трехмерно.

а *б* *в* *г*

Рис. 45

Конечно, эта иллюстрация не является доказательством действительного существования турбулентного динамо; существуют еще и движения, дробящие масштабы поля. Для выяснения этого вопроса необходимо прямое исследование устойчивости турбулентного движения проводящей жидкости относительно малых начальных возмущений магнитного поля. На этом пути были получены веские указания на то, что при достаточно больших значениях магнитного числа Рейнольдса генерация магнитного поля действительно происходит[1]). Мы не будем излагать этих, достаточно сложных, исследований, а остановимся лишь на общем описании установившейся картины магнитогидродинамической турбулентности в предположении существования турбулентного динамо.

Как известно, турбулентное движение можно рассматривать как совокупность «турбулентных пульсаций» разных масштабов — начиная от основного, «внешнего», масштаба l до наименьшего, «внутреннего», масштаба λ_0. Первый совпадает с характеристическими длинами, определяющими размеры области, в которой происходит турбулентное движение. Второй же определяет порядок величины расстояний, на которых становится существенной диссипация энергии (см. VI, § 33). Говоря о стационарной турбулентности, мы имеем в виду постоянство ее средних характеристик: усредненных по промежуткам времени порядка величины периодов соответствующих пульсаций, но, конечно, малых по сравнению со всем временем наблюдения. Мы будем отличать индексом λ средние характеристики пульсаций масштаба λ; так, v_λ, H_λ — средние изменения скорости и поля на расстояниях $\sim \lambda$.

Утверждение о существовании турбулентного динамо означает, что на основном масштабе l существуют магнитные поля H_l, плотность энергии которых $H_l^2/(8\pi)$ сравнима с плотностью кинетической энергии жидкости $\rho v_l^2/2$. Другими словами, альве-

[1]) См. *Вайнштейн С.И.* // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. С. 2175; 1982. Т. 83. С. 161.

новская скорость в поле H_l,

$$u_{\text{A}} \sim \frac{H_l}{\sqrt{4\pi\rho}}, \qquad (74.3)$$

сравнима с основным масштабом гидродинамической скорости $v_l \equiv u$ (изменение средней скорости на расстояниях $\sim l$). Для масштабов же $\lambda \ll l$ поля $H_\lambda \ll H_l$ [1]).

Сразу же подчеркнем главное отличие магнитогидродинамической турбулентности от обычной. В последней движение с основным масштабом не сказывается существенным образом на свойствах мелкомасштабных пульсаций — оно приводит лишь к конвективному «сносу» последних. В магнитогидродинамическом же случае, напротив, поле H_l основного масштаба влияет на движения всех меньших масштабов.

Поскольку для масштабов $\lambda \ll l$ поле H_l можно считать локально однородным, а $H_\lambda \ll H_l$, то мелкомасштабное движение в этом случае есть не что иное, как совокупность магнитогидродинамических волн малой амплитуды с волновыми векторами $k \sim 1/\lambda$ и скоростями $\sim u_{\text{A}}$. Согласно (69.11) в этих волнах кинетическая энергия жидкости и магнитная энергия одинаковы. Другими словами, в мелкомасштабных пульсациях с большой точностью соблюдается равнораспределение между магнитной и кинетической энергиями:

$$\rho v_\lambda^2 \sim \frac{H_\lambda^2}{4\pi}. \qquad (74.4)$$

По порядку величины это соотношение можно экстраполировать к основному масштабу, где оно дает $u \sim u_{\text{A}}$ — в согласии с предположением.

Рассмотрим область значений масштабов λ в интервале

$$l \gg \lambda \gg \lambda_0. \qquad (74.5)$$

Следует иметь в виду, что вязкостная диссипация и джоулева диссипация могут, вообще говоря, становиться существенными при различных значениях λ, и в этом смысле в магнитогидродинамической турбулентности могут существовать два внутренних масштаба; под λ_0 в (74.5) подразумевается бо́льший из них, так что в области (74.5) (ее называют *инерционной*) нет никакой диссипации.

---

[1]) Мы интересуемся здесь генерацией турбулентного магнитного поля с характерными размерами пространственного изменения $\lesssim l$. Генерация «крупномасштабного» поля с характерными размерами $\gg l$, как оказывается, возможна, лишь если усредненные характеристики турбулентного движения не инвариантны относительно пространственной инверсии (этот случай здесь не рассматривается). Изложение соответствующей теории можно найти в книгах: *Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А.* Турбулентное динамо в астрофизике. — М.: Наука, 1980; *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980.

Введем, как и в теории обычной турбулентности, среднее количество энергии (обозначим ее через ε), диссипируемой в единицу времени в единице массы жидкости. Эта энергия черпается из крупномасштабного движения, откуда постепенно передается во все меньшие масштабы, пока не диссипируется в пульсациях масштабов $\lambda \lesssim \lambda_0$. Очевидно, что в инерционной области, где диссипация отсутствует, величина ε представляет собой в то же время постоянный (не зависящий от λ) поток энергии в направлении уменьшающихся масштабов. В обычной, чисто гидродинамической турбулентности можно было утверждать, что локальные (т. е. на длинах $\lambda \ll l$) свойства турбулентности должны определяться только величинами ρ, ε и, разумеется, самими расстояниями λ, но не масштабами l и u размеров и скорости в целом; этого было достаточно для того, чтобы найти зависимость v_λ от λ уже из соображений размерности. В магнитогидродинамической же турбулентности локальные свойства могут зависеть и от поля H_l (или, что то же, от скорости u_A). Для определения v_λ соображения размерности теперь уже недостаточны и надо привлечь к делу соображения о фактическом механизме установления потока энергии.

Этим механизмом является взаимодействие магнитогидродинамических волн малой амплитуды друг с другом, описываемое нелинейными членами в уравнениях движения. Поэтому поток энергии ε должен разлагаться по степеням малых амплитуд v_λ, причем это разложение должно начинаться с членов более высокой степени, чем вторая (квадратичные члены соответствовали бы обычной диссипации, отсутствующей здесь). Члены третьей степени зависели бы от фаз взаимодействующих волн и выпадают при усреднении по этим случайным фазам. Поэтому $\varepsilon \propto v_\lambda^4$. Теперь уже коэффициент пропорциональности можно определить из соображений размерности (ε имеет размерность эрг/(г·с) = см^2/с^3):

$$\varepsilon \sim v_\lambda^4/(u_\text{A}\lambda), \tag{74.6}$$

или

$$v_\lambda \sim (u_\text{A}\varepsilon\lambda)^{1/4} \tag{74.7}$$

(*R.H. Kraichnan*, 1965). Это выражение заменяет собой закон Колмогорова–Обухова ($v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}$) обычной гидродинамической турбулентности. Экстраполируя (74.6) к основному масштабу, получим для ε оценку

$$\varepsilon \sim u^4/(u_\text{A} l) \sim u^3/l$$

— такую же, как в обычной гидродинамике.

Внутренний масштаб турбулентности λ_0 можно оценить, исходя из представления о мелкомасштабных пульсациях как о магнитогидродинамических волнах на фоне крупномасштабного поля H_l. Вязкость и проводимость среды приводят к поглощению

этих волн; соответствующий коэффициент поглощения γ был найден в задаче к § 69. Диссипация становится существенной, когда длина поглощения $1/\gamma$ сравнивается с длиной волны, т. е. с масштабом λ. Поскольку магнитогидродинамические волны распространяются со скоростью u_{A} (не зависящей от их длины), то частота $\omega \sim u_{\text{A}}/\lambda$. Для коэффициента поглощения имеем оценку

$$\gamma \sim \frac{\nu + \nu_m}{\lambda^2 u_{\text{A}}}.$$

Из условия $\gamma \sim 1/\lambda$ при $\lambda \sim \lambda_0$ находим внутренний масштаб:

$$\lambda_0 \sim \frac{\nu + \nu_m}{u_{\text{A}}} \sim \frac{\nu + \nu_m}{u}. \qquad (74.8)$$

Если $\nu \gg \nu_m$, то $\lambda_0 \sim \nu/u \sim l/\text{R}$, где $\text{R} \sim ul/\nu$ — число Рейнольдса для основного движения. Аналогично, при $\nu_m \gg \nu$ имеем $\lambda_0 \sim l/\text{R}_m$.

В заключение отметим еще одно интересное свойство турбулентного движения сильно проводящей среды: магнитное поле выталкивается из турбулентной области. Действительно, рассмотрим занятую турбулентностью конечную область, вне которой имеется магнитное поле. Силовые линии этого поля, входя в турбулентную область, запутываются в ней в силу своей «вмороженности»; магнитное поле становится хаотичным по направлениям. Это и означает обращение в нуль среднего по времени значения напряженности $\mathbf{H}$, причем с тем большей точностью, чем выше проводимость среды (конечная проводимость приводит к «проскальзыванию» силовых линий, так что хаотизация поля оказывается неполной). Другими словами, при наложении не слишком сильного магнитного поля на турбулентно движущуюся (в ограниченной области) жидкость последняя будет вести себя как диамагнитная среда с малой магнитной проницаемостью ($\mu \ll 1$) — тем меньшей, чем больше магнитное число Рейнольдса R_m.

Достаточно же сильное магнитное поле не может не проникнуть в жидкость. Это, однако, не означает, что сильное поле должно полностью подавить турбулентность. В сколь угодно сильном однородном внешнем магнитном поле (направленном по оси z) возможна двумерная турбулентность, в которой скорость жидкости везде параллельна плоскости xy и не зависит от координаты z. Действительно, в этом случае

$$\operatorname{rot}[\mathbf{vH}] = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} = 0$$

и из (65.2) следует, что движение жидкости не возмущает внешнее поле, оно остается однородным. Не возникает поэтому и токов, и сила Лоренца равна нулю. Можно сказать, что двумерное движение вообще «не чувствует» однородного поля. Именно в такую двумерную турбулентность, по-видимому, вырождается турбулентность в сильном внешнем поле.

ГЛАВА IX

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 75. Уравнения поля в диэлектриках в отсутствие дисперсии

В § 58 были написаны уравнения переменного электромагнитного поля в металлах:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{75.1}$$

справедливые при достаточной медленности изменения поля: часто́ты поля должны быть такими, чтобы оставались справедливыми зависимости $\mathbf{j}$ от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ от $\mathbf{H}$ (если отличие $\mathbf{B}$ от $\mathbf{H}$ вообще существенно), относящиеся к стационарному случаю [1]).

Теперь мы обратимся к аналогичному вопросу для переменного электромагнитного поля в диэлектрической среде и сформулируем уравнения, справедливые для таких частот, при которых связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ и между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ остается еще такой же, как в постоянных полях. Если, как это обычно бывает, эта связь сводится к простой пропорциональности, то указанное условие означает, что можно полагать

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{75.2}$$

со статическими значениями ε и μ.

Эти соотношения нарушаются (или, как говорят, появляется *дисперсия* ε и μ) при частотах, сравнимых с собственными частотами тех молекулярных или электронных колебаний, с которыми связано появление электрической или магнитной поляризации вещества. Порядок величины этих частот зависит от рода вещества и меняется в очень широких пределах. Он может быть также совершенно различным для электрических и магнитных явлений [2]).

---

[1]) Что касается условия $l \ll \lambda$, то оно не имеет отношения к применимости уравнений (75.1) как таковых. Роль этого условия для вопросов, рассматривавшихся в гл. VII, заключалась в том, что оно позволяло пренебречь эффектами запаздывания в поле вне проводника.

[2]) Так, в алмазе электрическая поляризация имеет электронное происхождение и дисперсия ε начинается лишь в ультрафиолетовой области спектра. В такой же полярной жидкости, как вода, поляризация связана с ориентацией молекул с жесткими дипольными моментами и дисперсия ε наступает при частотах $\omega \sim 10^{11}$ (т. е. в сантиметровом диапазоне длин волн). Еще раньше может начаться дисперсия μ в ферромагнитных веществах.

Уравнения

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{75.3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{75.4}$$

получаются непосредственно путем замены $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ в точных микроскопических уравнениях Максвелла их усредненными значениями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Поэтому эти уравнения ни при каких условиях не нуждаются в изменении. Что касается уравнения

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \tag{75.5}$$

то оно получается (см. § 6) путем усреднения точного микроскопического уравнения $\operatorname{div}\mathbf{e} = 4\pi\rho$, причем используется лишь то обстоятельство, что полный заряд тела равен нулю. Очевидно, что этот вывод ни в какой степени не зависит от предполагавшейся в § 6 стационарности поля, и потому уравнение (75.5) сохраняет свой вид и в переменных полях.

Еще одно уравнение должно быть получено путем усреднения точного уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}. \tag{75.6}$$

Непосредственное усреднение дает

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}. \tag{75.7}$$

Однако при зависящем от времени макроскопическом поле установление связи среднего значения $\overline{\rho\mathbf{v}}$ с ранее введенными величинами довольно затруднительно. Проще произвести требуемое усреднение не непосредственно, а следующим более формальным путем.

Предположим временно, что в диэлектрик введены посторонние по отношению к его веществу заряды с объемной плотностью $\rho_{\text{ст}}$. При своем движении эти заряды создают «сторонний» ток $\mathbf{j}_{\text{ст}}$, а сохранение этих зарядов выражается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial\rho_{\text{ст}}}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}_{\text{ст}} = 0.$$

Вместо уравнения (75.5) будем иметь

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}}$$

(см. (6.8)). Продифференцировав это равенство по времени и воспользовавшись уравнением непрерывности, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\frac{\partial\rho_{\text{ст}}}{\partial t} = -4\pi\operatorname{div}\mathbf{j}_{\text{ст}}$$

или

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \overline{\mathbf{j}}_{\text{ст}}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что вектор, стоящий под знаком div, может быть представлен в виде ротора некоторого другого вектора, который обозначим как $c\mathbf{H}$; тогда

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}_{\text{ст}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{75.8}$$

Вне тела это уравнение должно совпадать с точным уравнением Максвелла для поля в пустоте, соответственно чему вектор $\mathbf{H}$ совпадает с напряженностью магнитного поля. Внутри же тела в статическом случае ток $\overline{\mathbf{j}}_{\text{ст}}$ связан с магнитным полем уравнением

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}_{\text{ст}},$$

где $\mathbf{H}$ — величина, введенная в § 29 и определенным образом связанная со средней напряженностью $\mathbf{B}$. Отсюда следует, что в пределе стремящейся к нулю частоты вектор $\mathbf{H}$ в уравнении (75.8) совпадает со статической величиной $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, а предполагаемая нами здесь «медленность» изменения поля означает, что и для этих переменных полей сохраняется та же зависимость $\mathbf{H}(\mathbf{B})$. Таким образом, $\mathbf{H}$ становится вполне определенной величиной, и, опуская вспомогательную величину $\overline{\mathbf{j}}_{\text{ст}}$, мы приходим окончательно к уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{75.9}$$

Величину $\dot{\mathbf{D}}/(4\pi)$ называют *током смещения.*

Это уравнение заменяет собой для диэлектриков первое из уравнений (75.1), описывающих поле в металлах. Может возникнуть мысль о том, что и в металлах в этом уравнении для переменного поля следует учитывать член с производной $\partial\mathbf{E}/\partial t$, т. е. писать

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{75.10}$$

с постоянным коэффициентом ε. Однако для хороших проводников (истинных металлов) введение такого члена было бы бессмысленным. Два члена в правой части уравнения (75.10) представляют собой по существу первые два члена разложения по степеням частоты поля. Поскольку последняя предполагается достаточно малой, то учет второго члена мог бы, в лучшем случае, означать введение малой поправки. В действительности он не может иметь даже этого смысла, так как фактически в металлах поправки от влияния пространственной неоднородности по-

ля становятся заметными раньше, чем поправка по частоте (см. примеч. на с. 298).

Есть, однако, особая категория тел (плохие проводники), для которых уравнение (75.10) может иметь смысл. В силу особых причин (малое число электронов проводимости в полупроводниках, малая подвижность ионов в растворах электролитов) проводимость этих веществ аномально мала, и потому второй член в правой части уравнения (75.10) может сравниться с первым или даже превысить его уже при таких частотах, для которых можно еще считать σ и ε постоянными. В монохроматическом поле отношение второго члена к первому есть $\varepsilon\omega/(4\pi\sigma)$. Если это отношение мало, то тело ведет себя как обычный проводник с проводимостью σ. При частотах же $\omega \gg 4\pi\sigma/\varepsilon$ оно ведет себя как диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε.

В однородной среде с постоянными ε и μ уравнения (75.3)–(75.5) и (75.9) принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{75.11}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{75.12}$$

Исключая из этих уравнений обычным образом $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{H}$), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

и поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H}$, то мы приходим к волновому уравнению

$$\Delta\mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Отсюда видно, что скорость распространения электромагнитных волн в однородной диэлектрической среде есть

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{75.13}$$

Плотность потока энергии складывается из потока энергии электромагнитного поля и потока энергии, переносимой непосредственно движущимся веществом. В неподвижной среде (которую мы и рассматриваем) последняя часть отсутствует и плотность потока энергии в диэлектрической среде дается той же формулой (30.20)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}], \tag{75.14}$$

что и в металлах. В этом легко убедиться, вычислив $\operatorname{div} \mathbf{S}$.

Используя уравнения (75.4) и (75.9), получим

$$\operatorname{div}\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}) = -\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{75.15}$$

в соответствии с выражением

$$dU = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B})$$

для дифференциала внутренней энергии диэлектрика при заданных плотности и энтропии.

Как известно, требование симметричности четырехмерного тензора энергии-импульса всякой замкнутой системы (в данном случае — диэлектрика в электромагнитном поле) приводит к равенству (с точностью до множителя c^2) плотности потока энергии и пространственной плотности импульса системы (см. II, § 32, 94). Поэтому последняя равна

$$\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]. \tag{75.16}$$

Это обстоятельство должно быть, в частности, учтено при определении сил, действующих на диэлектрическое вещество в переменном электромагнитном поле. Силу $\mathbf{f}$ (отнесенную к единице объема) можно вычислять по тензору напряжений σ_{ik} как

$$f_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

При этом, однако, необходимо учесть, что σ_{ik} есть плотность потока импульса, который идет на изменение импульса как вещества, так и электромагнитного поля. Если понимать под $\mathbf{f}$ силу, действующую лишь на среду, то из написанного выражения надо вычесть изменение импульса единицы объема поля:

$$f_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]_i. \tag{75.17}$$

В постоянном поле последний член равен нулю, и потому этот вопрос раньше не возникал.

Медленность изменения поля позволяет воспользоваться для тензора напряжений прежними выражениями, полученными для постоянного поля. Так, для жидкой диэлектрической среды σ_{ik} дается суммой электрической (15.9) и магнитной (35.2) частей.

Но при дифференцировании этих выражений по координатам надо учесть, что вместо уравнений $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ для постоянного поля (в отсутствие токов) мы имеем теперь уравнения

(75.12). Это приводит к появлению новых членов

$$-\frac{\varepsilon}{4\pi}[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}] - \frac{\mu}{4\pi}[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}],$$

которые теперь равны не нулю, а

$$\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}[\mathbf{E}\dot{\mathbf{H}}] - \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}[\mathbf{H}\dot{\mathbf{E}}] = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Таким образом, искомая сила:

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0(\rho, T) - \frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu + \\ + \nabla\left[\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\frac{E^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\frac{H^2}{8\pi}\right] + \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (75.18)$$

Последний член в этом выражении называют *силой Абрагама* (*M. Abraham*, 1909).

§ 76. Электродинамика движущихся диэлектриков

Движение среды приводит к возникновению явлений взаимного влияния электрических и магнитных полей. Для проводников эти явления были рассмотрены в § 63, теперь же мы обратимся к изучению этого вопроса для диэлектриков. При этом фактически идет речь о явлениях, возникающих в движущихся телах при наличии внешнего электрического или магнитного полей. Подчеркнем, что они не имеют ничего общего с явлениями возникновения полей в результате самого движения тел (которые рассматривались в § 36, 64).

Отправным пунктом в § 63 являлись формулы преобразования поля при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом нам было достаточно знать обычные формулы преобразования электрической и магнитной напряженности поля в пустоте, усреднение которых непосредственно дает формулы преобразования $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. В диэлектриках вопрос значительно более сложен, в связи с наличием большего числа величин, описывающих электромагнитное поле.

При движении макроскопических тел речь идет обычно о скоростях, малых по сравнению со скоростью света. Однако получить соответствующие приближенные формулы преобразования проще всего на основе точных релятивистских формул, справедливых при любых скоростях.

Как известно, в электродинамике поля в пустоте компоненты векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ электрической и магнитной напряженности в действительности являются компонентами антисимметрического четырехмерного тензора (4-тензора) второго ранга (см. II, § 23).

Поскольку **E** и **B** являются средними значениями **e** и **h**, то же самое относится и к ним. Таким образом, имеется 4-тензор $F_{\mu\nu}$ со следующими компонентами [1]):

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{76.1}$$

С помощью этого тензора первая пара уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{76.2}$$

может быть написана в четырехмерном виде как

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0. \tag{76.3}$$

Тем самым выявляется релятивистская инвариантность этих уравнений. Подчеркнем, что сама по себе применимость уравнений (76.2) к движущимся телам очевидна, поскольку эти уравнения получаются непосредственно путем замены **e** и **h** в точных микроскопических уравнениях Максвелла и их усредненными значениями **E** и **B**.

Но и вторая пара уравнений Максвелла,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{76.4}$$

тоже сохраняет свой формальный вид и в движущихся средах. Это очевидно из приведенных в предыдущем параграфе рассуждений, в которых были использованы лишь такие общие свойства тел (например, равенство нулю полного заряда), которыми движущиеся тела обладают в той же степени, как и неподвижные. При этом, однако, связи величин **D** и **B** с величинами **E** и **H** уже отнюдь не должны совпадать с теми, которые имеют место в неподвижных средах.

Будучи справедливыми как для неподвижных, так и для движущихся тел, уравнения (76.4) должны сохранять свой вид при преобразовании Лоренца. Для поля в пустоте векторы **D** и **H** совпадают с **E** и **B** и релятивистская инвариантность второй пары уравнений Максвелла проявляется в том, что и они могут быть написаны в четырехмерном виде с помощью того же тензора $F_{\lambda\mu}$: $\partial F^{\lambda\mu}/\partial x^\mu = 0$ (см. II, § 30). Поэтому ясно, что для обес-

[1]) В этом параграфе четырехмерные тензорные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3, обозначаются греческими буквами λ, μ, ν.

печения релятивистской инвариантности уравнений (76.4) необходимо, чтобы компоненты векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ в действительности преобразовывались как компоненты 4-тензора, построенного аналогично тензору $F_{\mu\nu}$; обозначим этот тензор как $H_{\mu\nu}$:

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & -H_z & H_y \\ -D_y & H_z & 0 & -H_x \\ -D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{76.5}$$

С его помощью уравнения (76.4) записываются в виде

$$\frac{\partial H^{\lambda\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0. \tag{76.6}$$

Выяснив четырехмерный тензорный характер величин $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, мы тем самым узнали закон их преобразования при переходе от одной системы отсчета к другой. Нас, однако, интересует здесь не столько закон этого преобразования, сколько связь между этими величинами в движущейся среде, обобщающая соотношения $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, справедливые в неподвижных телах.

Обозначим через u^{μ} 4-вектор скорости среды; его компоненты связаны с трехмерной скоростью $\mathbf{v}$ соотношением

$$u^{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Составим из этого 4-вектора и 4-тензоров $F^{\mu\nu}$ и $H^{\mu\nu}$ такие комбинации, которые в неподвижной среде переходят в $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$. Таковыми являются 4-векторы $F^{\lambda\mu}u_{\mu}$, $H^{\lambda\mu}u_{\mu}$; при $\mathbf{v} = 0$ их временные компоненты обращаются в нуль, а пространственные — соответственно в $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$. Поэтому ясно, что четырехмерным обобщением равенства $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ является [1]

$$H^{\lambda\mu}u_{\mu} = \varepsilon F^{\lambda\mu}u_{\mu}. \tag{76.7}$$

Аналогичным образом убеждаемся в том, что обобщением соотношения $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ является четырехмерное равенство

$$F_{\lambda\mu}u_{\nu} + F_{\mu\nu}u_{\lambda} + F_{\nu\lambda}u_{\mu} = \mu(H_{\lambda\mu}u_{\nu} + H_{\mu\nu}u_{\lambda} + H_{\nu\lambda}u_{\mu}). \tag{76.8}$$

[1]) Следует заметить, что, написав соотношения, содержащие лишь местное значение скорости, мы тем самым пренебрегаем слабыми эффектами, связанными с возможностью существования градиента скорости (например, гиромагнитными эффектами; см. § 36).

Переходя от четырехмерных обозначений снова к трехмерным величинам, получим из этих двух уравнений векторные соотношения [1]):

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}] = \varepsilon\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right), \quad \mathbf{B} + \frac{1}{c}[\mathbf{Ev}] = \mu\left(\mathbf{H} + \frac{1}{c}[\mathbf{Dv}]\right). \tag{76.9}$$

Эти формулы, полученные Минковским (*H. Minkowski*, 1908), являются точными в том смысле, что еще не сделано никаких предположений о величине скорости. Считая же отношение v/c малым и решая эти уравнения относительно **D** и **B** с точностью до членов первого порядка, получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}[\mathbf{vH}], \tag{76.10}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}[\mathbf{Ev}]. \tag{76.11}$$

Эти формулы, вместе с уравнениями Максвелла (76.2) и (76.4), составляют основу электродинамики движущихся диэлектриков.

Граничные условия к уравнениям Максвелла тоже претерпевают некоторое изменение. Из уравнений $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ по-прежнему следуют условия непрерывности нормальных компонент индукции:

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad B_{n1} = B_{n2}. \tag{76.12}$$

Условия же для тангенциальных компонент поля проще всего можно получить путем перехода от неподвижной системы отсчета K к новой системе K', движущейся вместе с данным элементом поверхности тела; скорость последнего (направленную вдоль нормали **n**) обозначим как v_n. В системе K' справедливы обычные условия непрерывности $\mathbf{E}'_t$ и $\mathbf{H}'_t$. Согласно релятивистским формулам преобразования (см. II, § 24), эти требования эквивалентны условию непрерывности тангенциальных компонент векторов

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}], \quad \mathbf{H} - \frac{1}{c}[\mathbf{vD}].$$

Проецируя их на плоскость, перпендикулярную к **n**, и учитывая равенства (76.12), получим искомые граничные условия:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = \frac{v_n}{c}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \quad [\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = -\frac{v_n}{c}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1). \tag{76.13}$$

---

[1]) Если какое-либо из соотношений $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ или $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ в неподвижной среде не имеет места, то и соответствующее из соотношений (76.9) заменяется другой функциональной зависимостью между двумя векторными суммами, стоящими в обеих частях равенства.

Если подставить сюда выражения (76.10), (76.11) и пренебречь членами высшего порядка по v/c, то мы получим

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = \frac{v_n}{c}(\mu_2 - \mu_1)\mathbf{H}_t,$$
$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = -\frac{v_n}{c}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\mathbf{E}_t. \qquad (76.14)$$

В этом приближении в правой части равенств можно не различать значения $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ на обеих сторонах поверхности раздела.

Если тело движется так, что его поверхность не смещается в перпендикулярном к самой себе направлению (например, при поворачивании тела вращения вокруг оси), то $v_n = 0$. Только в этом случае граничные условия (76.13) или (76.14) сводятся к обычным условиям непрерывности $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}_t$.

Задачи

1. Диэлектрический шар равномерно вращается (в пустоте) в однородном постоянном магнитном поле $\mathfrak{H}$. Определить возникающее вокруг шара электрическое поле.

Решение. При вычислении возникающего электрического поля магнитное поле надо принимать таким же, как при неподвижном шаре, так как учет обратного влияния изменения магнитного поля привел бы к поправкам более высокого порядка малости. Внутри шара магнитное поле однородно и равно

$$\mathbf{H}^{(i)} = \frac{3}{2+\mu}\mathfrak{H}$$

(ср. (8.2)).

Ввиду стационарности вращения возникающее электрическое поле постоянно и, как всякое постоянное электрическое поле, обладает потенциалом: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Вне шара потенциал удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi^{(e)} = 0$, а внутри шара — уравнению

$$\Delta\varphi^{(i)} = 2\frac{\varepsilon\mu - 1}{c\varepsilon}\mathbf{\Omega}\mathbf{H}^{(i)}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения (это уравнение получается из $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ подстановкой для $\mathbf{D}$ выражения (76.10) с $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]$). Условие непрерывности нормальной составляющей $\mathbf{D}$ на поверхности шара гласит:

$$-\varepsilon\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r}\bigg|_{r=a} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}a\{\mathbf{\Omega}\mathbf{H}^{(i)} - (\mathbf{\Omega}\mathbf{n})(\mathbf{H}^{(i)}\mathbf{n})\} = -\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial r}\bigg|_{r=a} \qquad (2)$$

(a — радиус шара, $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$).

Ввиду симметрии шара искомое электрическое поле определяется всего двумя постоянными векторами: $\mathbf{\Omega}$ и $\mathfrak{H}$. Из их компонент можно составить линейным по $\mathfrak{H}$ и $\mathbf{\Omega}$ образом скаляр $\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}$ и тензор

$$\mathfrak{H}_i\Omega_k + \mathfrak{H}_k\Omega_i - \frac{2}{3}\delta_{ik}\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}$$

с равной нулю суммой диагональных членов. Соответственно этому ищем потенциал поля вне шара в виде

$$\varphi^{(e)} = \frac{1}{6}D_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}D_{ik}\frac{n_i n_k}{r^3}, \qquad (3)$$

где D_{ik} — постоянный тензор (причем $D_{ii} = 0$); D_{ik} есть тензор квадрупольного электрического момента шара (см. II, § 41). Члена же вида const/r в $\varphi^{(e)}$ не может быть, так как он давал бы отличный от нуля полный поток электрического поля через поверхность, охватывающую шар (между тем как шар не заряжен). Потенциал поля внутри шара ищем в виде

$$\varphi^{(i)} = \frac{r^2}{2a^5} D_{ik} n_i n_k + \frac{\varepsilon\mu - 1}{3c\varepsilon} \mathbf{\Omega} \mathbf{H}^{(i)} (r^2 - a^2). \tag{4}$$

Первый член есть решение однородного уравнения $\Delta\varphi = 0$, а выбор коэффициента в нем обеспечивает непрерывность потенциала (а тем самым и $\mathbf{E}_t$) на поверхности шара. Подставляя (3) и (4) в (2), найдем

$$D_{ik} = -\frac{a^5}{c} \frac{3(\varepsilon\mu - 1)}{(3 + 2\varepsilon)(2 + \mu)} \left(\mathfrak{H}_i \Omega_k + \mathfrak{H}_k \Omega_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \mathbf{\mathfrak{H}} \mathbf{\Omega} \right). \tag{5}$$

Таким образом, вокруг вращающегося шара возникает электрическое поле квадрупольного характера, причем квадрупольный момент шара дается формулой (5). В частности, если шар вращается вокруг направления внешнего поля (ось z), то D_{ik} имеет лишь диагональные компоненты

$$D_{zz} = -\frac{a^5}{c} \frac{4(\varepsilon\mu - 1)}{(3 + 2\varepsilon)(2 + \mu)} \mathbf{\mathfrak{H}} \mathbf{\Omega}, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}.$$

Аналогично, вокруг шара, вращающегося в однородном электрическом поле, возникает квадрупольное магнитноое поле. Квадрупольный магнитный момент шара дается при этом формулой, получающейся из (5) изменением знака и заменой ε, μ, $\mathbf{\mathfrak{H}}$ соответственно на μ, ε, $\mathbf{\mathfrak{C}}$.

2. Намагниченный шар равномерно вращается (в пустоте) вокруг своей оси, параллельной направлению намагничения. Определить возникающее вокруг шара электрическое поле [1]).

Р е ш е н и е. Магнитное поле внутри шара однородно и выражается через постоянную намагниченность $\mathbf{M}$ согласно уравнениям $\mathbf{B}^{(i)} + 2\mathbf{H}^{(i)} = 0$ (ср. (8.1)) и $\mathbf{B}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)} = 4\pi\mathbf{M}$, откуда

$$\mathbf{B}^{(i)} = \frac{8\pi\mathbf{M}}{3}, \quad \mathbf{H}^{(i)} = -\frac{4\pi\mathbf{M}}{3}.$$

Вторая из формул (76.9) в данном случае не имеет места (ввиду несправедливости формулы $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ для неподвижного ферромагнетика), а из первой имеем внутри шара

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c}[\mathbf{vB}] - \frac{1}{c}[\mathbf{vH}] = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{4\pi(2\varepsilon + 1)}{3c}[\mathbf{vM}].$$

Потенциал возникающего электрического поля вне шара удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi^{(e)} = 0$, а внутри шара

$$\Delta\varphi^{(i)} = \frac{8\pi(2\varepsilon + 1)}{3c\varepsilon} M\Omega.$$

[1]) Если направления намагниченности и оси вращения не совпадают, то постановка задачи существенно меняется, так как возникает излучение электромагнитных волн от шара в окружающее пространство.

Граничное условие непрерывности D_n на поверхности шара:

$$-\varepsilon\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r}\bigg|_{r=a}+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{3c}a\Omega M\sin^2\theta=-\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial r}\bigg|_{r=a},$$

где θ — угол между нормалью $\mathbf{n}$ и направлением $\boldsymbol{\Omega}$ и $\mathbf{M}$ (ось z). Ищем $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(i)}$ в виде

$$\varphi^{(e)}=\frac{D_{ik}n_in_k}{2r^3}=\frac{D_{zz}}{4r^3}(3\cos^2\theta-1),$$

$$\varphi^{(i)}=\frac{r^2}{4a^5}D_{zz}(3\cos^2\theta-1)+\frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{9c\varepsilon}M\Omega(r^3-a^2)$$

и из граничного условия получаем следующее выражение для квадрупольного электрического момента, возникающего у вращающегося шара:

$$D_{zz}=-\frac{4(2\varepsilon+1)}{3c(2\varepsilon+3)}a^2\Omega\mathscr{M},\quad D_{xx}=D_{yy}=-\frac{1}{2}D_{zz}$$

($\mathscr{M}$ — полный магнитный момент шара). Для металлического шара надо положить $\varepsilon\to\infty$ и тогда

$$D_{zz}=-\frac{4}{3c}\Omega\mathscr{M}a^2.$$

§ 77. Дисперсия диэлектрической проницаемости

Мы переходим теперь к изучению важнейшего вопроса о быстропеременных электромагнитных полях, часто́ты которых не ограничены условием малости по сравнению с частотами, характерными для установления электрической и магнитной поляризации вещества.

Переменное во времени электромагнитное поле необходимо является переменным также и в пространстве. При частоте ω пространственная периодичность определяется длиной волны, порядок величины которой $\lambda\sim c/\omega$. При дальнейшем увеличении частоты λ становится в конце концов сравнимой с атомными размерами a. В таких условиях становится невозможным макроскопическое описание поля.

В связи с этим может возникнуть вопрос о том, существует ли вообще область значений частот, в которой, с одной стороны, уже существенны дисперсионные явления, а с другой стороны, еще допустимо макроскопическое рассмотрение. Легко видеть, что такая область непременно должна существовать. Наиболее быстрый механизм установления электрической или магнитной поляризации в веществе — электронный. Его время релаксации — порядка величин атомных времен a/v, где a — атомные размеры, а v — электронные скорости в атоме. Но поскольку $v\ll c$, то даже соответствующая таким временам длина волны $\lambda\sim ac/v$ все еще велика по сравнению с a. Ниже мы предполагаем условие

$\lambda \gg a$ выполненным [1]). Следует, однако, иметь в виду, что это условие может оказаться недостаточным: у металлов при низких температурах существует область частот, в которой макроскопическая теория неприменима, несмотря на выполнение неравенства $c/\omega \gg a$ (см. § 87).

Излагаемая ниже формальная теория в равной степени относится как к металлам, так и к диэлектрикам. При частотах же, соответствующих внутриатомным электронным движениям (оптические частоты) и более высоких, фактически исчезает даже количественное отличие в свойствах металлов и диэлектриков.

Уже из приведенных в § 75 рассуждений ясно, что формальный вид уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{77.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{77.2}$$

остается таким же в произвольных переменных электромагнитных полях. Но эти уравнения в значительной степени беспредметны до тех пор, пока не установлена связь между входящими в них величинами **D**, **B** и **E**, **H**. При рассматриваемых нами теперь больших частотах эта связь не имеет ничего общего с той, которая справедлива в статическом случае и которой мы пользовались в переменных полях при отсутствии дисперсии.

Прежде всего нарушается даже имевшееся ранее основное свойство этой связи — однозначная зависимость **D** и **B** от значений **E** и **H** в тот же момент времени. В общем случае произвольного переменного поля значения **D** и **B** в некоторый момент времени отнюдь не определяются одними только значениями **E** и **H** в тот же момент времени. Напротив, можно утверждать, что значения **D** и **B** в данный момент времени зависят, вообще говоря, от значений функций $\mathbf{E}(t)$, $\mathbf{H}(t)$ во все предыдущие моменты времени. Это обстоятельство является выражением того, что установление электрической или магнитной поляризации вещества не успевает следовать за изменением электромагнитного поля. (При этом частоты, при которых возникают дисперсионные явления в электрических и магнитных свойствах вещества, могут быть совершенно различными.)

В этом параграфе мы будем говорить о зависимости **D** от **E**; специфические же особенности дисперсии магнитных свойств вещества будут обсуждены в § 79.

В § 6 вектор поляризации **P** был введен согласно определению $\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, где ρ — истинная (микроскопическая) плотность зарядов в веществе. Это равенство выражало собой электрическую

[1]) Эффекты, связанные с членами следующих порядков по малому отношению a/λ, будут рассмотрены в § 104–106.

нейтральность тела в целом, и его (вместе с условием $\mathbf{P} = 0$ вне тела) было достаточно для того, чтобы показать, что полный электрический момент тела равен интегралу $\int \mathbf{P}\, dV$. Очевидно, что этот вывод относится к переменным полям в той же степени, как и к постоянным. Таким образом, в любом переменном поле, в том числе при наличии дисперсии, вектор $\mathbf{P} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})/(4\pi)$ сохраняет свой физический смысл электрического момента единицы объема вещества.

В быстропеременных полях обычно приходится иметь дело со сравнительно малыми напряженностями, тогда связь $\mathbf{D}$ с $\mathbf{E}$ можно считать линейной [1]). Наиболее общий вид линейной зависимости между $\mathbf{D}(t)$ и значениями функции $\mathbf{E}(t)$ во все предыдущие моменты времени может быть написан в виде интегрального соотношения

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int_0^\infty f(\tau)\mathbf{E}(t-\tau)\, d\tau \tag{77.3}$$

(выделение члена $\mathbf{E}(t)$ удобно по причинам, которые выяснятся в дальнейшем). Здесь $f(\tau)$ — функция времени, зависящая от свойств среды. По аналогии с электростатической формулой $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ будем писать соотношение (77.3) в символической форме

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\,\mathbf{E},$$

где $\hat{\varepsilon}$ — линейный интегральный оператор, действие которого определяется согласно (77.3).

Всякое переменное поле может быть сведено (путем разложения Фурье) к совокупности монохроматических компонент, в которых зависимость всех величин от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$. Для таких полей связь (77.3) между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ приобретает вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}, \tag{77.4}$$

где функция $\varepsilon(\omega)$ определяется как

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty f(\tau)e^{i\omega\tau}\, d\tau. \tag{77.5}$$

Таким образом, для периодических полей может быть введено понятие о диэлектрической проницаемости как о коэффициенте

---

[1]) Мы подразумеваем здесь, что $\mathbf{D}$ зависит линейно только от $\mathbf{E}$, но не от $\mathbf{H}$. В постоянном поле линейная зависимость $\mathbf{D}$ от $\mathbf{H}$ исключается требованием инвариантности по отношению к изменению знака времени. В переменном поле это условие уже не имеет места и линейная зависимость $\mathbf{D}$ от $\mathbf{H}$ оказывается возможной при определенных типах симметрии вещества. Она относится, однако, к тем самым малым эффектам $\sim a/\lambda$, которые были упомянуты в примечании на предыдущей странице.

пропорциональности между **D** и **E**, причем, однако, этот коэффициент зависит не только от свойств среды, но и от частоты поля. О зависимости ε от частоты говорят как о законе ее *дисперсии.*

Функция $\varepsilon(\omega)$, вообще говоря, комплексна. Будем обозначать ее вещественную и мнимую части как ε' и ε'':

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega). \tag{77.6}$$

Из определения (77.5) непосредственно видно, что

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega). \tag{77.7}$$

Отделяя в этом соотношении вещественную и мнимую части, получим

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega). \tag{77.8}$$

Таким образом, $\varepsilon'(\omega)$ является четной, а $\varepsilon''(\omega)$ — нечетной функцией частоты.

При малых (по сравнению с границей начала дисперсии) частотах функцию $\varepsilon(\omega)$ можно разложить в ряд по степеням ω. Разложение четной функции $\varepsilon'(\omega)$ содержит члены лишь четных степеней, а разложение нечетной функции $\varepsilon''(\omega)$ — члены нечетных степеней. В пределе $\omega \to 0$ функция $\varepsilon(\omega)$ в диэлектриках стремится, разумеется, к электростатической диэлектрической проницаемости (которую обозначим здесь как ε_0). Поэтому в диэлектриках разложение $\varepsilon'(\omega)$ начинается с постоянного члена ε_0; разложение же $\varepsilon''(\omega)$ начинается, вообще говоря, с члена, пропорционального ω.

Функцию $\varepsilon(\omega)$ при малых частотах можно рассматривать и в металлах, если условиться определять ее так, чтобы в пределе $\omega \to 0$ уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

переходило бы в уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma \mathbf{E}$$

для постоянного поля в проводниках. Сравнив оба уравнения, мы видим, что при $\omega \to 0$ производная $\partial \mathbf{D}/\partial t$ должна переходить в $4\pi\sigma\mathbf{E}$. Но в периодическом поле $\partial \mathbf{D}/\partial t = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}$, и мы приходим к следующему предельному выражению для $\varepsilon(\omega)$ при малых частотах:

$$\varepsilon(\omega) = i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{77.9}$$

Таким образом, в проводниках разложение функции $\varepsilon(\omega)$ начинается с мнимого члена, пропорционального $1/\omega$, который вы-

ражается через обычную проводимость σ по отношению к постоянным токам [1]). Следующий член разложения $\varepsilon(\omega)$ является вещественной постоянной. Эта постоянная, однако, не имеет у металлов того электростатического смысла, которым она обладает у диэлектриков [2]). Кроме того, надо снова указать, что этот член разложения может оказаться не имеющим никакого вообще смысла, если эффекты пространственной неоднородности поля электромагнитной волны появляются раньше, чем эффекты его временно́й периодичности.

§ 78. Диэлектрическая проницаемость при очень больших частотах

В пределе $\omega \to \infty$ функция $\varepsilon(\omega)$ стремится к единице. Это очевидно уже из простых физических соображений: при достаточно быстром изменении поля процессы поляризации, приводящие к установлению отличной от $\mathbf{E}$ индукции $\mathbf{D}$, вообще не успевают происходить.

Оказывается возможным установить справедливый для любых тел (безразлично — металлов или диэлектриков) предельный вид функции $\varepsilon(\omega)$ при больших частотах. Именно, частота поля должна быть велика по сравнению с частотами движения всех (или, по крайней мере, большинства) электронов в атомах данного вещества. При соблюдении этого условия можно при вычислении поляризации вещества рассматривать электроны как свободные, пренебрегая их взаимодействием друг с другом и с ядрами атомов.

Скорости v движения электронов в атомах малы по сравнению со скоростью света. Поэтому расстояния v/ω, проходимые ими в течение периода волны, малы по сравнению с длиной волны c/ω. Ввиду этого при определении скорости, приобретаемой электроном в поле электромагнитной волны, можно считать последнее однородным.

Уравнение движения гласит:

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

(e, m — заряд и масса электрона, $\mathbf{v}'$ — дополнительная скорость, приобретаемая электроном в поле волны); отсюда $\mathbf{v}' = ie\mathbf{E}/(m\omega)$.

---

[1]) Иногда представляют мнимую часть функции $\varepsilon(\omega)$ при всех частотах в виде (77.9), что сводится к введению вместо $\varepsilon''(\omega)$ новой функции $\sigma(\omega)$; этим переобозначением исчерпывается физический смысл этой функции.

[2]) Во избежание недоразумений обратим внимание на некоторое изменение обозначений по сравнению с § 75. В уравнении (75.10) для плохих проводников величиной $\varepsilon(\omega)$ является сумма $4\pi i\sigma/\omega + \varepsilon$.

Смещение же $\mathbf{r}$ электрона под влиянием поля связано с $\mathbf{v}'$ посредством $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}'$; поэтому $\mathbf{r} = -e\mathbf{E}/(m\omega^2)$. Поляризация $\mathbf{P}$ вещества есть дипольный момент единицы его объема. Суммируя по всем электронам, находим

$$\mathbf{P} = \sum e\mathbf{r} = -\frac{e^2}{m\omega^2}N\mathbf{E},$$

где N — число электронов во всех атомах единицы объема вещества. С другой стороны, по определению электрической индукции, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$. Поэтому окончательно получаем следующую формулу:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}. \tag{78.1}$$

Фактическая область применимости этой формулы начинается от далекого ультрафиолета у самых легких элементов или от рентгеновских частот у более тяжелых элементов.

Для сохранения у величины $\varepsilon(\omega)$ буквального смысла, с которым она входит в уравнения Максвелла, частота должна еще удовлетворять условию $\omega \ll c/a$. Мы, однако, увидим в дальнейшем (§ 124), что выражению (78.1) может быть приписан определенный физический смысл и при бо́льших частотах.

§ 79. Дисперсия магнитной проницаемости

В отличие от $\varepsilon(\omega)$ магнитная проницаемость $\mu(\omega)$ при увеличении частоты сравнительно рано теряет свой физический смысл; учет отличия $\mu(\omega)$ от 1 при таких частотах был бы незаконным уточнением. Чтобы показать это, проанализируем, в какой мере сохраняется в переменном поле физический смысл величины $\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/4\pi$ как магнитного момента единицы объема. Магнитный момент тела есть, по определению, интеграл

$$\frac{1}{2c}\int [\mathbf{r} \cdot \overline{\rho\mathbf{v}}]\, dV. \tag{79.1}$$

Среднее значение микроскопической плотности тока связано со средним полем уравнением (75.7):

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{79.2}$$

Вычитая из него почленно уравнение

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

получим

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = c\operatorname{rot}\mathbf{M} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}. \tag{79.3}$$

Между тем, интеграл (79.1) может быть приведен к виду $\int \mathbf{M}\,dV$ лишь при условии $\overline{\rho\mathbf{v}} = c\operatorname{rot}\mathbf{M}$ (и $\mathbf{M} = 0$ вне тела), как это было показано в § 29.

Таким образом, физический смысл величины $\mathbf{M}$ (а с нею и магнитной восприимчивости) связан с возможностью пренебрежения членом $\partial\mathbf{P}/\partial t$ в формуле (79.3). Выясним, в какой мере могут быть осуществлены условия, допускающие такое пренебрежение.

При заданной частоте наиболее благоприятные условия для измерения восприимчивости требуют по возможности малых размеров тела (для увеличения пространственных производных в $\operatorname{rot}\mathbf{M}$) и по возможности слабого электрического поля (для уменьшения $\mathbf{P}$). Поле электромагнитной волны не удовлетворяет последнему условию, так как в нем $E \sim H$. Поэтому рассмотрим переменное магнитное поле, скажем, в соленоиде, причем исследуемое тело помещено на его оси. Электрическое поле возникает только в результате индукции от переменного магнитного поля. Порядок величины его напряженности внутри тела можно получить путем оценки обеих частей уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

откуда $\dfrac{E}{l} \sim \dfrac{\omega H}{c}$ или $E \sim \dfrac{\omega l}{c}H$, где l — размеры тела. Полагая $\varepsilon - 1 \sim 1$, будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial t} \sim \omega E \sim \frac{\omega^2 l}{c}H.$$

Для пространственных же производных магнитного момента $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ имеем

$$c\operatorname{rot}\mathbf{M} \sim \frac{c}{l}\chi\mathbf{H}.$$

Сравнив оба выражения, найдем, что первое мало́ по сравнению со вторым, если

$$l^2 \ll \frac{\chi c^2}{\omega^2}. \qquad (79.4)$$

Ясно, что понятие о магнитной восприимчивости может иметь смысл, лишь если это неравенство допускает (хотя бы с не очень большим запасом) макроскопические размеры тела, т. е. если оно совместимо с неравенством $l \gg a$, где a — атомные размеры. Это условие заведомо нарушается уже в области оптических частот. Действительно, магнитная восприимчивость при

этих частотах является величиной $\sim v^2/c^2$ [1]) (v — электронные скорости в атоме); сами же оптические частоты $\omega \sim v/a$ и потому правая часть неравенства (79.4) $\sim a^2$.

Таким образом, не имеет смысла пользоваться магнитной проницаемостью уже начиная с оптической области частот, и при рассмотрении соответствующих явлений надо полагать $\mu = 1$. Учет отличия между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в этой области был бы явным превышением точности. Фактически же учет отличия μ от 1 является превышением точности для большинства явлений уже при частотах, гораздо более низких, чем оптические [2]).

Наличие существенной дисперсии магнитной проницаемости приводит к возможности существования квазистационарных колебаний намагниченности в ферромагнитных телах; чтобы исключить возможное влияние проводимости вещества, будем ниже иметь в виду неметаллические ферромагнетики — ферриты.

Квазистационарность означает, как всегда (§ 58), что частота предполагается удовлетворяющей условию $\omega \ll c/l$, где l — характерные размеры тела (или «длина волны» колебаний). Кроме того, будем пренебрегать обменной энергией, связанной с возникающей при колебаниях неоднородностью распределения намагниченности (другими словами, предполагается несущественной пространственная дисперсия — см. § 103 — магнитной проницаемости). Для этого размеры l должны быть велики по сравнению с длиной, характерной для энергии неоднородности:

$$l \gg \sqrt{\alpha},$$

где α — порядок величины коэффициентов в выражении (43.1).

Представим $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ в виде $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, где $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{B}_0$ — напряженность и индукция в статически намагниченном теле, $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{B}'$ — переменные части напряженности и индукции при колебаниях. При пренебрежении током смещения последние удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}' = 0, \tag{79.5}$$

отличающимся от уравнений магнитостатики лишь тем, что магнитная проницаемость теперь (для монохроматического поля,

[1]) Эта оценка соответствует диамагнитной восприимчивости; времена релаксации каких-либо пара- или ферромагнитных процессов заведомо велики по сравнению с оптическими периодами. Подчеркнем, однако, что оценки произведены для изотропного тела и к ферромагнетикам их надо применять с осторожностью. В частности, медленно (как $1/\omega$) убывающие с увеличением частоты гиротропные члены в тензоре μ_{ik} (см. задачу 1) могут оказаться существенными и при достаточно высоких частотах.

[2]) С несколько другой точки зрения это обстоятельство обсуждается ниже, в § 103 — см. примеч. на с. 516.

$\sim e^{-i\omega t}$) — функция частоты, а не постоянная[1]). Ферромагнитная среда магнитно анизотропна и потому ее проницаемость — тензор $\mu_{ik}(\omega)$; им определяется линейная связь между переменными частями индукции и напряженности.

В силу первого из уравнений (79.5) магнитное поле потенциально: $\mathbf{H}' = -\nabla\psi$. Подставив затем

$$B'_i = \mu_{ik}H'_k = -\mu_{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$$

во второе уравнение, получим уравнение для потенциала внутри тела:

$$\mu_{ik}(\omega)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \tag{79.6}$$

Вне тела потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$, а на границе тела обычным образом должны быть непрерывны $\mathbf{H}'_t$ и B'_n. Первое условие сводится к непрерывности самого потенциала ψ, а второе означает непрерывность выражения

$$\mu_{ik}n_i\frac{\partial\psi}{\partial x_k},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности тела. Вдали от тела должно быть $\psi \to 0$.

Сформулированная таким образом задача имеет нетривиальные решения лишь при определенном соотношении между величинами μ_{ik}, рассматриваемыми как параметры. Используя это соотношение в качестве уравнения для ω, найдем частоты собственных колебаний намагниченности тела; их называют частотами *неоднородного ферромагнитного резонанса.*

Простейший вид магнитостатических колебаний однородно намагниченного эллипсоида — колебания, не нарушающие однородности; намагниченность эллипсоида колеблется как целое. Нахождение их частот не требует нового решения уравнений поля и может быть осуществлено непосредственно с помощью соотношений (29.14):

$$H_i + n_{ik}(B_k - H_k) = \mathfrak{H}_i, \tag{79.7}$$

где n_{ik} — тензор коэффициентов размагничивания эллипсоида, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ относятся к полю внутри эллипсоида, а $\boldsymbol{\mathfrak{H}}$ — внешнее магнитное поле. Последнее предполагается однородным, а в $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ снова выделяем колеблющиеся части $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{B}'$ — на этот раз однородные по объему тела. Для них получаем соотношение

$$H'_i + n_{ik}(B'_k - H'_k) = 0$$

[1]) Рассматриваемые колебания называют поэтому *магнитостатическими.* Теория однородных (см. ниже) магнитостатических колебаний дана *Киттелем* (*Ch. Kittel*, 1947), а неоднородных — *Уокером* (*L. Walker*, 1957).

или

$$(\delta_{ik} + 4\pi n_{il}\chi_{lk})H'_k = 0,$$

где введен тензор магнитной восприимчивости $\chi_{ik}(\omega)$ согласно определению $\mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik}$. Приравняв нулю определитель этой системы однородных линейных уравнений, получим уравнение

$$\det|\delta_{ik} + 4\pi n_{il}\chi_{lk}(\omega)| = 0, \qquad (79.8г)$$

корни которого определяют частоты собственных колебаний. Их называют частотами *однородного ферромагнитного резонанса.*

Задачи

1. В рамках макроскопического уравнения движения магнитного момента (уравнения Ландау–Лифшица, см. IX, (69.9)), в отсутствие диссипации, найти тензор магнитной проницаемости для однородно намагниченного одноосного ферромагнетика типа легкая ось (*Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц,* 1935).

Решение. Уравнение движения намагниченности в ферромагнетике:

$$\dot{\mathbf{M}} = \gamma[(\mathbf{H} + \beta M_z \boldsymbol{\nu})\mathbf{M}],$$

где $\gamma = g|e|/(2mc)$ (g — гиромагнитное отношение), $\beta > 0$ — коэффициент анизотропии, $\boldsymbol{\nu}$ — орт оси легкого намагничения (ось z). Представим поле $\mathbf{H}$ в виде $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$, где $\mathbf{H}'$ — малое переменное произвольно направленное поле, а $\mathbf{H}_0$ — постоянное поле, которое будем считать направленным вдоль оси z[1]). Вместе с полем $\mathbf{H}'$ мала также и создаваемая им поперечная намагниченность M_x, M_y, а $M_z \approx M = \text{const}$. Пренебрегая малыми величинами второго порядка, находим уравнения

$$-i\omega M_x = -\gamma(H_0 + \beta M)M_y + \gamma M H'_y,$$
$$-i\omega M_y = \gamma(H_0 + \beta M)M_x - \gamma M H'_x.$$

Определив отсюда M_x, M_y, найдем восприимчивость (как коэффициенты в соотношениях $M'_i = \chi_{ik}H'_k$), а по ней — проницаемость:

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = 1 - \frac{4\pi}{\beta}\frac{\omega_M(\omega_M + \omega_H)}{\omega^2 - (\omega_M + \omega_H)^2} \equiv \mu, \qquad \mu_{zz} = 1,$$
$$\mu_{xy} = -\mu_{yx} = i\frac{4\pi}{\beta}\frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - (\omega_M + \omega_H)^2}, \qquad \mu_{xz} = \mu_{yz} = 0, \qquad (1)$$

где $\omega_M = \gamma\beta M$, $\omega_H = \gamma H_0$. Обратим внимание на гиротропию ферромагнитной среды (определение этого понятия см. в § 101).

2. Найти частоты однородного ферромагнитного резонанса эллипсоида, одна из главных осей которого совпадает с осью легкого намагничения. В этом же направлении приложено внешнее поле (*Ch. Kittel,* 1947)[2]).

Решение. Внутри эллипсоида вдоль оси z (ось легкого намагничения) имеется поле

$$H_0 = \mathfrak{H} - 4\pi n^{(z)} M$$

[1]) Это поле вводим здесь, имея в виду применение результатов в следующих задачах.

[2]) В задачах 2–4 предполагается, что магнитная проницаемость вещества дается формулами (1).

($n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ — коэффициенты размагничивания вдоль главных осей эллипсоида). Простое вычисление определителя (79.8) приводит к уравнению

$$\frac{\omega^{(x)}\omega^{(y)} - \omega^2}{(\omega_M + \omega_H)^2 - \omega^2} = 0,$$

где

$$\omega^{(x)} = \gamma[M\beta + \mathfrak{H} + 4\pi M(n^{(x)} - n^{(z)})],$$
$$\omega^{(y)} = \gamma[M\beta + \mathfrak{H} + 4\pi M(n^{(y)} - n^{(z)})].$$

Отсюда для частоты однородного резонанса:

$$\omega = (\omega^{(x)}\omega^{(y)})^{1/2}.$$

Так, для шара имеем $n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)} = 1/3$ и резонансная частота

$$\omega = \gamma(M\beta + \mathfrak{H}).$$

Для плоскопараллельной пластинки, поверхность которой перпендикулярна к оси легкого намагничения, имеем $n^{(x)} = n^{(y)} = 0$, $n^{(z)} = 1$, и резонансная частота

$$\omega = \gamma(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M)$$

(пластинка намагничена, если $M\beta + \mathfrak{H} > 4\pi M$).

3. Найти закон дисперсии магнитостатических колебаний в неограниченной среде.

Р е ш е н и е. С тензором μ_{ik} из (1) уравнение (79.6) принимает вид

$$\mu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Положив $\psi \propto e^{i\mathbf{kr}}$, найдем

$$\mu(\omega) = -\operatorname{ctg}^2\theta,$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и осью легкого намагничения (осью z). С $\mu(\omega)$ из (1) ($\mathfrak{H} = 0$) получим частоту колебаний

$$\omega = \gamma M(\beta + 4\pi\sin^2\theta)^{1/2}.$$

Она зависит только от направления, но не от величины волнового вектора. Этот результат совпадает, как и должно быть, с предельным (при $k \to 0$) законом дисперсии спиновых волн в ферромагнетике (см. IX, § 70).

4. Найти частоты неоднородного резонанса в неограниченной плоскопараллельной пластинке, поверхность которой перпендикулярна к оси легкого намагничения; вдоль этой же оси направлено внешнее поле $\mathfrak{H}$.

Р е ш е н и е. Надо найти решение уравнения (2) для потенциала $\psi^{(i)}$ внутри пластинки и уравнения $\Delta\psi^{(e)} = 0$ для потенциала вне пластинки с граничными условиями

$$\varphi^{(i)} = \varphi^{(e)}, \quad \frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial z} = \frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = \pm L,$$
$$\varphi^{(e)} \to 0 \quad \text{при} \quad |z| \to \infty$$

(ось z перпендикулярна к поверхности пластинки, плоскость $z = 0$ проходит через ее середину, $2L$ — толщина пластинки). Такое решение может быть

четным или нечетным по z. В первом случае

$$\varphi^{(i)} = A\cos k_z z\cdot e^{ik_x x}, \quad \varphi^{(e)} = Be^{-k_x|z|}e^{ik_x x},$$

причем $\mu k_x^2 = -k_z^2$ (волновой вектор лежит в плоскости xz); граничные условия приводят к соотношению

$$\operatorname{tg}(k_z L) = \frac{k_x}{k_z}. \tag{3}$$

Во втором случае

$$\varphi^{(i)} = A\sin(k_z z)\cdot e^{ik_x x}, \quad \varphi^{(e)} = \pm Be^{-k_x|z|}e^{ik_x x},$$

и из граничных условий получаем

$$\operatorname{tg}(k_z L) = -\frac{k_z}{k_x}. \tag{4}$$

Размагничивающий коэффициент пластинки $n^{(z)} = 1$, так что размагничивающее поле: $-4\pi M$. С выражением $\mu(\omega)$ из (1) находим частоту колебаний:

$$\omega^2 = \gamma^2(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M)(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M\cos^2\theta), \tag{5}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и осью z. При каждом произвольном значении k_x имеется бесконечное множество дискретных значений k_z, определяемых условиями (3) и (4). Соответствующие частоты даются выражением (5) и зависят только от отношения k_x/k_z. Все возможные значения частоты лежат в интервале

$$\gamma(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M) \leqslant \omega \leqslant \gamma[(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M)(M\beta + \mathfrak{H})]^{1/2}.$$

При $k_z \to 0$ возможны только симметричные колебания и из (3) видно, что $k_x L \sim (k_z L)^2$, т. е. является малой величиной второго порядка. Положив соответственно этому в (5) $\theta = 0$, найдем частоту, совпадающую, как и должно быть, с частотой однородного резонанса.

§ 80. Энергия поля в диспергирующих средах

Формула

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{80.1}$$

для плотности потока энергии остается справедливой в любых переменных электромагнитных полях, в том числе и при наличии дисперсии. Это вполне очевидно из указанных уже в конце § 30 соображений: ввиду непрерывности тангенциальных составляющих $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ формула (80.1) однозначно следует из условия непрерывности нормальной составляющей $\mathbf{S}$ на границе тела и из того, что она справедлива в пустоте вне тела.

Изменение (в 1 с) энергии, сосредоточенной в единице объема тела, вычисляется как $\operatorname{div}\mathbf{S}$. С помощью уравнений Максвелла это выражение приводится к виду

$$-\operatorname{div}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) \tag{80.2}$$

(см. (75.15)). В диэлектрической среде в отсутствие дисперсии, когда ε и μ являются вещественными постоянными величинами, эту величину можно рассматривать как изменение электромагнитной энергии

$$U = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2), \tag{80.3}$$

имеющей точный термодинамический смысл: это есть разность между внутренней энергией 1 см^3 вещества при наличии поля и энергией в отсутствие поля при тех же плотности и энтропии.

При наличии дисперсии такое простое толкование уже невозможно. Более того, в общем случае произвольной дисперсии оказывается невозможным какое-либо разумное определение электромагнитной энергии как термодинамической величины. Это обусловлено тем, что наличие дисперсии связано, вообще говоря, с одновременным наличием диссипации энергии: диспергирующая среда в то же время является поглощающей.

Для определения этой диссипации рассмотрим монохроматическое электромагнитное поле. Усреднив по времени величину (80.2), мы тем самым найдем систематический приток энергии (в единицу времени в единицу объема среды) от внешних источников, поддерживающих поле. Поскольку амплитуда монохроматического поля предполагается постоянной, вся эта энергия идет на покрытие ее диссипации. Таким образом, в рассматриваемых условиях усредненная по времени величина (80.2) и дает среднее количество тепла Q, выделяющегося в 1 с в 1 см^3 среды.

Поскольку выражение (80.2) квадратично по полю, то при его вычислении все величины должны быть написаны в вещественном виде. Если же понимать под $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, как это удобно для монохроматического поля, комплексные представления величин, то в (80.2) надо подставить для $\mathbf{E}$ и $\partial \mathbf{D}/\partial t$ соответственно выражения

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \text{ и } \frac{1}{2}(-i\omega\varepsilon\mathbf{E} + i\omega\varepsilon^*\mathbf{E}^*)$$

и аналогично для $\mathbf{H}$ и $\partial \mathbf{B}/\partial t$. При усреднении по времени произведения $\mathbf{EE}$ и $\mathbf{E}^*\mathbf{E}^*$, содержащие множители $e^{\mp 2i\omega t}$, обращаются в нуль; остается:

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi}\{(\varepsilon^* - \varepsilon)\mathbf{EE}^* + (\mu^* - \mu)\mathbf{HH}^*\} = \frac{\omega}{8\pi}(\varepsilon''|\mathbf{E}|^2 + \mu''|\mathbf{H}|^2). \tag{80.4}$$

Это выражение можно написать также в виде

$$Q = \frac{\omega}{4\pi}(\varepsilon''\overline{\mathbf{E}^2} + \mu''\overline{\mathbf{H}^2}), \tag{80.5}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — вещественные напряженности поля, а черта означает усреднение по времени (ср. примеч. на с. 300).

Легко получить также формулу, определяющую диссипацию энергии в немонохроматическом поле, достаточно быстро обращающемся в нуль при $t \to \pm\infty$. В этом случае имеет смысл рассматривать диссипацию не в единицу времени, а за все время существования поля.

Разложив поле $\mathbf{E}(t)$ в интеграл Фурье, пишем

$$\mathbf{E}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} = -i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi},$$

причем $\mathbf{E}_{-\omega} = \mathbf{E}^*_\omega$. Написав произведение этих величин в виде двойного интеграла и проинтегрировав затем по времени, имеем

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,dt = -\frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega\mathbf{E}_{\omega'}e^{-i(\omega+\omega')t}\frac{d\omega\,d\omega'}{(2\pi)^2}\,dt.$$

Интегрирование по t осуществляется формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega')t}\,dt = 2\pi\delta(\omega+\omega'),$$

после чего δ-функция устраняется интегрированием по ω'. В результате получим

$$-\frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega\varepsilon(\omega)|\mathbf{E}_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi}.$$

После подстановки $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ член с $\varepsilon'(\omega)$ обращается в нуль при интегрировании ввиду нечетности подынтегрального выражения как функции ω. Вместе с аналогичным выражением для магнитного поля окончательно находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q\,dt = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega[\varepsilon''(\omega)|\mathbf{E}_\omega|^2 + \mu''(\omega)|\mathbf{H}_\omega|^2]\frac{d\omega}{2\pi} \tag{80.6}$$

(интеграл по ω от $-\infty$ до ∞ может быть заменен удвоенным интегралом от 0 до ∞).

Полученные формулы показывают, что поглощение (диссипация) энергии определяется мнимыми частями ε и μ; о двух членах в (80.5) говорят соответственно как об электрических и магнитных потерях. В силу закона возрастания энтропии эти потери имеют вполне определенный знак: диссипация энергии сопровождается выделением тепла, т. е. всегда $Q > 0$. Отсюда следует, что мнимые части ε и μ всегда положительны:

$$\varepsilon'' > 0, \quad \mu'' > 0 \tag{80.7}$$

для всех веществ и при всех (положительных) частотах[1]. Знак же вещественных частей ε и μ (при $\omega \neq 0$) не ограничен никакими физическими условиями, так что ε' и μ' могут быть как положительными, так и отрицательными.

Всякий нестационарный процесс в реальном веществе всегда в той или иной степени термодинамически необратим. Поэтому электрические и магнитные потери в переменном электромагнитном поле всегда в какой-то (хотя бы и малой) степени имеются. Другими словами, функции $\varepsilon''(\omega)$ и $\mu''(\omega)$ не обращаются строго в нуль ни при каком отличном от нуля значении частоты. Мы увидим в следующем параграфе, что это утверждение имеет существенное принципиальное значение, хотя им ни в какой мере не исключается возможность существования таких областей частот, при которых потери становятся относительно весьма малыми.

Области частот, в которых ε'' и μ'' очень малы (по сравнению с ε' и μ'), называют *областями прозрачности* вещества. Пренебрегая поглощением, в этих областях оказывается возможным ввести понятие о внутренней энергии тела в электромагнитном поле в том же смысле, какой она имеет в постоянном поле.

Для определения этой величины недостаточно рассматривать чисто монохроматическое поле, так как благодаря его строгой периодичности в нем не происходит никакого систематического накопления электромагнитной энергии. Поэтому мы рассмотрим поле, представляющее собой совокупность монохроматических компонент с частотами в узком интервале вокруг некоторого среднего значения ω_0. Напряженности такого поля можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \tag{80.8}$$

где $\mathbf{E}_0(t)$, $\mathbf{H}_0(t)$ — медленно (по сравнению с множителем $\exp(-i\omega_0 t)$) меняющиеся функции времени. Вещественные части этих выражений должны быть подставлены в правую часть (80.2), после чего мы произведем усреднение по времени по периоду $2\pi/\omega_0$, малому по сравнению со временем изменения множителей $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$.

[1] Это утверждение относится к телам, находящимся (в отсутствие переменного поля) в термодинамически равновесном состоянии, что мы везде и подразумеваем. Если тело уже само по себе не находится в тепловом равновесии, то Q могло бы быть, в принципе, и отрицательным. Второй закон термодинамики требует лишь суммарного возрастания энтропии как под влиянием переменного электромагнитного поля, так и от термодинамической неравновесности, не имеющей отношения к наличию поля. Примером такого тела может являться вещество, атомы которого искусственно (т. е. не под влиянием самопроизвольного теплового возбуждения, а внешним «полем накачки») приведены в возбужденные состояния.

Первый член в (80.2) после перехода к комплексному представлению $\mathbf{E}$ принимает вид

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{E}+\mathbf{E}^*}{2}\frac{\dot{\mathbf{D}}+\dot{\mathbf{D}}^*}{2}$$

(и аналогично для второго члена). Произведения $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}$ и $\mathbf{E}^*\dot{\mathbf{D}}^*$ исчезнут при указанном усреднении по времени, и потому их вообще не надо рассматривать. Таким образом, остается лишь

$$\frac{1}{16\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}^*}{\partial t}+\mathbf{E}^*\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right). \tag{80.9}$$

Напишем производную $\partial\mathbf{D}/\partial t$ в виде $\widehat{f}\mathbf{E}$, где $\widehat{f}$ обозначает оператор

$$\widehat{f}=\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\varepsilon},$$

и выясним, к какому результату приводит действие этого оператора на функцию вида (80.8). Если бы $\mathbf{E}_0$ была постоянной, то мы имели бы просто

$$\widehat{f}\mathbf{E}=f(\omega)\mathbf{E},\quad f(\omega)=-i\omega\varepsilon(\omega).$$

В нашем же случае произведем разложение Фурье функции $\mathbf{E}_0(t)$, представив ее в виде наложения компонент вида $\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i\alpha t}$ с постоянными $\mathbf{E}_{0\alpha}$. Медленность изменения $\mathbf{E}_0(t)$ означает, что в это разложение войдут лишь компоненты с $\alpha\ll\omega_0$. Имея это в виду, пишем

$$\widehat{f}\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}=f(\alpha+\omega_0)\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}\approx$$
$$\approx\left[f(\omega_0)+\alpha\frac{df(\omega_0)}{d\omega_0}\right]\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}.$$

Произведя теперь обратное суммирование компонент Фурье, получим

$$\widehat{f}\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}=f(\omega_0)\mathbf{E}_0e^{-i\omega_0 t}+i\frac{df(\omega_0)}{d\omega_0}\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}e^{-i\omega_0 t}.$$

Опуская ниже индекс 0 у ω_0, имеем, таким образом:

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=-i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}+\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}e^{-i\omega t}. \tag{80.10}$$

Подставив это выражение в (80.9) и помня, что мнимой частью функции $\varepsilon(\omega)$ мы пренебрегаем, получим

$$\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\left(\mathbf{E}_0^*\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}+\mathbf{E}_0\frac{\partial\mathbf{E}_0^*}{\partial t}\right)=\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\mathbf{E}^*)$$

(произведение $\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*$ совпадает с $\mathbf{E}\mathbf{E}^*$). Прибавив аналогичное выражение с магнитным полем, приходим к выводу, что

скорость систематического изменения энергии 1 см^3 среды дается производной $d\overline{U}/dt$, где

$$\overline{U} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\mathbf{E}\mathbf{E}^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\mathbf{H}\mathbf{H}^*\right]. \tag{80.11}$$

С помощью вещественных напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ это выражение напишется в виде

$$\overline{U} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\overline{\mathbf{E}^2} + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\overline{\mathbf{H}^2}\right] \tag{80.12}$$

(*L. Brillouin*, 1921).

Это и есть искомый результат: $\overline{U}$ есть среднее значение электромагнитной части внутренней энергии единицы объема прозрачной среды. При отсутствии дисперсии ε и μ постоянны и (80.12) переходит, как и должно быть, в среднее значение выражения (80.3).

Если подвод электромагнитной энергии к телу извне прекращается, то фактически всегда имеющееся хотя бы очень малое поглощение приведет в конце концов к переходу всей энергии $\overline{U}$ в тепло. Поскольку, согласно закону возрастания энтропии, это тепло должно именно выделяться, а не поглощаться, то должно быть $\overline{U} > 0$. Согласно формуле (80.11) для этого должны выполняться неравенства

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} > 0, \qquad \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} > 0. \tag{80.13}$$

В действительности эти условия автоматически выполняются как следствие более сильных неравенств, которым всегда удовлетворяют функции $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ в областях прозрачности (см. примеч. на с. 418).

Подчеркнем лишний раз, что выражение (80.12) получено в первом приближении по частотам α изменения амплитуды $\mathbf{E}_0(t)$. Поэтому оно справедливо только для полей, амплитуда которых меняется со временем достаточно медленно (это замечание относится также и к вычислению тензора напряжений в следующем параграфе).

§ 81. Тензор напряжений в диспергирующих средах

Представляет существенный интерес также и вопрос о среднем (по времени) тензоре напряжений, определяющем силы, действующие на вещество в переменном электрическом поле. Покажем, что и при наличии дисперсии (но по-прежнему в отсутствие поглощения) выражение для этого тензора не содержит, в отличие от выражения (80.12) для энергии, производных по

частоте. В частности, для прозрачной диспергирующей изотропной жидкости в монохроматическом электрическом поле среднее значение $\overline{\sigma}_{ik}$ получается из (15.9) просто заменой ε на $\varepsilon(\omega)$ и произведений E_iE_k, $\mathbf{E}^2$ их средними значениями $\overline{E_iE_k}$, $\overline{\mathbf{E}^2}$ (*Л.П. Питаевский*, 1960).

Для доказательства этого утверждения вернемся к изложенному в § 15 выводу, несколько переформулировав его. Мы рассматривали там заполненный диэлектриком плоский конденсатор и определяли тензор напряжений из условия равенства работы пондеромоторных сил при смещении обкладки изменению соответствующего термодинамического потенциала. Напишем здесь это условие для полных (а не на единицу площади) величин, представив его в виде

$$A\sigma_{ik}\xi_i n_k = (\delta\mathscr{U})_{\mathscr{S},e} \tag{81.1}$$

(A — площадь обкладки конденсатора). Вместо потенциала $\widetilde{\mathscr{F}}$ здесь использована обычная энергия $\mathscr{U}$, изменение которой рассматривается при заданных значениях энтропии $\mathscr{S}$ диэлектрика и полных зарядов $\pm e$ на обкладках конденсатора (вместо заданного потенциала φ); использовано, что согласно теореме о малых добавках

$$(\delta\widetilde{\mathscr{F}})_{T,\varphi} = (\delta\mathscr{U})_{\mathscr{S},e}.$$

В виде (81.1) это условие имеет особенно простой смысл: теплоизолированный конденсатор с заданными зарядами на обкладках представляет собой электрически замкнутую систему; если же внешний источник производит над ним механическую работу (смещая обкладки), то вся эта работа идет на увеличение энергии конденсатора. Энергия конденсатора:

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}_0 + \frac{e^2}{2C}, \tag{81.2}$$

где $\mathscr{U}_0$ — энергия диэлектрика в отсутствие поля (при том же значении энтропии $\mathscr{S}$), а C — емкость конденсатора; для плоского конденсатора $C = \varepsilon A/(4\pi h)$, где h — расстояние между обкладками. Отсюда:

$$(\delta\mathscr{U})_{\mathscr{S},e} = (\delta\mathscr{U}_0)_{\mathscr{S}} - \frac{e^2}{2C^2}(\delta C)_{\mathscr{S}}. \tag{81.3}$$

Выразив δC через смещение обкладок ξ (с учетом зависимости ε от плотности диэлектрика, меняющейся при смещении), легко получить формулу (15.9) [1]); ввиду очевидности результата, не будем на этом останавливаться.

[1]) При этом она окажется выраженной через другие переменные: вместо изотермических производной $\partial\varepsilon/\partial\rho$ и функции P_0 в ней будут фигурировать адиабатические. Оба выражения, разумеется, эквивалентны.

При наличии дисперсии выражение для энергии $\mathcal{U}$ меняется. Покажем, что тем не менее соотношение (81.3) остается в силе для средней по времени вариации $\overline{\delta\mathcal{U}}$, тем самым будет доказано и сделанное выше утверждение об усредненном тензоре напряжений.

Пусть заряд на обкладках конденсатора меняется по монохроматическому закону с частотой ω. Тогда конденсатор сам по себе уже не будет электрически замкнутой системой, ввиду необходимости подводить и отводить заряд. Такой системой, однако, является колебательный контур с собственной частотой ω, состоящий из конденсатора и должным образом подобранной самоиндукции [1]; поэтому для его энергии справедливо соотношение (81.1).

В отсутствие сопротивления разность потенциалов φ на обкладках конденсатора равна сумме внешней электродвижущей силы и электродвижущей силы самоиндукции:

$$\varphi = \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt}, \tag{81.4}$$

а ток J связан с зарядом e на обкладках конденсатора равенством $J = de/dt$. Для величин, меняющихся со временем по монохроматическому закону, по определению емкости $C(\omega)$ имеем $\varphi = e/C(\omega)$. Положив в (81.4) $\mathcal{E} = 0$, $J = -i\omega e$, прежде всего найдем, что и при наличии дисперсии емкости собственная частота контура по-прежнему удовлетворяет соотношению Томсона (62.5):

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{LC(\omega)}}. \tag{81.5}$$

Далее, умножив равенство (81.4) на $J = de/dt$ и рассматривая (как при выводе (80.12)) «почти монохроматические» величины, без труда получим

$$\overline{\mathcal{E} J} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{L\overline{J^2}}{2} + \frac{d(\omega C)}{d\omega} \frac{\overline{\varphi^2}}{2} \right\}.$$

Из вида этого равенства ясно, что выражение в фигурных скобках представляет собой энергию $\mathcal{U}$ колебательного контура. Первый член в этом выражении преобразуем, подставив $J = -i\omega e$ и используя (81.5):

$$\frac{1}{2c^2} L\overline{J^2} = \frac{1}{2c^2} L\omega^2 \overline{e^2} = \frac{1}{2c^2} LC^2\omega^2 \overline{\varphi^2} = \frac{C\overline{\varphi^2}}{2}.$$

---

[1]) Для выполнения условий квазистационарности необходимо, чтобы размеры контура были малыми по сравнению с длиной волны c/ω. Это ограничение, однако, не имеет принципиального характера и не умаляет общности излагаемого вывода.

Окончательно запишем энергию контура в виде [1]

$$\overline{\mathscr{U}} = \frac{1}{\omega}\frac{d(\omega^2 C)}{d\omega}\frac{\overline{\varphi^2}}{2}. \tag{81.6}$$

Нам надо вычислить вариацию этой энергии при малом смещении обкладок конденсатора, т. е. при малом изменении его емкости. В переменном поле это смещение надо представлять себе как происходящее бесконечно медленно. Но при таком изменении остается постоянным адиабатический инвариант, равный (как и для всякой линейной колебательной системы) отношению энергии колебаний к частоте [2]. Таким образом, $\delta(\overline{\mathscr{U}}/\omega) = 0$, т. е.

$$\delta\overline{\mathscr{U}} = \overline{\mathscr{U}}\frac{\delta\omega}{\omega}. \tag{81.7}$$

Из равенства (81.5) имеем, при малом изменении емкости конденсатора:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\delta C}{2C}. \tag{81.8}$$

Но изменение емкости складывается из двух частей:

$$\delta C = (\delta C)_{\text{ст}} + \frac{dC}{d\omega}\delta\omega. \tag{81.9}$$

Первый член есть «статическая» часть изменения, связанная с деформацией так же, как и в статическом случае (здесь существенно, что при наличии дисперсии емкость $C(\omega)$ выражается через $\varepsilon(\omega)$ так же, как в статическом случае). Второй же член связан просто с изменением частоты. Из (81.8), (81.9) находим для «статической» части

$$(\delta C)_{\text{ст}} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{d(\omega^2 C)}{d\omega}\delta\omega. \tag{81.10}$$

При подстановке (81.6) в (81.7) с учетом (81.10) производная $dC/d\omega$ выпадает и вариация энергии получается в виде

$$\delta\overline{\mathscr{U}} = -\frac{\overline{\varphi^2}}{2}(\delta C)_{\text{ст}} = -\frac{\overline{e^2}}{2C^2}(\delta C)_{\text{ст}}, \tag{81.11}$$

действительно совпадающем с усредненным вторым членом в (81.3).

Заметим, что выпадение членов с производной по ω в $\delta\overline{\mathscr{U}}$ имеет совершенно общий характер и не связано с конкретным способом изменения состояния тела (в данном случае — конденсатора).

[1] Здесь и ниже для упрощения записи формул опускаем в энергии ее «неэлектромагнитную» часть $\mathscr{U}_0$.

[2] Ср. I, § 49. Инвариантность указанной величины особенно наглядна в терминах квантовой теории: отношение $\overline{\mathscr{U}}/\hbar\omega$ есть номер квантового состояния, не меняющийся при адиабатическом изменении условий.

В частности, для среды с дисперсией остается справедливой (с заменой $\mathbf{E}^2$ на $\overline{\mathbf{E}^2}$) формула (14.1) для изменения свободной энергии при малом изменении ε:

$$\delta\mathscr{F} = -\int \delta\varepsilon(\omega)\frac{\overline{\mathbf{E}^2}}{8\pi}\,dV, \tag{81.12}$$

причем под $\delta\varepsilon$ следует понимать «статическое» изменение ε при заданной частоте.

Зная тензор напряжений, можно по формуле (75.17) найти силу, действующую на единицу объема диэлектрика. При этом члены, содержащие пространственные производные, совпадут с соответствующими членами усредненного по времени выражения (75.18) (в котором надо положить $\mu = 1$). Член же с производной по времени (сила Абрагама) оказывается другим.

Действительно, этот член возникает как разность

$$\frac{1}{4\pi c}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{DH}] - \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]\right\},$$

которая должна быть теперь усреднена по времени. Для этого выражаем $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в комплексном виде (т. е. заменяем их на $(\mathbf{D}+\mathbf{D}^*)/2$ и т. д.), после чего для производной $\partial\mathbf{D}/\partial t$ используем формулу (80.10). В результате получим силу Абрагама в виде

$$\frac{1}{8\pi c}(\varepsilon - 1)\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}^*] + \frac{1}{8\pi c}\omega\frac{d\varepsilon}{d\omega}\operatorname{Re}\left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{H}^*\right] \tag{81.13}$$

(*Х. Вашина, В.И. Карпман*, 1976).

Вопрос о тензоре напряжений в переменном поле имеет смысл не только для прозрачной, но и для поглощающей среды, — в противоположность вопросу о внутренней энергии, который может быть сформулирован лишь в пренебрежении диссипацией. Есть, однако, основания полагать, что в поглощающей среде тензор напряжений не может быть выражен через одну лишь диэлектрическую проницаемость, а потому вообще не может быть найден в общем виде макроскопическим путем.

§ 82. Аналитические свойства функции $\varepsilon(\omega)$

Функция $f(\tau)$ в (77.3) конечна при всех значениях своего аргумента, в том числе и при $\tau = 0$ [1]). У диэлектриков эта функция стремится при $\tau \to \infty$ к нулю. Это обстоятельство является просто выражением того факта, что на значение $\mathbf{D}(t)$ в заданный

[1]) Именно для этой цели в интегральной зависимости (77.3) выделен член $\mathbf{E}(t)$; в противном случае функция $f(\tau)$ имела бы при $\tau = 0$ особенность типа δ-функции.

момент времени не могут заметно влиять значения $\mathbf{E}(t)$ в очень давние моменты. Физический механизм, лежащий в основе интегральной зависимости вида (77.3), заключается в процессах установления электрической поляризации. Поэтому интервал значений, в котором функция $f(\tau)$ заметно отличается от нуля, — порядка величины времени релаксации, характеризующего скорость этих процессов.

Сказанное относится и к металлам, с той только разницей, что стремится к нулю при $\tau \to \infty$ не сама функция $f(\tau)$, а разность $f(\tau) - 4\pi\sigma$. Это отличие связано с тем, что уже прохождение стационарного тока проводимости, хотя и не приводит к какому-либо реальному изменению физического состояния металла, но в наших уравнениях формально означает появление индукции $\mathbf{D}$ согласно

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}$$

или

$$\mathbf{D}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} 4\pi\sigma\mathbf{E}(\tau)\,d\tau = 4\pi\sigma\int\limits_{0}^{\infty}\mathbf{E}(t-\tau)\,d\tau.$$

Функция $\varepsilon(\omega)$ была определена согласно (77.5):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int\limits_{0}^{\infty} e^{i\omega\tau} f(\tau)\,d\tau. \qquad (82.1)$$

Оказывается возможным выяснить некоторые весьма общие свойства этой функции, рассматривая ω как комплексную переменную ($\omega = \omega' + i\omega''$). Эти свойства можно было бы сформулировать здесь сразу, заметив, что электрическая восприимчивость $[\varepsilon(\omega) - 1]/(4\pi)$ относится к категории величин (обобщенных восприимчивостей), рассмотренных уже в V, § 123. Тем не менее, мы частично повторим здесь соответствующие рассуждения и результаты — как с целью облегчения чтения, так и с целью подчеркнуть некоторые различия между случаями диэлектриков и металлов.

Из определения (82.1) и из указанных выше свойств функции $f(\tau)$ следует, что во всей верхней полуплоскости $\varepsilon(\omega)$ есть однозначная функция, нигде не обращающаяся в бесконечность, т. е. не имеющая никаких особых точек. Действительно, при $\omega'' > 0$ в подынтегральном выражении в формуле (82.1) имеется экспоненциально убывающий множитель $e^{-\omega''\tau}$, а поскольку и функция $f(\tau)$ конечна во всей области интегрирования, то интеграл сходится. Функция $\varepsilon(\omega)$ не имеет особенностей и на самой вещественной оси ($\omega'' = 0$), за исключением, возможно, лишь начала координат (у металлов $\varepsilon(\omega)$ имеет в этой точке простой полюс).

В нижней же полуплоскости определение (82.1) неприменимо, так как интеграл расходится. Поэтому функция $\varepsilon(\omega)$ в ниж-

ней полуплоскости может быть определена лишь как аналитическое продолжение формулы (82.1) из верхней полуплоскости. В этой области функция $\varepsilon(\omega)$ имеет, вообще говоря, особые точки. Функция $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости имеет не только формальный математический, но и физический смысл: ею определяется связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ для полей с возрастающей (как $e^{\omega'' t}$) амплитудой. В нижней же полуплоскости такое физическое истолкование невозможно уже хотя бы потому, что наличие затухающего (как $\exp(-|\omega''|t)$) поля предполагает его бесконечную величину при $t \to -\infty$.

Обратим внимание на то, что вывод об отсутствии особых точек у функции $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости является с физической точки зрения следствием принципа причинности. Последний проявляется в том, что интегрирование в (77.3) производится лишь по времени, предшествующему данному моменту t, в результате чего в формуле (82.1) область интегрирования и распространяется от 0 до ∞ (а не от $-\infty$ до $+\infty$).

Из определения (82.1) очевидно, далее, что

$$\varepsilon(-\omega^*) = \varepsilon^*(\omega). \tag{82.2}$$

Это есть обобщение соотношения (77.7), относящегося к вещественным значениям ω. В частности, для чисто мнимых значений ω имеем

$$\varepsilon(i\omega'') = \varepsilon^*(i\omega''). \tag{82.3}$$

Это значит, что на верхней мнимой полуоси функция $\varepsilon(\omega)$ вещественна [1]).

Подчеркнем, что свойство (82.2) выражает собой просто тот факт, что операторная связь $\mathbf{D} = \widehat{\varepsilon}\,\mathbf{E}$ должна обеспечивать вещественность $\mathbf{D}$ при вещественном $\mathbf{E}$. Если функция $\mathbf{E}(t)$ дается вещественным выражением

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega^* t}, \tag{82.4}$$

то, применяя оператор $\widehat{\varepsilon}$ к каждому из двух членов, получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \varepsilon(-\omega^*)\mathbf{E}_0^* e^{i\omega^* t};$$

условие вещественности этой величины совпадает с (82.2).

Согласно результатам § 80 мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ положительна при положительных вещественных значениях $\omega = \omega'$, т. е.

[1]) Для нижней мнимой полуоси такое заключение было бы, вообще говоря, несправедливо. Функция $\varepsilon(\omega)$ может иметь здесь точки ветвления, и для ее определения в нижней полуплоскости как аналитической функции может оказаться необходимым разрез по полуоси. Тогда равенство (82.2) означает лишь комплексную сопряженность значений $\varepsilon(\omega)$ на противоположных берегах разреза.

на правой части вещественной оси. Поскольку, согласно (82.2), $\operatorname{Im}\varepsilon(-\omega') = -\operatorname{Im}\varepsilon(\omega')$, то на левой части этой оси мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ отрицательна. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad \omega = \omega' > 0, \\ &\operatorname{Im}\varepsilon < 0 \quad \text{при} \quad \omega = \omega' < 0. \end{aligned} \tag{82.5}$$

В точке же $\omega = 0$ функция $\operatorname{Im}\varepsilon$ меняет знак, проходя через нуль (у диэлектриков) или через бесконечность (у металлов). Это — единственная точка на вещественной оси, в которой $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$ может обратиться в нуль.

При стремлении ω к бесконечности по любому пути (в верхней полуплоскости) функция $\varepsilon(\omega)$ стремится к единице. Это обстоятельство было указано уже в § 78 для случая, когда $\omega \to \infty$ вдоль вещественной оси. В общем случае это видно из той же формулы (82.1): если $\omega \to \infty$ так, что $\omega'' \to \infty$, то интеграл в (82.1) обращается в нуль благодаря наличию в подынтегральном выражении множителя $\exp(-\tau\omega'')$; если же ω'' остается конечным, а $|\omega'| \to \infty$, то обращение интеграла в нуль происходит благодаря наличию осциллирующего множителя $e^{i\omega'\tau}$.

Перечисленных свойств функции $\varepsilon(\omega)$ достаточно для того, чтобы доказать следующую теорему: функция $\varepsilon(\omega)$ не принимает вещественных значений ни в какой конечной точке верхней полуплоскости, за исключением лишь точек мнимой оси; на последней же $\varepsilon(\omega)$ монотонно убывает от значения $\varepsilon_0 > 1$ (у диэлектриков) или от $+\infty$ (у металлов) при $\omega = i0$ до 1 при $\omega = i\infty$. Отсюда следует, в частности, что функция $\varepsilon(\omega)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости. Мы не будем повторять здесь доказательство этих утверждений, приведенное в V, § 123; нужно помнить лишь, что роль обобщенной восприимчивости играет не сама функция $\varepsilon(\omega)$, а разность $\varepsilon(\omega) - 1$.

Мы не будем повторять также вывода соотношений, связывающих друг с другом мнимую и вещественную части функции $\varepsilon(\omega)$. Выпишем лишь окончательные формулы с соответствующим образом измененными обозначениями.

Напишем функцию $\varepsilon(\omega)$ вещественной переменной ω, как и в § 77, в виде $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. Если функция $\varepsilon(\omega)$ относится к диэлектрику, указанные соотношения имеют вид

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega}\, dx, \tag{82.6}$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x - \omega}\, dx, \tag{82.7}$$

где перечеркнутый знак интеграла означает, что интеграл от полюсного выражения понимается в смысле его главного значения (*H.A. Kramers*, *R.L. Kronig*, 1927). Напомним, что единственным существенным свойством функции $\varepsilon(\omega)$, использованным при выводе этих формул, является отсутствие особых точек в верхней полуплоскости. Поэтому можно сказать, что формулы Крамерса–Кронига (как и указанное свойство функции $\varepsilon(\omega)$) являются прямым следствием физического принципа причинности.

Воспользовавшись нечетностью функции $\varepsilon''(\omega)$, можно привести формулу (82.6) к виду

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \fint_0^{\infty} \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2 - \omega^2}\, dx. \tag{82.8}$$

Если речь идет о проводнике, то в точке $\omega = 0$ функция $\varepsilon(\omega)$ имеет полюс, вблизи которого $\varepsilon = 4\pi\sigma i/\omega$ (77.9). Это приводит к появлению в формуле (82.7) дополнительного члена (ср. V, (123.18)):

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(x)}{x - \omega}\, dx + \frac{4\pi\sigma}{\omega}; \tag{82.9}$$

формула же (82.6) или (82.8) остается неизменной. Кроме того, в случае металлов надо сделать еще следующее замечание. В конце § 77 было указано, что у металлов могут существовать области частот, в которых функция $\varepsilon(\omega)$ теряет свой физический смысл в связи с эффектами пространственной неоднородности поля. Между тем, в рассматриваемых формулах интегрирование должно вестись по всем частотам. В таких случаях под $\varepsilon(\omega)$ в соответствующих областях частот надо понимать функцию, получающуюся в результате решения формальной задачи о поведении тела в фиктивном пространственно однородном периодическом электрическом поле (а не в неизбежно неоднородном поле электромагнитной волны).

Особенно существенна формула (82.8). Она дает возможность вычислить функцию $\varepsilon'(\omega)$, если известна хотя бы приближенным (например, эмпирическим) образом функция $\varepsilon''(\omega)$ для данного тела. При этом существенно, что для любой функции $\varepsilon''(\omega)$, удовлетворяющей физически необходимому требованию $\varepsilon'' > 0$ при $\omega > 0$, формула (82.8) дает функцию $\varepsilon'(\omega)$, не противоречащую никаким необходимым физическим требованиям, т. е. принципиально возможную (знак и величина ε' не ограничиваются никакими общими физическими условиями). Это обстоятельство и дает возможность использовать формулу (82.8) даже по приближенной функции $\varepsilon''(\omega)$. Напротив, формула (82.7) не дает (в общем случае произвольной функции $\varepsilon'(\omega)$) физически

возможной функции $\varepsilon''(\omega)$, так как не обеспечивает автоматическим образом положительность последней.

В теории дисперсии принято записывать выражение для $\varepsilon'(\omega)$ в виде

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = -\frac{4\pi e^2}{m} \fint_0^\infty \frac{f(x)}{\omega^2 - x^2}\,dx, \tag{82.10}$$

где e, m — заряд и масса электрона, а $f(\omega)\,d\omega$ называется *силой осцилляторов* в интервале частот $d\omega$. Согласно (82.8) эта величина связана с $\varepsilon''(\omega)$ соотношением

$$f(\omega) = \frac{m}{2\pi^2 e^2}\omega\varepsilon''(\omega). \tag{82.11}$$

У металлов $f(\omega)$ стремится к конечному пределу при $\omega \to 0$.

При достаточно больших значениях ω в подынтегральном выражении в (82.8) можно пренебречь x по сравнению с ω. Тогда

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = -\frac{2}{\pi\omega^2}\int_0^\infty x\varepsilon''(x)\,dx.$$

С другой стороны, для диэлектрической проницаемости при больших частотах мы имеем формулу (78.1). Сравнение обоих выражений приводит к *правилу сумм*

$$\frac{m}{2\pi^2 e^2}\int_0^\infty \omega\varepsilon''(\omega)\,d\omega = \int_0^\infty f(\omega)\,d\omega = N, \tag{82.12}$$

где N — полное число электронов в единице объема вещества.

Если $\varepsilon''(\omega)$ не имеет особенности при $\omega = 0$, то в формуле (82.8) можно перейти к пределу $\omega \to 0$, и мы получим

$$\varepsilon'(0) - 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varepsilon''(x)}{x}\,dx. \tag{82.13}$$

Если же точка $\omega = 0$ является особой для функции $\varepsilon''(\omega)$ (металлы), то предел, к которому стремится интеграл (82.8) при $\omega \to 0$, не совпадает со значением, получающимся путем простого вычеркивания в нем ω. Для вычисления указанного предела необходимо предварительно заменить в подынтегральном выражении $\varepsilon''(x)$ на

$$\varepsilon''(x) - \frac{4\pi\sigma}{x};$$

эта замена не меняет значения интеграла, поскольку тождественно

$$\fint_0^\infty \frac{dx}{x^2 - \omega^2} = 0.$$

Формулу (82.13) для диэлектриков можно переписать в виде

$$\varepsilon_0 - 1 = \frac{4\pi e^2 N}{m}\overline{\omega^{-2}}, \tag{82.14}$$

где черта обозначает усреднение с помощью силы осцилляторов:

$$\overline{\omega^{-2}} = \frac{1}{N}\int\limits_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega^2}\,d\omega.$$

Это выражение может быть полезным при различных оценках величин ε_0.

Наконец, можно получить формулу, выражающую значения $\varepsilon(\omega)$ на верхней мнимой полуоси через значения $\varepsilon''(\omega)$ на вещественной оси (соответствующие вычисления тоже приведены в V, § 123). Эта формула имеет вид

$$\varepsilon(i\omega) - 1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2+\omega^2}\,dx. \tag{82.15}$$

Если проинтегрировать это соотношение с обеих сторон по ω, то получается

$$\int\limits_0^\infty [\varepsilon(i\omega) - 1]\,d\omega = \int\limits_0^\infty \varepsilon''(\omega)\,d\omega. \tag{82.16}$$

Все изложенные результаты (с небольшим лишь видоизменением) относятся и к магнитной проницаемости $\mu(\omega)$. Отличие связано прежде всего с тем, что при увеличении частоты функция $\mu(\omega)$ сравнительно рано теряет физический смысл. Поэтому, например, применять формулы Крамерса–Кронига к $\mu(\omega)$ надо следующим образом. Вместо бесконечного рассматриваем конечный интервал значений ω (от 0 до ω_1), простирающийся до таких частот, при которых μ еще имеет смысл, но уже перестает меняться и ее мнимую часть можно считать равной нулю; соответствующее вещественное значение μ обозначим как μ_1 [1]). Тогда формула (82.8) будет иметь вид

$$\mu'(\omega) - \mu_1 = \frac{2}{\pi}\,\fint_0^{\omega_1} \frac{x\mu''(x)}{x^2-\omega^2}\,dx. \tag{82.17}$$

В противоположность ε_0, значение $\mu_0 = \mu(0)$ может быть как меньше, так и больше 1. Изменение же $\mu(\omega)$ вдоль мнимой оси

[1]) Фактически ω_1 должно удовлетворять условию $\omega_1\tau \gg 1$, где τ — наименьшее из времен релаксации ферро- или парамагнитных процессов в магнетике.

по-прежнему является монотонным убыванием — на этот раз от μ_0 до $\mu_1 < \mu_0$.

Наконец, отметим, что аналитическими свойствами, установленными в этом параграфе для функции $\varepsilon(\omega)$, в равной степени обладает и функция $\eta(\omega) \equiv 1/\varepsilon(\omega)$. Так, аналитичность $\eta(\omega)$ в верхней полуплоскости следует из аналитичности и отсутствия нулей у функции $\varepsilon(\omega)$ в этой полуплоскости. Для функции $\eta(\omega)$ справедливы те же соотношения Крамерса–Кронига (82.6), (82.7), что и для $\varepsilon(\omega)$.

§ 83. Плоская монохроматическая волна

Уравнения Максвелла (77.2) для монохроматического поля имеют вид
$$i\omega\mu(\omega)\mathbf{H} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \quad i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}. \tag{83.1}$$
Эти уравнения сами по себе составляют полную систему, так как уравнения (77.1) следуют из них автоматически, и потому не должны рассматриваться отдельно. Предполагая среду однородной и исключив из этих уравнений $\mathbf{H}$ (или $\mathbf{E}$), получим уравнение второго порядка
$$\Delta\mathbf{E} + \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = 0 \tag{83.2}$$
(и такое же уравнение для $\mathbf{H}$).

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в неограниченной однородной среде. В плоской волне в пустоте зависимость поля от координат дается множителем вида $\varepsilon^{i\mathbf{kr}}$ с вещественным волновым вектором $\mathbf{k}$. При рассмотрении же распространения волн в материальных средах в общем случае оказывается необходимым вводить также и комплексные значения:
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'',$$
где $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$ — вещественные векторы.

Положив $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ пропорциональными $e^{i\mathbf{kr}}$ и произведя в уравнениях (83.1) дифференцирование по координатам, получим
$$\omega\mu\mathbf{H} = c[\mathbf{kE}], \quad \omega\varepsilon\mathbf{E} = -c[\mathbf{kH}]. \tag{83.3}$$
Исключив из этих двух соотношений $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$, найдем следующее выражение для квадрата волнового вектора:
$$\mathbf{k}^2 \equiv k'^2 - k''^2 + 2i\mathbf{k}'\mathbf{k}'' = \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{83.4}$$
Мы видим, что $\mathbf{k}$ может быть вещественным, только если ε и μ вещественны и положительны. Но даже и в этом случае $\mathbf{k}$ может

все же быть комплексным, причем только должно быть $\mathbf{k}'\mathbf{k}''=0$ (с таким случаем мы встретимся при рассмотрении полного отражения, см. § 86).

Следует иметь в виду, что в общем случае комплексных $\mathbf{k}$ волна может быть названа «плоской» лишь в условном смысле. Написав

$$e^{i\mathbf{kr}} = e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}e^{-\mathbf{k}''\mathbf{r}},$$

мы видим, что плоскости, перпендикулярные к вектору $\mathbf{k}'$, являются плоскостями постоянной фазы. Плоскостями же постоянной амплитуды являются плоскости, перпендикулярные к вектору $\mathbf{k}''$, в направлении которого происходит затухание волны. Что же касается поверхностей постоянного значения самого поля, то они в общем случае вообще не будут плоскими. Такие волны называют *неоднородными плоскими волнами*, в отличие от обычных однородных плоских волн.

Связь между компонентами электрического и магнитного полей в общем случае дается формулами (83.3). В частности, умножив эти формулы скалярно на $\mathbf{k}$, получим

$$\mathbf{kE} = 0, \quad \mathbf{kH} = 0, \tag{83.5}$$

а возводя какую-либо из них в квадрат и используя (83.4), найдем

$$\mathbf{E}^2 = \frac{\mu}{\varepsilon}\mathbf{H}^2. \tag{83.6}$$

Следует, однако, помнить, что ввиду комплексности всех трех векторов $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ эти соотношения в общем случае не имеют того наглядного смысла, который они имели бы для вещественных величин.

Не останавливаясь на громоздких соотношениях, получающихся в общем случае, рассмотрим наиболее важные частные случаи.

Особенно простые результаты получаются для волны, распространяющейся без затухания в непоглощающей (прозрачной) однородной среде. Волновой вектор в этом случае веществен и по величине равен

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c} = n\frac{\omega}{c}, \tag{83.7}$$

где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ называется *показателем преломления* среды. Как электрическое, так и магнитное поля лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{k}$ (чисто поперечная волна), причем перпендикулярны друг к другу и связаны соотношением

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\mathbf{lE}] \tag{83.8}$$

($\mathbf{l}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$). Отсюда следует, что

$$\varepsilon\mathbf{EE}^* = \mu\mathbf{HH}^*;$$

это, однако, не означает равенства электрической и магнитной энергий в волне (как в отсутствие дисперсии), поскольку последние даются другими выражениями (два члена в формуле (80.11)). Суммарную плотность электромагнитной энергии в этом случае можно привести к виду

$$\overline{U} = \frac{1}{16\pi\mu\omega}\frac{d}{d\omega}(\omega^2\varepsilon\mu)\mathbf{E}\mathbf{E}^* = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{dk}{d\omega}\mathbf{E}\mathbf{E}^*. \tag{83.9}$$

Скорость u распространения волны в среде определяется известным выражением групповой скорости [1]):

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega}. \tag{83.10}$$

При этом $u = \overline{S}/\overline{U}$, в соответствии с ее смыслом как скорости переноса энергии в волновом пакете; здесь $\overline{U}$ — плотность энергии, даваемая формулой (83.9), а

$$\overline{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}\mathbf{E}^* \tag{83.11}$$

— среднее значение вектора Пойнтинга. В отсутствие дисперсии, когда показатель преломления не зависит от частоты, выражение (83.10) сводится просто к c/n (ср. (75.13)).

Далее, рассмотрим более общий случай распространения электромагнитной волны в поглощающей среде, причем волновой вектор имеет определенное направление, т. е. $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ параллельны друг другу. Такая волна является плоской в буквальном смысле, так как поверхностями постоянных значений поля в ней являются плоскости, перпендикулярные к направлению распространения (однородная плоская волна).

В этом случае можно ввести комплексную «длину» k волнового вектора согласно $\mathbf{k} = k\mathbf{l}$ (где $\mathbf{l}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$) и из (83.4) имеем $k = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega/c$. Комплексную величину $\sqrt{\varepsilon\mu}$ обычно пишут в виде $n + i\varkappa$ с вещественными n и $\varkappa$, так что

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c} = (n + i\varkappa)\frac{\omega}{c}. \tag{83.12}$$

Величину n называют *показателем преломления*, а $\varkappa$ — *коэффициентом поглощения* среды; последний определяет скорость затухания волны по мере ее распространения. Подчеркнем, однако, что затухание волны не обязательно связано с наличием

[1]) При наличии существенного поглощения введение понятия групповой скорости вообще невозможно, так как в поглощающей среде волновые пакеты не распространяются, а подвергаются быстрому размазыванию.

истинного поглощения; диссипация энергии имеет место лишь при комплексных ε или μ, а коэффициент $\varkappa$ может быть отличным от нуля и при вещественных (отрицательных) ε и μ.

Выразим величины n и $\varkappa$ через вещественную и мнимую части диэлектрической постоянной, предполагая при этом, что $\mu = 1$. Из равенства $n^2 - \varkappa^2 + 2in\varkappa = \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ имеем

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon', \quad 2n\varkappa = \varepsilon''.$$

Решая эти уравнения относительно n и $\varkappa$, получим [1]

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{-\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}. \tag{83.13}$$

В частности, для металлов в области частот, где справедлива формула (77.9), мнимая часть ε велика по сравнению с вещественной частью и связана с проводимостью посредством $\varepsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$; пренебрегая ε' по сравнению с ε'', найдем, что n и $\varkappa$ совпадают и равны (в согласии с (59.4))

$$n = \varkappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}. \tag{83.14}$$

Для связи между полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в рассматриваемой однородной плоской волне снова получаем формулу (83.8), но только с комплексными ε и μ. Она снова показывает, что оба поля перпендикулярны к направлению распространения волны и друг к другу. Если $\mu = 1$, то, написав $\sqrt{\varepsilon}$ в виде

$$\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{n^2 + \varkappa^2} \exp\left[i \operatorname{arctg}\left(\frac{\varkappa}{n}\right)\right],$$

мы видим, что магнитное поле по абсолютной величине превышает электрическое в $\sqrt{n^2 + \varkappa^2}$ раз, а по фазе отстает от него на угол $\operatorname{arctg}(\varkappa/n)$; в случае (83.14) сдвиг фаз равен $\pi/4$.

Задача

В заданный момент времени ($t = 0$) в некоторой области пространства имеется электромагнитное возмущение. Не поддерживаемое внешними источниками, оно будет затухать со временем. Найти условия, определяющие декремент этого затухания.

Решение. Разложим начальное возмущение в интеграл Фурье по координатам и рассмотрим какую-либо компоненту с волновым вектором $\mathbf{k}$ (вещественный вектор!). Ее дальнейшая зависимость от времени дается (при достаточно большом t) множителем $e^{-i\omega t}$ с комплексной частотой ω, которую надо определить; декремент затухания есть $-\operatorname{Im}\omega$.

---

[1] Поскольку $\varepsilon'' > 0$, то знаки n и $\varkappa$ должны быть одинаковыми, в соответствии с тем, что волна затухает в направлении своего распространения. Выбор в (83.13) положительных знаков соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси x.

Из уравнений

$$-c^{-1}\dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\mathbf{E} = i[\mathbf{kE}], \quad c^{-1}\dot{\mathbf{D}} = \operatorname{rot}\mathbf{H} = i[\mathbf{kH}]$$

имеем, исключив $\mathbf{H}$,

$$c^{-2}\ddot{\mathbf{D}} = [\mathbf{k}[\mathbf{kE}]]. \tag{1}$$

Выберем направление $\mathbf{k}$ в качестве оси x. Для продольной части возмущения имеем отсюда $\ddot{D}_x = 0$, а потому и $D_x = 0$.

С другой стороны, связь между D_x и E_x дается интегральным оператором

$$E_x(t) = \hat{\varepsilon}^{-1} D_x = \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau) D_x(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Поскольку в данном случае $D_x(t) = 0$ при $t > 0$ (чем выражается отсутствие источников поля при $t > 0$), то

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{0} F(t-\tau) D_x(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Отсюда видно, что при больших t зависимость E_x от времени определяется в основном временно́й зависимостью функции $F(t)$.

Для монохроматического поля имеем из (3):

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega)} = \int_{0}^{\infty} F(\tau) e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

и, обратно,

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon(\omega)} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Для оценки этого интеграла при больших значениях t смещаем путь интегрирования в нижнюю полуплоскость ω, где подынтегральное выражение быстро убывает. При этом надо обходить все особые точки функции $1/\varepsilon(\omega)$, т. е. нули функции $\varepsilon(\omega)$ и ее точки ветвления. В результате интеграл будет в основном пропорционален $e^{-i\omega_0 t}$, где ω_0 — ближайшая к вещественной оси из указанных особых точек. Этим и решается поставленный вопрос для продольной части возмущения.

Для поперечных компонент имеем из (1)

$$\frac{1}{c^2}\ddot{D}_{y,z} + k^2 E_{y,z} = 0.$$

Аналогичное исследование приводит к заключению, что искомая частота ω_0 является в данном случае ближайшим к вещественной оси нулем или точкой ветвления функции

$$\omega^2\varepsilon(\omega) - c^2k^2.$$

§ 84. Прозрачные среды

Применим полученные в § 82 общие формулы к слабопоглощающим (в данной области частот) средам, т. е. будем предполагать, что для этих частот мнимой частью диэлектрической проницаемости можно пренебречь.

В таком случае в формуле (82.8) взятие главного значения становится излишним, так как точка $x = \omega$ фактически выпадает из области интегрирования. После этого интеграл можно дифференцировать по параметру ω, как обычный интеграл, не имеющий особенностей в подынтегральном выражении. Произведя такое дифференцирование, получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\varepsilon''(x)\,dx}{(\omega^2 - x^2)^2}.$$

Ввиду положительности подынтегрального выражения во всей области интегрирования мы приходим к выводу, что

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} > 0, \tag{84.1}$$

т. е. в области отсутствия поглощения диэлектрическая проницаемость — монотонно возрастающая функция частоты.

Аналогичным образом, в той же области частот получается еще и другое неравенство:

$$\frac{d}{d\omega}[\omega^2(\varepsilon - 1)] = \frac{4\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^3\varepsilon''(x)}{(x^2 - \omega^2)^2}\,dx > 0,$$

или

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} > \frac{2(1-\varepsilon)}{\omega}. \tag{84.2}$$

Если $\varepsilon < 1$ или даже отрицательна, то это неравенство сильнее неравенства (84.1) [1]).

Отметим, что неравенства (84.1) и (84.2) (и аналогичные — для $\mu(\omega)$) автоматически гарантируют выполнение неравенства $u < c$ для скорости распространения волн. Так, при $\mu = 1$ имеем $n = \sqrt{\varepsilon}$ и, вводя n вместо ε в (84.1) и (84.2), получим

$$\frac{d(n\omega)}{d\omega} > n, \qquad \frac{d(n\omega)}{d\omega} > \frac{1}{n}. \tag{84.3}$$

Поэтому для скорости u (83.10) получаются два неравенства: $u < c/n$ и $u < cn$, откуда видно, что $u < c$ как при $n > 1$, так и при $n < 1$. Эти неравенства показывают также, что $u > 0$, т. е. групповая скорость направлена в ту же сторону, что и волновой вектор. Это ее свойство вполне естественно, хотя с чисто логической точки зрения отнюдь не обязательно.

Предположим, что область слабого поглощения простирается в некотором широком интервале частот от ω_1 до ω_2 (причем

[1]) Взяв полусумму неравенств (84.1) и (84.2), найдем, что $d(\omega\varepsilon)/d\omega > 1$ — неравенство более сильное, чем (80.13).

$\omega_2 \gg \omega_1$), и рассмотрим частоты ω такие, что $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$. Область интегрирования в (82.8) разбивается на две части: $x < \omega_1$ и $x > \omega_2$. В первой из них можно пренебречь в знаменателе подынтегрального выражения x по сравнению с ω, а во второй — ω по сравнению с x:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{\omega_2}^{\infty} \varepsilon''(x) \frac{dx}{x} - \frac{2}{\pi\omega^2} \int\limits_{0}^{\omega_1} x\varepsilon''(x)\, dx, \tag{84.4}$$

т. е. функция $\varepsilon(\omega)$ в рассматриваемой области имеет вид $a - b/\omega^2$, где a и b — положительные постоянные. Вторую из них можно выразить через силу осцилляторов N_1, ответственных за поглощение в области от 0 до ω_1 (ср. (82.12)), и тогда

$$\varepsilon(\omega) = a - \frac{4\pi N_1 e^2}{m\omega^2}. \tag{84.5}$$

Из этого выражения следует, что в достаточно широкой области слабого поглощения диэлектрическая проницаемость, вообще говоря, проходит через нуль. Напомним в этой связи, что прозрачной в буквальном смысле слова является среда, в которой $\varepsilon(\omega)$ не только вещественно, но и положительно; при отрицательном ε волна затухает в глубь среды, хотя в ней и не происходит истинной диссипации энергии.

Для частоты, при которой $\varepsilon = 0$, индукция $\mathbf{D}$ тождественно обращается в нуль и уравнения Максвелла допускают существование переменного электрического поля, удовлетворяющего одному лишь уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ при равном нулю магнитном поле. Другими словами, в этом случае возможно существование продольных электрических волн. Для определения скорости их распространения необходимо учитывать дисперсию диэлектрической проницаемости не только по частоте, но и по волновому вектору; мы вернемся к этому вопросу в § 105.

Пусть, наконец, в широкой области прозрачности имеется узкая область («линия») поглощения вокруг некоторой частоты ω_0. Рассмотрим окрестность этой частоты, удовлетворяющую условию

$$\gamma \ll |\omega - \omega_0| \ll \omega_0, \tag{84.6}$$

где γ — ширина линии. В этой области в подынтегральном выражении в (82.6) можно заменить x на ω_0 везде, кроме быстроменяющейся функции $\varepsilon''(x)$. Тогда получим

$$\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon'(\omega) \approx \frac{1}{\pi(\omega_0 - \omega)} \int \varepsilon''(x)\, dx, \tag{84.7}$$

где интегрирование производится по линии поглощения.

Задача

На границу полупространства ($x > 0$), заполненного прозрачной средой ($\mu = 1$), падает в нормальном направлении плоская электромагнитная волна с резко обрывающимся передним фронтом. Определить структуру фронта волны, прошедшей внутрь среды (*A. Sommerfeld*, *L. Brillouin*, 1914).

Решение. Пусть волна падает на границу среды в момент $t = 0$, так что при $x = 0$ поле падающей волны (E или H)

$$\text{при } t < 0 \quad E = 0; \quad \text{при } t > 0 \quad E \backsim e^{-i\omega_0 t}.$$

Разлагая это поле в интеграл Фурье по времени, сведем задачу к падению бесконечно протяженных волн различной частоты на ту же границу. Амплитуда компоненты Фурье с частотой ω пропорциональна

$$\int_0^\infty e^{i(\omega-\omega_0)\tau}\, d\tau.$$

При падении волны с частотой ω прошедшая в среду волна имеет вид

$$a(\omega) \exp\left(-i\omega t + i\frac{\omega}{c}nx\right),$$

где амплитуда $a(\omega)$ — медленно меняющаяся функция частоты. Поэтому в данном случае поле волны в среде

$$E \backsim \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega a(\omega) \exp\left(-i\omega t + i\frac{\omega}{c}nx\right) \int_0^\infty e^{i(\omega-\omega_0)\tau}\, d\tau.$$

В области вблизи фронта волны в этом интервале играют роль значения ω, близкие к ω_0. Введя новую переменную $\xi = \omega - \omega_0$, заменим $a(\omega)$ на $a(\omega_0)$, а показатель разлагаем по степеням ξ. Опуская все несущественные постоянные и фазовые множители, получим

$$E \backsim \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{i\xi\left(\tau - t + \frac{x}{u}\right) - \frac{i\xi^2}{2}x\frac{u'}{u^2}\right\} d\xi\, d\tau,$$

где $u = u(\omega_0)$ — скорость распространения (83.10), а $u' = \left.\dfrac{du}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}$. Произведя интегрирование по $d\xi$, легко привести E к следующему виду:

$$E \backsim \int_w^\infty e^{\pm i\eta^2}\, d\eta, \quad w = \frac{x - ut}{\sqrt{2x|u'|}}$$

(знак в показателе зависит от знака u'). Интенсивность же волны вблизи ее фронта распределена по закону

$$I \backsim \left|\int_w^\infty e^{i\eta^2}\, d\eta\right|^2.$$

Эта формула по виду совпадает с формулой, определяющей распределение интенсивности вблизи края тени при дифракции Френеля (см. II, § 60). При $w > 0$ интенсивность монотонно падает с увеличением w, а при $w < 0$ совершает осцилляции с убывающей амплитудой вокруг постоянного значения, к которому стремится при $w \to -\infty$.

На больших расстояниях впереди рассмотренного фронта ему предшествуют так называемые «предвестники», распространяющиеся со скоростью c. Они соответствуют компонентам Фурье с большими частотами, для которых $\varepsilon \to 1$.

ГЛАВА X

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 85. Геометрическая оптика

Условие применимости геометрической оптики заключается, как известно, в малости длины волны λ по сравнению с характеристическими размерами задачи l (см. II, § 53). Связь геометрической оптики с волновой устанавливается тем, что при $\lambda \ll l$ всякая величина φ, описывающая поле волны (любая из компонент $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$), выражается формулой вида

$$\varphi = ae^{i\psi},$$

где амплитуда a — медленно меняющаяся функция координат и времени, а фаза ψ — большая величина, являющаяся «почти линейной» функцией координат и времени. Последняя называется в геометрической оптике *эйконалом* и играет в ней основную роль. Ее производная по времени определяет частоту волны:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\omega, \tag{85.1}$$

а производные по координатам — волновой вектор:

$$\nabla\psi = \mathbf{k} \tag{85.2}$$

и тем самым — направление лучей в каждой точке пространства.

У монохроматической волны в стационарных условиях частота есть постоянная величина и зависимость эйконала от времени дается слагаемым $-\omega t$. Введем тогда вместо ψ другую функцию ψ_1 (которую тоже будем называть эйконалом) согласно

$$\psi = -\omega t + \frac{\omega}{c}\psi_1(x, y, z); \tag{85.3}$$

ψ_1 есть функция только координат, а ее градиент

$$\nabla\psi_1 = \mathbf{n}, \tag{85.4}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор, связанный с $\mathbf{k}$ посредством

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}. \tag{85.5}$$

Абсолютная величина вектора $\mathbf{n}$ равна показателю преломления n среды [1]). Поэтому уравнение эйконала для распространения лучей в среде с показателем преломления $n(x, y, z)$, являющимся заданной функцией координат, есть

$$(\nabla\psi_1)^2 \equiv \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)^2 = n^2. \tag{85.6}$$

Уравнение распространения лучей (в стационарных условиях) может быть получено также из *принципа Ферма*, согласно которому для траектории луча между двумя заданными точками пространства A и B минимален интеграл

$$\psi_1 = \int_A^B \mathbf{n}\,d\mathbf{l} = \int_A^B n\,dl.$$

Приравнивая нулю вариацию этого интеграла, имеем

$$\delta\psi_1 = \int_A^B (\delta n \cdot dl + n\delta\,dl) = 0.$$

Пусть $\delta\mathbf{r}$ — смещение траектории луча при варьировании. Тогда имеем

$$\delta n = \delta\mathbf{r} \cdot \nabla n, \quad \delta\,dl = \mathbf{l}\,d\delta\mathbf{r},$$

где $\mathbf{l}$ — единичный вектор касательной к лучу. Подставив в $\delta\psi_1$ и произведя во втором члене интегрирование по частям (учитывая, что в точках A и B $\delta\mathbf{r} = 0$), получим

$$\delta\psi_1 = \int_A^B \delta\mathbf{r} \cdot \nabla n\,dl + \int_A^B n\mathbf{l}\,d\delta\mathbf{r} = \int_A^B \left(\nabla n - \frac{d(n\mathbf{l})}{dl}\right)\delta\mathbf{r} \cdot dl = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d(n\mathbf{l})}{dl} = \nabla n. \tag{85.7}$$

Раскрыв производную и подставив $\dfrac{dn}{dl} = \mathbf{l}\nabla n$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d\mathbf{l}}{dl} = \frac{1}{n}[\nabla n - \mathbf{l}(\mathbf{l}\nabla n)]. \tag{85.8}$$

Это и есть уравнение, определяющее форму лучей.

Как известно из дифференциальной геометрии, производная $d\mathbf{l}/dl$ вдоль луча равна $\mathbf{N}/R$, где $\mathbf{N}$ — единичный вектор главной нормали, а R — радиус кривизны луча. Умножив уравнение

---

[1]) В геометрической оптике рассматриваются лишь прозрачные среды.

(85.8) с обеих сторон на $\mathbf{N}$ и учитывая взаимную перпендикулярность $\mathbf{N}$ и $\mathbf{l}$, получим

$$\frac{1}{R} = \mathbf{N}\frac{\nabla n}{n}. \tag{85.9}$$

Луч изгибается в сторону увеличения показателя преломления.

Скорость распространения лучей в геометрической оптике направлена вдоль $\mathbf{l}$ и дается производной

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{85.10}$$

Эту скорость называют также *групповой*, а отношение ω/k — *фазовой* скоростью. Последняя не соответствует скорости реального физического распространения какой бы то ни было величины.

Легко написать также уравнение, определяющее изменение интенсивности света вдоль луча. Интенсивность I представляет собой абсолютную величину усредненного (по времени) вектора Пойнтинга. Последний направлен вместе с групповой скоростью вдоль $\mathbf{l}$:

$$\overline{\mathbf{S}} = I\mathbf{l}.$$

В стационарных условиях средняя плотность энергии поля в каждой точке пространства не меняется со временем. Поэтому уравнение сохранения энергии гласит: $\operatorname{div}\overline{\mathbf{S}} = 0$, или

$$\operatorname{div}(I\mathbf{l}) = 0. \tag{85.11}$$

Это и есть искомое уравнение.

Наконец, рассмотрим вопрос о том, как меняется вдоль луча направление поляризации линейно поляризованного света (*С.М. Рытов*, 1938).

Как известно из дифференциальной геометрии, пространственная кривая (в данном случае луч) характеризуется в каждой своей точке тремя взаимно перпендикулярными единичными векторами касательной $\mathbf{l}$, главной нормали $\mathbf{N}$ и бинормали $\mathbf{b}$ (так называемый естественный трехгранник). В силу поперечности электромагнитных волн вектор $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{H}$) лежит всегда в нормальной плоскости — плоскости $\mathbf{Nb}$.

Пусть в некоторой точке луча направление $\mathbf{E}$ совпадает с направлением $\mathbf{N}$, т. е. лежит в соприкасающейся плоскости (плоскость $\mathbf{Nl}$). Как известно, отклонение кривой на длине dl от соприкасающейся плоскости является бесконечно малой величиной высшего (третьего) порядка. Поэтому можно утверждать, что при перемещении вдоль луча на расстояние dl вектор $\mathbf{E}$ остается в первоначальной соприкасающейся плоскости. Новая же соприкасающаяся плоскость поворачивается относительно старой на угол $d\varphi = dl/T$, где T — радиус кручения кривой. Этому

же будет равен, следовательно, угол поворота вектора **E** по отношению к вектору **N** в нормальной плоскости. Таким образом, при перемещении вдоль луча направление поляризации вращается в нормальной плоскости так, что его угол с направлением главной нормали меняется согласно уравнению

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{1}{T}. \tag{85.12}$$

В частности, в отсутствие кручения, т. е. когда луч является плоской кривой, направление вектора **E** в нормальной плоскости остается неизменным, как это и заранее очевидно из соображений симметрии.

Задачи

1. Найти закон преобразования скорости распространения света в среде (групповой скорости) при преобразовании системы отсчета.

Решение. По определению групповой скорости **u**,

$$d\omega = \mathbf{u}\,d\mathbf{k}, \quad d\omega' = \mathbf{u}'\,d\mathbf{k}';$$

величины со штрихом относятся к системе отсчета K', движущейся со скоростью **v** относительно системы K (величины без штриха). Согласно формулам преобразования Лоренца для волнового 4-вектора имеем

$$k'_x = \gamma\Big(k_x - v\frac{\omega}{c^2}\Big), \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z,$$
$$\omega = \gamma(\omega' + vk'_x),$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (оси x, x' — в направлении **v**). Из формулы во второй строке имеем

$$d\omega = \gamma(d\omega' + v\,dk'_x) = \gamma(\mathbf{u}'\,d\mathbf{k}' + v\,dk'_x).$$

Подставив сюда $d\mathbf{k}'$, выраженное через $d\mathbf{k}$ и $d\omega$, из формул первой строки и собрав вместе члены с $d\omega$, получим

$$\gamma\left(1 + \frac{1}{c^2}vv'_x\right)d\omega = \gamma(u'_x + v)\,dk_x + u'_y\,dk_y + u'_z\,dk_z.$$

Сравнив с $d\omega = \mathbf{u}\,d\mathbf{k}$, найдем, что скорости $\mathbf{u}'$ и **v** складываются в **u** по обычным релятивистским формулам сложения скоростей — как это и следовало ожидать.

2. Определить скорость распространения света в движущейся (относительно наблюдателя) среде.

Решение. Пусть ω и **k** — частота и волновой вектор световой волны в неподвижной системе отсчета K, а ω', $\mathbf{k}'$ — те же величины в системе K', движущейся относительно K вместе с жидкостью со скоростью **v**. В системе K' жидкость неподвижна, и потому ω' и $\mathbf{k}'$ связаны соотношением

$$ck' = \omega' n(\omega'). \tag{1}$$

Согласно формулам преобразования Лоренца для волнового 4-вектора, имеем, с точностью до членов первого порядка по v/c:

$$\omega' = \omega - \mathbf{kv}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k} - \frac{\omega}{c^2}\mathbf{v}, \quad k' = k - \frac{\omega}{c^2}\mathbf{vl}$$

($\mathbf{l} = \mathbf{k}/k$). Подставив эти выражения в (1) и разложив функцию $n(\omega')$ по степеням $\mathbf{v}$, получим с той же точностью [1]):

$$k = \frac{\omega}{c}n + \frac{\omega}{c^2}\left[1 - n\frac{d(n\omega)}{d\omega}\right]\mathbf{vl}. \tag{2}$$

Скорость распространения (групповая скорость) в неподвижной среде получается дифференцированием соотношения $ck = \omega n(\omega)$ и равна

$$\mathbf{u}_0 = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega}\mathbf{l}. \tag{3}$$

В движущейся среде она получается дифференцированием соотношения (2), которое предварительно переписываем в виде

$$k = \frac{\omega}{c}n + \mathbf{kv}\left(\frac{1}{cn} - \frac{1}{u_0}\right).$$

Снова с точностью до членов первого порядка находим

$$u = u_0 + \mathbf{l}(\mathbf{lv})\left(\frac{u_0}{cn} - \frac{u_0^2}{c^2} - \frac{n\omega}{c}\frac{du_0}{d\omega}\right) + v\left(1 - \frac{u_0}{cn}\right). \tag{4}$$

При распространении света в направлении движения среды ($\mathbf{v} \parallel \mathbf{l}$) имеем отсюда [2])

$$u = u_0 + v\left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right) - \frac{vn\omega}{c}\frac{du_0}{d\omega}. \tag{5}$$

Первые два члена могут быть получены просто путем применения релятивистской формулы сложения скоростей. Если же $\mathbf{v}$ и $\mathbf{l}$ взаимно перпендикулярны:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}\left(1 - \frac{u_0}{cn}\right). \tag{6}$$

Фазовая скорость волны получается из (2) в виде

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + \mathbf{vl}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right).$$

При $\mathbf{v} \perp \mathbf{l}$ эффект первого порядка в ней отсутствует.

§ 86. Отражение и преломление волн

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической плоской электромагнитной волны на плоской границе раздела между однородными средами. Падение происходит из прозрачной среды (среда *1*); для второй же среды предположения о

---

[1]) Отметим, что второй член в (2), а с ним и все дальнейшие эффекты первого порядка тождественно обращаются в нуль при $n^2 = \varepsilon = 1 - \mathrm{const}\cdot\omega^{-2}$.

[2]) Эта формула описывает так называемый *эффект Физо*, впервые предсказанный *Френелем* (*A. Fresnel*, 1818). Влияние дисперсии на этот эффект рассмотрено *Лорентцем* (*H.A. Lorentz*, 1895).

прозрачности пока делать не будем. Будем отмечать величины, относящиеся к падающей и отраженной волнам, соответственно индексами 0 и 1, а к преломленной волне — индексом 2 (рис. 46). Направление нормали к плоскости раздела выберем в качестве оси z (с положительным направлением в глубь среды *2*).

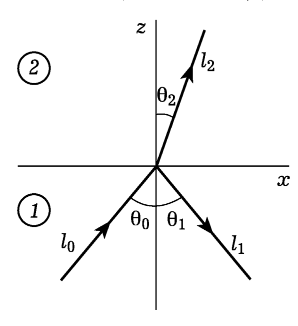


Рис. 46

Ввиду полной однородности в плоскости xy, зависимость решения уравнений поля от этих координат во всем пространстве должна быть одинаковой.

Это значит, что компоненты k_x, k_y волнового вектора для всех трех волн одинаковы. Отсюда следует прежде всего, что направления распространения всех волн лежат в одной плоскости; выберем ее в качестве плоскости xz.

Из равенств

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \tag{86.1}$$

следует для z-компонент этих векторов:

$$\begin{gathered} k_{1z} = -k_{0z} = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0, \\ k_{2z} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - k_{0x}^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_0}; \end{gathered} \tag{86.2}$$

в обеих средах полагаем $\mu = 1$. Вектор $\mathbf{k}_0$, по определению, вещественен. Вместе с ним вещественен также $\mathbf{k}_1$. Величина же k_{2z} в поглощающей среде комплексна, причем корень должен быть взят с таким знаком, чтобы было $\operatorname{Im} k_{2z} > 0$ в соответствии с тем, что преломленная волна затухает в глубь среды *2*.

Если прозрачны обе среды, то из равенств (86.1) следуют известные законы отражения и преломления

$$\theta_1 = \theta_0, \qquad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{86.3}$$

Для определения амплитуд отраженной и преломленной волн надо обратиться к граничным условиям на поверхности раздела ($z = 0$). При этом мы рассмотрим отдельно два случая — когда электрическое поле $\mathbf{E}_0$ лежит в плоскости падения или перпендикулярно к ней; тем самым мы рассматриваем и общий случай, когда $\mathbf{E}_0$ может быть разложено на две такие компоненты.

Предположим сначала, что $\mathbf{E}_0$ перпендикулярно к плоскости падения; из соображений симметрии очевидно, что то же будет относиться и к полям $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ в отраженной и преломленной волнах. Вектор же $\mathbf{H}$ лежит в плоскости xz. Граничные условия

требуют непрерывности $E_y = E$ и H_x [1]); согласно (83.3) $H_x = -ck_zE_y/\omega$.

Поле в среде *1* есть сумма полей падающей и отраженной волн, так что мы получаем два уравнения:

$$E_0 + E_1 = E_2, \quad k_{0z}(E_0 - E_1) = k_{2z}E_2.$$

Экспоненциальные множители в E сокращаются в обеих частях равенства ввиду одинаковости k_x (а также частоты ω) во всех трех волнах; ниже под $\mathbf{E}$ подразумеваются везде комплексные амплитуды волн. Решение написанных уравнений приводит к следующим *формулам Френеля*:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{k_{0z} - k_{2z}}{k_{0z} + k_{2z}}E_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_0}}E_0, \\ E_2 &= \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{2z}}E_0 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_0}}E_0. \end{aligned} \tag{86.4}$$

Если прозрачны обе среды, то с помощью соотношений (86.3) можно представить эти формулы в виде

$$E_1 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)}E_0, \quad E_2 = \frac{2\cos\theta_0\sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)}E_0. \tag{86.5}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения; при этом удобнее производить вычисления для магнитного поля, перпендикулярного к плоскости падения. В результате получаются еще две формулы Френеля:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\varepsilon_2 k_{0z} - \varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 k_{0z} + \varepsilon_1 k_{2z}}H_0 = \frac{\varepsilon_2\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}H_0, \\ H_2 &= \frac{2\varepsilon_2 k_{0z}}{\varepsilon_1 k_{2z} + \varepsilon_2 k_{0z}}H_0 = \frac{2\varepsilon_2\cos\theta_0}{\varepsilon_2\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}H_0. \end{aligned} \tag{86.6}$$

Если прозрачны обе среды, то эти формулы можно представить в виде

$$H_1 = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)}H_0, \quad H_2 = \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2)\cos(\theta_0 - \theta_2)}H_0. \tag{86.7}$$

Коэффициент отражения R определяется как отношение среднего (по времени) отраженного от поверхности потока энергии к падающему потоку. Каждый из этих потоков дается сред-

[1]) Граничные условия для нормальных компонент $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ не дают в данном случае ничего нового, в соответствии с тем, что уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ являются следствием уравнений (83.1).

ним значением z-компоненты вектора Пойнтинга (83.11) соответствующей волны:

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1|\mathbf{E}_1|^2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0|\mathbf{E}_0|^2} = \frac{|\mathbf{E}_1|^2}{|\mathbf{E}_0|^2}.$$

При нормальном падении ($\theta_0 = 0$) оба случая поляризации эквивалентны и коэффициент отражения дается формулой

$$R = \left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2. \qquad (86.8)$$

Эта формула справедлива как для прозрачной, так и для поглощающей отражающей среды. Если ввести n_2 и $\varkappa_2$ согласно $\sqrt{\varepsilon_2} = n_2 + i\varkappa_2$, то, например, при падении из пустоты ($\varepsilon_1 = 1$) получим

$$R = \frac{(n_2 - 1)^2 + \varkappa_2^2}{(n_2 + 1)^2 + \varkappa_2^2}. \qquad (86.9)$$

Дальнейшее обсуждение полученных формул произведем в предположении прозрачности обеих сред. Предварительно сделаем следующее общее замечание. Граница раздела между двумя различными средами представляет собой в действительности не геометрическую поверхность, а тонкий переходный слой. Справедливость формул (86.1) не связана с какими бы то ни было предположениями о характере этого слоя. Вывод же формул Френеля, основанный на использовании условий на границе раздела, предполагает малость толщины переходного слоя δ по сравнению с длиной волны λ. Обычно толщина δ сравнима с междуатомными расстояниями, во всяком случае малыми по сравнению с λ (в противном случае было бы вообще невозможным макроскопическое рассмотрение поля); поэтому и условие $\lambda \gg \delta$ обычно выполняется. В обратном же предельном случае явление преломления имело бы совсем другой характер. При $\delta \gg \lambda$ выполнены условия применимости геометрической оптики (λ мало по сравнению с размерами неоднородностей среды). Поэтому в таком случае можно было бы рассматривать распространение волны как распространение лучей, испытывающих в переходном слое рефракцию, но проходящих через него без всякого отражения. Другими словами, коэффициент отражения был бы равен нулю.

Вернемся к формулам Френеля. При отражении от прозрачной среды коэффициенты пропорциональности между $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_3$ в этих формулах вещественны[1]). Это значит, что фаза волны либо остается неизменной, либо испытывает скачок на π,

[1]) Мы оставляем пока в стороне случай так называемого полного отражения (см. ниже).

смотря по знаку этих коэффициентов. В частности, фаза преломленной волны всегда совпадает с фазой падающей волны. Отражение же может сопровождаться изменением фазы [1]). Так, при нормальном падении фаза волны не меняется, если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Если же $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, то векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_0$ имеют противоположные знаки, т. е. происходит изменение фазы волны на π.

Коэффициенты отражения при наклонном падении даются согласно (86.5) и (86.7) формулами

$$R_\perp = \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_0)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_0)}, \quad R_\parallel = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_0)}. \qquad (86.10)$$

Здесь и ниже индексы $\perp$ и $\parallel$ отмечают случаи, когда поле $\mathbf{E}$ соответственно перпендикулярно или параллельно плоскости падения. Отметим следующую симметрию: выражения (86.10) не меняются при взаимной замене θ_2 и θ_0 (фазы же отраженных волн при этом меняются, согласно формулам (86.5) и (86.7), на π). Другими словами, коэффициент отражения для волны, падающей из среды *1* под углом θ_0, равен коэффициенту отражения для волны, падающей из среды *2* под углом θ_2.

Замечательным свойством обладает отражение света, падающего под таким углом θ_0, при котором $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$ (отраженный и преломленный лучи при этом взаимно перпендикулярны). Обозначим это значение через θ_p; написав $\sin\theta_p = \sin(\pi/2 - \theta_2) = \cos\theta_2$ и воспользовавшись законом преломления (86.3), получим

$$\operatorname{tg}\theta_p = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \qquad (86.11)$$

При $\theta_0 = \theta_p$ имеем $\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2) = \infty$ и $R_\parallel$ обращается в нуль. Поэтому при любом направлении поляризации света, падающего под этим углом, отраженный свет будет поляризован так, что электрическое поле в нем перпендикулярно к плоскости падения. Таким же поляризованным будет отраженный свет и при падении естественного света; все компоненты с другой поляризацией при этом вообще не отразятся. Угол θ_p называют *углом полной поляризации* или *углом Брюстера*. Отметим, что, в то время как отражение может приводить к полной поляризации естественного света, в преломленном свете полная поляризация не достигается ни при каком угле падения.

---

[1]) Отражение от поглощающей среды приводит, вообще говоря, к возникновению эллиптической поляризации. Явные выражения для амплитудных и фазовых соотношений между тремя волнами при этом очень громоздки. Их можно найти в книге *Стрэттона Дж.А.* Теория электромагнетизма, гл. IX. — М.: ГТТИ, 1948 (*Stratton J.A.* Electromagnetic Theory, ch. IX. — N.Y.: McGraw-Hill, 1941).

Отражение и преломление поляризованного света всегда приводит снова к плоскополяризованному свету, но с направлением поляризации, вообще говоря, не совпадающим с таковым у падающего света. Пусть γ_0 — угол между направлением $\mathbf{E}_0$ и плоскостью падения, а γ_1 и γ_2 — аналогичные углы для отраженной и преломленной волн. С помощью формул (86.5) и (86.7) легко получить соотношения

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = -\frac{\cos(\theta_0-\theta_2)}{\cos(\theta_0+\theta_2)}\operatorname{tg}\gamma_0, \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = \cos(\theta_0-\theta_2)\operatorname{tg}\gamma_0. \tag{86.12}$$

Углы γ_0, γ_1, γ_2 совпадают при всех углах падения лишь в очевидных случаях $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0 = \pi/2$; они совпадают также при нормальном ($\theta_0 = \theta_2 = 0$) и скользящем ($\theta_0 = \pi/2$) падениях (в последнем случае преломленная волна вообще отсутствует). Во всех же остальных случаях из (86.12) следуют (учитывая, что $0<\theta_0$, $\theta_2<\pi/2$ и полагая, что $0<\gamma_0<\pi/2$; $0<\gamma_1$, $\gamma_2<\pi$) неравенства

$$\gamma_1 > \gamma_0 > \gamma_2.$$

Таким образом, направление $\mathbf{E}$ при отражении поворачивается от плоскости падения, а при преломлении — к ней.

Сравнение двух формул (86.10) показывает, что при всех углах падения (за исключением только $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = \pi/2$)

$$R_{\parallel} < R_{\perp}.$$

Поэтому, например, при падении естественного света отраженный свет оказывается частично поляризованным с преимущественным направлением электрического поля, перпендикулярным к плоскости падения. Преломленный же свет будет частично поляризованным с преимущественным направлением $\mathbf{E}$ в плоскости падения.

Характер зависимости $R_{\parallel}$ и $R_{\perp}$ от угла падения существенно различен. Коэффициент $R_{\perp}$ монотонно возрастает по мере увеличения θ_0, начиная от значения (86.8) при $\theta_0 = 0$. Коэффициент же $R_{\parallel}$, равный тому же значению (86.8) при $\theta = 0$, по мере увеличения θ_0 сначала убывает, обращается в нуль при $\theta_0 = \theta_p$ и лишь затем начинает монотонно возрастать.

При этом надо различать два случая. Если отражение происходит, как говорят, от *оптически более плотной* среды, т. е. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, то возрастание $R_{\parallel}$ и $R_{\perp}$ продолжается вплоть до $\theta_0 = \pi/2$ (*скользящее падение*), когда оба достигают значения 1. Если же отражающая среда *оптически менее плотная*, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, то оба коэффициента обращаются в 1 уже при угле падения $\theta_0 = \theta_r$, где θ_r определяется равенством

$$\sin\theta_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{86.13}$$

и называется *предельным углом полного отражения*. При $\theta_0 = \theta_r$ угол преломления $\theta_2 = \pi/2$, т. е. преломленная волна распространяется параллельно поверхности раздела.

Отражение под углами $\theta_0 > \theta_r$ от оптически менее плотной среды требует особого рассмотрения. В этом случае k_{2z} (см. (86.2)) чисто мнимо, т. е. поле в преломляющей среде затухает. Затухание волны в глубь среды при отсутствии в ней истинного поглощения (диссипации энергии) означает, что поток энергии из первой во вторую среду в среднем отсутствует (путем простого вычисления легко непосредственно убедиться в том, что вектор $\overline{\mathbf{S}}$ среднего потока энергии во второй среде действительно имеет лишь x-компоненту). Другими словами, вся падающая на границу раздела энергия отражается обратно в первую среду, т. е. коэффициенты отражения

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = 1.$$

Это явление называется *полным отражением* [1]). В последнем равенстве для $R_{\perp}$ и $R_{\parallel}$ можно убедиться, разумеется, и непосредственно с помощью формул Френеля (86.4) и (86.6).

При $\theta_0 > \theta_r$ коэффициенты пропорциональности между $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_0$ становятся комплексными величинами вида $(a - ib)/(a + ib)$. Величины же $R_{\perp}$ и $R_{\parallel}$ даются квадратами модулей этих коэффициентов, равными единице. Эти формулы, однако, позволяют определить не только отношение абсолютных значений поля в отраженной и падающей волнах, но и разницу в их фазах. Для этого надо представить их в виде

$$E_{1\perp} = e^{-i\delta_{\perp}} E_{0\perp}, \quad E_{1\parallel} = e^{-i\delta_{\parallel}} E_{0\parallel}.$$

Имеем [2])

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_{\perp}}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \sin^2\theta_0 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}, \quad \operatorname{tg}\frac{\delta_{\parallel}}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_1 \sin^2\theta_0 - \varepsilon_2)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0}. \tag{86.14}$$

Таким образом, полное отражение сопровождается изменением фазы волны, различным, вообще говоря, для компонент поля, параллельной и перпендикулярной к плоскости падения. Поэтому при отражении волны, поляризованной в плоскости, наклонной к плоскости падения, отраженная волна будет эллиптически поляризована. Для разности фаз $\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$ легко получается

---

[1]) Коэффициент отражения всегда равен единице при отражении от среды с вещественным, но отрицательным ε. В такой среде тоже нет истинного поглощения, но волна не может проникнуть в глубь ее.

[2]) Если $\dfrac{a - ib}{a + ib} = e^{-i\delta}$, то $\operatorname{tg}\dfrac{\delta}{2} = \dfrac{b}{a}$.

выражение

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_0\sqrt{\varepsilon_1\sin^2\theta_0 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\sin^2\theta_0}. \tag{86.15}$$

Эта разность обращается в нуль лишь при $\theta_0 = \theta_r$ и $\theta_0 = \pi/2$.

З а д а ч и

1. Найти закон обращения коэффициента отражения в 1 вблизи угла полного отражения.

Р е ш е н и е. Полагаем $\theta_0 = \theta_r - \delta$, где δ — малая величина, и разлагаем в формулах (86.10) $\sin\theta_0$ и $\cos\theta_0$ по степеням δ. В результате получаем

$$R_\perp = 1 - 4\sqrt{2\delta}(n^2-1)^{-1/4}, \quad R_\parallel = 1 - r\sqrt{2\delta}\,n^2(n^2-1)^{-1/4},$$

где $n^2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2 > 1$. Производные $dR/d\delta$ обращаются при $\delta \to 0$ в бесконечность как $\delta^{-1/2}$.

2. Найти коэффициент отражения при почти скользящем падении света из пустоты на поверхность тела с близким к 1 значением ε.

Р е ш е н и е. Формулы (86.10) дают одинаковый коэффициент отражения:

$$R_\perp \approx R_\parallel \approx \frac{(\varphi_0 - \sqrt{\varphi_0^2 + \varepsilon - 1})^4}{(\varepsilon-1)^2},$$

где $\varphi_0 = \pi/2 - \theta_0$.

3. Определить коэффициент отражения при падении волны из пустоты на границу среды с отличными от единицы ε и μ.

Р е ш е н и е. Вычисления, полностью аналогичные произведенным в тексте, приводят к результату:

$$R_\perp = \left|\frac{\mu\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}}{\mu\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}}\right|^2, \qquad R_\parallel = \left|\frac{\varepsilon\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}}{\varepsilon\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}}\right|^2.$$

4. Плоскопараллельный слой вещества *2* находится между вакуумом (среда *1*) и произвольной средой *3*. Из вакуума на слой падает свет, поляризованный в плоскости падения (или перпендикулярно к ней). Выразить коэффициент отражения от слоя R через коэффициенты отражения при падении света на полубесконечную среду *2* или *3*.

Р е ш е н и е. Обозначим через A_0 и A_1 амплитуды поля (**E** или **H** — смотря по тому, какой из этих векторов параллелен плоскости слоя) в падающей и отраженной волнах. Поле в слое складывается из преломленной волны (амплитуда A_2) и волны, отраженной от границы *2–3* (амплитуда A_2'). Граничное условие на поверхности *1–2* дает равенство вида

$$A_2' = a(A_1 - r_{12}A_0), \tag{1}$$

где a и r_{12} — постоянные. При отражении от полубесконечной среды *2* волна A_2' отсутствует, так что (1) дает $r_{12} = A_1/A_0$, т. е. r_{12} есть амплитуда отражения для этого случая. Еще одно уравнение получается из (1) перестановкой A_1 с A_0 и заменой A_2' на A_2, что соответствует просто изменению знака z-компоненты волнового вектора:

$$A_2 = a(A_0 - r_{12}A_1). \tag{2}$$

В среде *3* имеется только одна (прошедшая) волна. Для ее амплитуды A_3 имеем условия

$$A_2e^{i\psi} = aA_3, \quad A_2'e^{-i\psi} = -ar_{32}A_3 \tag{3}$$

(аналогичные условиям (1), (2) с $A_1 = 0$); экспоненциальные множители учитывают изменение фазы волны на толщине слоя h, причем

$$\psi = \frac{\omega}{c} h\sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2\theta_0}. \tag{4}$$

Исключая из уравнений (3) A_3, имеем

$$A_2' e^{-i\psi} = r_{23} A_2 e^{i\psi} \tag{5}$$

$(r_{23} = -r_{32})$.

Из уравнений (1), (2), (5) найдем амплитуду отражения от слоя:

$$r = \frac{A_1}{A_0} = \frac{r_{12}e^{-2i\psi} + r_{23}}{e^{-2i\psi} + r_{12}r_{23}} \tag{6}$$

(коэффициент отражения $R = |r|^2$). Смысл постоянной r_{23} выясняется из того, что при $h = 0$ r должно совпадать с амплитудой отражения r_{13} от полубесконечной среды *3*; отсюда находим

$$r_{23} = \frac{r_{12} - r_{13}}{r_{12}r_{13} - 1}. \tag{7}$$

формулы (6), (7) решают поставленную задачу. Подчеркнем, что их вывод не связан с какими-либо предположениями о свойствах сред *2* и *3*, которые могут быть как прозрачными, так и поглощающими.

Если среды *2* и *3* прозрачны, то величины ψ, r_{12}, r_{13} вещественны, а r_{23} представляет собой амплитуду отражения на границе между полубесконечными средами *2* и *3*. Из (6) имеем при этом

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\psi}{(r_{12}r_{23} + 1)^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\psi}. \tag{8}$$

При изменении ψ эта величина меняется в пределах между

$$\left(\frac{r_{12} + r_{23}}{r_{12}r_{23} + 1}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{r_{12} - r_{23}}{r_{12}r_{23} - 1}\right)^2.$$

При нормальном падении света $r_{12} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, и аналогичные соотношения имеют место для r_{13} и r_{23}. Если $n_2^2 = n_1 n_3$, то $r_{12} = r_{23}$ и при соответствующем выборе толщины слоя R может обратиться в нуль.

Если среда *3* является вакуумом, то $r_{13} = 0$, $r_{23} = -r_{12}$ и из (6) имеем

$$r = \frac{r_{12}(e^{-2i\psi} - 1)}{e^{-2i\psi} - r_{12}^2} = -\frac{\operatorname{sh} i\psi}{\operatorname{sh}\,[i\psi + \ln(-r_{12})]}. \tag{9}$$

Если при этом среда *2* прозрачна, то

$$R = \frac{4R_{12}\sin^2\psi}{(1 - R_{12})^2 + 4R_{12}\sin^2\psi}.$$

Коэффициент прохождения D через слой (из вакуума в вакуум) совпадает с $1 - R$, лишь если среда *2* прозрачна. В противном случае для вычисления D надо исходить из уравнений (1)–(3), положив в них $r_{32} = r_{12}$. «Амплитуда прохождения» d равна:

$$d = \frac{A_3}{A_0} = \frac{1 - r_{12}^2}{e^{-i\psi} - r_{12}^2 e^{i\psi}}, \tag{10}$$

а коэффициент прохождения $D = |d|^2$.

5. Определить коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении света на пластинку с очень большой комплексной диэлектрической проницаемостью ε.

Р е ш е н и е. В этом случае

$$r_{12} = \frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}} \approx -\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

и согласно формуле (9) предыдущей задачи

$$r = -\frac{1}{1-(2/\sqrt{\varepsilon})\operatorname{cth} i\psi}, \quad \psi = \frac{\omega}{c}h\sqrt{\varepsilon}.$$

Если пластинка настолько тонка, что $h\omega/c \ll 1/\sqrt{|\varepsilon|}$, то можно написать

$$r = -\frac{1}{1+(2ic/\varepsilon\omega h)}.$$

При этом можно еще различать два случая:

$$\text{при } \frac{1}{|\varepsilon|} \ll \frac{\omega}{c}h \ll \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} \qquad R = 1 - \frac{4c}{\omega h}\frac{\varepsilon''}{|\varepsilon|^2},$$

$$\text{при } \frac{\omega}{c}h \ll \frac{1}{|\varepsilon|} \qquad R = \frac{\omega^2 h^2}{4c^2}|\varepsilon|^2.$$

Для коэффициента прохождения имеем согласно формуле (10)

$$\text{при } \frac{\omega}{c}h \ll \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} \qquad d = -\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}\operatorname{sh} i\psi},$$

$$\text{при } \frac{\omega}{c}h \sim \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} \qquad d = \frac{1}{1 - i\varepsilon\omega h/2c}.$$

В последнем случае можно еще различать

$$\text{при } \frac{1}{|\varepsilon|} \ll \frac{\omega}{c}h \ll \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}} \qquad D = \frac{4c^2}{\omega^2 h^2 |\varepsilon|^2},$$

$$\text{при } \frac{\omega}{c}h \ll \frac{1}{|\varepsilon|} \qquad D = 1 - \frac{\varepsilon''\omega h}{c}.$$

§ 87. Поверхностный импеданс металлов

Диэлектрическая проницаемость металлов по своей абсолютной величине при не слишком больших частотах велика по сравнению с 1 (при $\omega \to 0$ она стремится к бесконечности как $1/\omega$). В этих условиях длина волны $\delta \sim c/\omega\sqrt{|\varepsilon|}$ в металле мала по сравнению с длиной волны $\lambda \sim c/\omega$ в пустоте [1]). Если при этом δ

[1]) Большие значения $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ практически всегда являются комплексными. При этом электромагнитное поле затухает в глубь тела, так что длина волны в нем является в то же время глубиной проникновения поля. Если $\varepsilon(\omega)$ выражается через проводимость σ (согласно (77.9)), то эта величина совпадает с глубиной проникновения, введенной в § 59.

(но не обязательно λ) мала также и по сравнению с радиусами кривизны поверхности металла, то этим обстоятельством можно воспользоваться для существенного упрощения задачи об отражении произвольных электромагнитных волн от металла.

Малость δ означает, что производные от компонент поля внутри металла в направлении нормали к поверхности велики по сравнению с производными в тангенциальных направлениях. Поэтому поле внутри металла вблизи поверхности можно рассматривать как поле плоской волны и, соответственно, поля $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}_t$ связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{E}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\mathbf{H}_t\mathbf{n}], \tag{87.1}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, направленная внутрь металла. Поскольку, с другой стороны, $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}_t$ непрерывны, то таким же соотношением должны быть связаны их значения для поля вне металла у его поверхности. Равенством (87.1) можно воспользоваться (как было указано *М.А. Леонтовичем*, 1948) в качестве граничного условия при определении поля вне проводника. Таким образом, внешнюю электромагнитную задачу можно решать, совершенно не рассматривая поля внутри металла.

Величину $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ называют *поверхностным импедансом* металла; обозначим ее через $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ [1])

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{87.2}$$

В области частот, для которых ε выражается через обычную проводимость металла, имеем

$$\zeta = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}} \tag{87.3}$$

(эта формула с $\mu = 1$ была уже указана в § 59).

Среднее (по времени) значение потока энергии через поверхность металла есть

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{E}_t\mathbf{H}_t^*] = \frac{c\zeta'}{8\pi}|\mathbf{H}_t|^2\mathbf{n}. \tag{87.4}$$

Этот поток представляет собой энергию, втекающую извне внутрь металла и диссипирующуюся в нем. Отсюда видно, что должно быть

$$\zeta' > 0. \tag{87.5}$$

Этим неравенством устанавливается знак корня (87.2).

---

[1]) В литературе используется также определение, отличающееся от (87.2) множителем $4\pi/c$.

При увеличении частоты глубина проникновения δ сравнивается по порядку величины с длиной свободного пробега l электронов проводимости [1]. В таком случае пространственная неоднородность поля делает невозможным его макроскопическое описание с помощью диэлектрической проницаемости ε. Но граничное условие вида

$$\mathbf{E}_t = \zeta[\mathbf{H}_t\mathbf{n}] \tag{87.6}$$

справедливо и при таких частотах. При этом поле внутри металла вблизи его поверхности можно по-прежнему рассматривать как плоскую волну, хотя она и не описывается теперь обычными макроскопическими уравнениями Максвелла. В такой волне поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны быть связаны друг с другом линейным соотношением, а единственно возможный вид линейного соотношения между аксиальным вектором $\mathbf{H}$ и полярным вектором $\mathbf{E}$ есть (87.6). Коэффициент ζ в этом соотношении есть единственная величина, характеризующая свойства металла, которую надо знать для решения внешней электромагнитной задачи. Его вычисление требует, однако, применения кинетической теории (оно изложено в другом томе этого курса — см. X, § 86).

При дальнейшем увеличении частоты (обычно в инфракрасной области) вновь становится возможным макроскопическое описание поля и понятие ε вновь приобретает смысл. Причина этого явления заключается в том, что, поглощая большой квант $\hbar\omega$, электрон проводимости приобретает большую энергию, в результате чего длина его пробега уменьшается, так что снова выполняется неравенство $l \ll \delta$. Импеданс ζ снова становится величиной, обратно пропорциональной $\sqrt{\varepsilon}$ [2]. В этой области частот $\varepsilon(\omega)$ имеет большую отрицательную вещественную и малую мнимую части. Неравенство $l \ll \delta$ является условием того, что имеют макроскопический смысл обе величины ε' и ε''. Для того чтобы имела макроскопический смысл лишь большая величина ε', достаточно, однако, выполнения более слабого условия $v/\omega \ll \delta$, где v — скорость электронов проводимости в металле (его соблюдение позволяет рассматривать движе-

[1] Длина пробега существенно зависит от температуры металла. Фактически речь идет обычно об очень низких температурах в гелиевой области, а рассматриваемые явления возникают в диапазоне ультракоротких радиочастот.

[2] Следует, однако, помнить, что пользоваться равенством (87.6) в качестве граничного условия можно лишь до тех пор, пока $|\varepsilon|$ велико (т. е. ζ мало); это условие, во всяком случае, не удовлетворяется уже при оптических частотах. Мы предполагаем, что $\mu \sim 1$; тогда большим $|\varepsilon|$ соответствуют малые ζ. Укажем, что если $\mu \gg 1$, то неравенство $\delta \ll \lambda$, необходимое для применимости граничного условия (87.6), означает, что должно быть $\sqrt{\mu\varepsilon} \gg 1$; при этом $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ может и не быть малым.

ние электронов, пренебрегая пространственной неоднородностью поля) [1]).

Неравенство $\zeta' > 0$ справедливо для вещественной части импеданса в любом случае. Если же имеет место формула (87.2), то можно высказать некоторые суждения и о знаке мнимой части ζ. Так, если дисперсия ε более существенна, чем дисперсия μ (т. е. μ можно считать вещественной величиной), то из $\varepsilon'' > 0$ следует $\zeta'\zeta'' < 0$, а поскольку всегда $\zeta' > 0$, то

$$\zeta'' < 0.$$

Это — наиболее обычный случай. Если же дисперсия ζ определяется дисперсией μ, то тем же путем найдем, что $\zeta'' > 0$.

Понятие об импедансе может быть применено и к сверхпроводникам. Характерной особенностью последних является существование в них малой глубины проникновения δ и в статическом случае ($\omega = 0$). При не слишком больших частотах можно принять, что распределение магнитного поля совпадает со статическим. Для определения же электрического поля имеем уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}.$$

Направим ось z по внешней нормали к поверхности сверхпроводника. Пренебрегая производными в тангенциальных направлениях по сравнению с большими производными по z, имеем

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}H_y$$

(и аналогично для E_y). Интегрируем это равенство по глубине z внутрь тела:

$$E_x(0) = \frac{i\omega}{c}\int\limits_{-\infty}^{0} H_y\,dz;$$

$E_x(0)$ — значение E_x при $z = 0$, т. е. на поверхности тела. Определим глубину проникновения количественно следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} H_y\,dz = H_y(0)\delta. \qquad (87.7)$$

Тогда

$$E_x(0) = \frac{i\omega}{c}H_y(0)\delta.$$

Сравнив с граничным условием вида (87.6), находим, что импеданс сверхпроводника (в рассматриваемой области не слишком

[1]) Более подробно эта ситуация рассмотрена в X, § 87.

больших частот [1]) дается формулой

$$\zeta = -i\frac{\omega}{c}\delta. \qquad (87.8)$$

Это выражение представляет собой первый член разложения $\zeta(\omega)$ по степеням частоты, которое, таким образом, начинается у сверхпроводников с члена, пропорционального ω. Следующий член разложения пропорционален ω^2 и веществен; это есть первый член разложения ζ' [2]).

Импеданс $\zeta(\omega)$, рассматриваемый как функция комплексного переменного ω, обладает свойствами, во многом аналогичными свойствам функции $\varepsilon(\omega)$ (*В.Л. Гинзбург*, 1954). Граничное условие, которое для монохроматической волны имеет вид (87.6), в общем случае надо понимать как операторное соотношение

$$\mathbf{E}_t = \widehat{\zeta}\,[\mathbf{H}_t\mathbf{n}], \qquad (87.9)$$

выражающее значение $\mathbf{E}_t$ в некоторый момент времени через значения $\mathbf{H}_t$ во все предыдущие моменты времени (ср. § 77). Так же как и в § 82, отсюда следует, что функция $\zeta(\omega)$ не имеет особых точек в верхней полуплоскости ω, включая вещественную ось (кроме точки $\omega = 0$). Далее, условие вещественности $\mathbf{E}_t$ при вещественном $\mathbf{H}_t$ приводит к соотношению

$$\zeta(-\omega^*) = \zeta^*(\omega).$$

Наконец, поскольку диссипация энергии определяется вещественной (а не мнимой, как у $\varepsilon(\omega)$) частью функции $\zeta(\omega)$, то $\zeta'(\omega)$ положительно и не обращается в нуль ни при каком вещественном значении ω, за исключением только значения $\omega = 0$. Рассуждения, аналогичные проведенным в § 82, позволяют затем сделать вывод, что

$$\operatorname{Re}\zeta(\omega) > 0$$

также и во всей верхней полуплоскости. Отсюда следует, в частности, что $\zeta(\omega)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости.

Отсутствие у $\zeta(\omega)$ особых точек в верхней полуплоскости снова приводит к формулам Крамерса–Кронига. При этом особенно существенна формула

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta'(x) - 1}{x - \omega}\,dx.$$

---

[1]) Фактически речь идет о частотах примерно до сантиметрового диапазона радиоволн.

[2]) Микроскопическая теория показывает, что пропорциональный ω^2 член в импедансе содержит также и логарифмический по ω множитель — см. X, § 96, 97.

Воспользовавшись четностью функции $\zeta'(x)$, ее можно переписать в виде

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \fint_0^\infty \frac{\zeta'(x) - 1}{x - \omega}\, dx + \frac{1}{\pi} \fint_0^\infty \frac{\zeta'(x) - 1}{x + \omega}\, dx$$

или

$$\zeta''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \fint_0^\infty \frac{\zeta'(x)}{x^2 - \omega^2}\, dx \tag{87.10}$$

(единицу в числителе подынтегрального выражения можно опустить, поскольку главное значение интеграла от $1/(x^2 - \omega)^2$ все равно есть нуль).

Все сказанное о функции $\zeta(\omega)$ в той же степени относится и к обратной функции $1/\zeta(\omega)$; оператор $\widehat{\zeta}^{-1}$ выражает $[\mathbf{H}_t\mathbf{n}]$ через $\mathbf{E}_t$. В частности, вместо (87.10) будем иметь

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi} \fint_0^\infty \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2 - \omega^2}\, dx. \tag{87.11}$$

При малых ζ эта формула может быть более удобной для использования, чем (87.10). В написанном виде, однако, она неприменима к сверхпроводникам, у которых $\widehat{\zeta}^{-1}$ имеет согласно (87.8) при $\omega = 0$ полюс. Простое видоизменение вывода (ср. переход от (82.7) к (82.9)) приводит при этом к формуле

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi} \fint_0^\infty \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2 - \omega^2}\, dx + \frac{c}{\omega\delta}. \tag{87.12}$$

В заключение этого параграфа в качестве примера использования понятия импеданса рассмотрим отражение плоской электромагнитной волны, падающей из пустоты на плоскую поверхность металла с поверхностным импедансом ζ. Если вектор $\mathbf{E}$ поляризован перпендикулярно к плоскости падения, то граничное условие (87.6) дает

$$E_0 + E_1 = \zeta(H_0 - H_1)\cos\theta_0 = \zeta(E_0 - E_1)\cos\theta_0$$

(обозначения те же, что и в § 86). Отсюда имеем, учитывая малость ζ,

$$\frac{E_1}{E_0} = -(1 - 2\zeta\cos\theta_0)$$

и коэффициент отражения

$$R_\perp = 1 - 4\zeta'\cos\theta_0. \tag{87.13}$$

Если же $\mathbf{E}_0$ лежит в плоскости падения, то граничное условие пишем в виде $\zeta \mathbf{H}_t = [\mathbf{n}\mathbf{E}_t]$, т. е.

$$\zeta(H_0 + H_1) = (E_0 - E_1)\cos\theta_0 = (H_0 - H_1)\cos\theta_0,$$

откуда коэффициент отражения

$$R_{\parallel} = \left|\frac{\cos\theta_0 - \zeta}{\cos\theta_0 + \zeta}\right|^2. \tag{87.14}$$

При углах падения, не слишком близких к $\pi/2$,

$$R_{\parallel} = 1 - \frac{4\zeta'}{\cos\theta_0}. \tag{87.15}$$

Если же угол $\varphi_0 = \pi/2 - \theta_0 \ll 1$, то

$$R_{\parallel} = \left|\frac{\varphi_0 - \zeta}{\varphi_0 + \zeta}\right|^2. \tag{87.16}$$

Это выражение имеет при $\varphi_0 = |\zeta|$ минимум, равный

$$R_{\parallel} = \frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'}.$$

За исключением особого случая (87.16), коэффициент отражения от поверхности с малым ζ близок к единице. Поверхность $\zeta \to 0$ (или, как говорят, идеально проводящая поверхность) является в то же время идеально отражающей. Граничное условие на такой поверхности: $\mathbf{E}_t = 0$ аналогично условию для электростатического поля на поверхности проводника. Но в отличие от случая постоянного поля, в переменном поле это условие автоматически влечет за собой выполнение также и определенного условия для магнитного поля. Именно, в силу уравнения $(i\omega/c)\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{E}$ из равенства $\mathbf{E}_t = 0$ на поверхности следует равенство $H_n = 0$. Таким образом, на идеально проводящей поверхности в переменном электромагнитном поле обращается в нуль нормальная составляющая магнитного поля. В этом смысле такая поверхность аналогична поверхности сверхпроводника в постоянном магнитном поле.

Задача

Определить интенсивность теплового излучения (заданной частоты) от плоской поверхности с малым импедансом.

Решение. Согласно закону Кирхгофа, интенсивность dI теплового излучения (в элемент телесного угла do) от произвольной поверхности связана с интенсивностью излучения от поверхности абсолютно черного тела dI_0 соотношением $dI = (1 - R)\,dI_0$, где R — коэффициент отражения от данной поверхности для естественного света. Вычисляя $R = (1/2)(R_\perp + R_\parallel)$ с помощью формул (87.13) и (87.14) и учитывая изотропию излучения с

поверхности абсолютно черного тела ($dI_0 = I_0\, do/2\pi$), получим

$$I = 2I_0\zeta' \int_0^{\pi/2} \left\{1 + \frac{1}{\cos^2\theta + 2\zeta'\cos\theta + \zeta'^2 + \zeta''^2}\right\} \cos\theta \sin\theta\, d\theta.$$

Произведя интегрирование и опустив члены высшего порядка по ζ, находим

$$\frac{I}{I_0} = \zeta'\left(\ln\frac{1}{\zeta'^2 + \zeta''^2} + 1 - \frac{2\zeta'}{\zeta''}\operatorname{arctg}\frac{\zeta''}{\zeta'}\right).$$

В частности, для металла с импедансом, определяемым формулой (87.3), имеем ($\mu = 1$)

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\left(\ln\frac{4\pi\sigma}{\omega} + 1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

§ 88. Распространение волн в неоднородной среде

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в электрически неоднородной (но изотропной) среде. В уравнениях Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\varepsilon\frac{\omega}{c}\mathbf{E}$$

(полагаем везде $\mu = 1$) ε есть функция координат точки. Подставив $\mathbf{H}$ из первого уравнения во второе, получим для $\mathbf{E}$ уравнение

$$\Delta\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \tag{88.1}$$

Исключение же $\mathbf{E}$ дает для $\mathbf{H}$ уравнение

$$\Delta\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{H} + \frac{1}{\varepsilon}[\nabla\varepsilon\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}] = 0. \tag{88.2}$$

Эти уравнения существенно упрощаются в одномерном случае, когда ε меняется лишь в одном направлении в пространстве. Выберем это направление в качестве оси z и рассмотрим волну, направление распространения которой лежит в плоскости xz. В такой волне все величины не зависят вовсе от координаты y, а ввиду однородности пространства вдоль оси x можно рассматривать зависимость от x, даваемую множителем $e^{i\varkappa x}$ с постоянным $\varkappa$. При $x = 0$ поле зависит только от z, т. е. речь идет о *нормальном* прохождении волны через слой вещества с $\varepsilon = \varepsilon(z)$. Если же $\varkappa \neq 0$, то говорят о *наклонном* прохождении волны.

При этом надо различать (при $\varkappa \neq 0$) два независимых случая поляризации. В одном из них вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен к плоскости распространения волны (т. е. направлен вдоль оси y), а магнитное поле $\mathbf{H}$ соответственно лежит в этой плоскости.

Уравнение (88.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+\left(\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-\varkappa^2\right)E=0. \tag{88.3}$$

В другом случае вдоль оси y направлено поле **H**, а **E** лежит в плоскости распространения. В этом случае удобнее исходить из уравнения (88.2), которое дает

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial z}\right)+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\varkappa^2}{\varepsilon}\right)H=0. \tag{88.4}$$

Будем условно называть эти два типа волн соответственно E- и *H-волнами.*

Уравнения могут быть решены в общем виде в важном случае, когда условия распространения близки к условиям геометрической оптики; функцию $\varepsilon(z)$ предполагаем ниже вещественной [1]). В уравнении (88.3) величина $2\pi/\sqrt{f}$, где

$$f(z)=\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-\varkappa^2,$$

играет роль длины волны в направлении оси z. Приближению геометрической оптики соответствует неравенство

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\sqrt{f}}\ll 1, \tag{88.5}$$

а два независимых решения уравнения (88.3) имеют вид

$$\frac{\text{const}}{f^{1/4}}\exp\left(\pm i\int\sqrt{f}\,dz\right). \tag{88.6}$$

Условие (88.5) заведомо нарушается вблизи *точки отражения* (если таковая имеется), в которой $f=0$. Пусть это есть точка $z=0$, причем $f>0$ при $z<0$ и $f<0$ при $z>0$. На достаточно больших расстояниях по обе стороны от точки $z=0$ решение уравнения (88.3) имеет вид (88.6), но для того чтобы установить соответствие между коэффициентами в этом решении в областях $z>0$ и $z<0$, надо исследовать точное решение уравнения (88.3) вблизи $z=0$. В окрестности этой точки функцию $f(z)$ можно разложить по степеням z и представить в виде $f=-\alpha z$. Решение уравнения

$$\frac{d^2E}{dz^2}-\alpha zE=0,$$

---

[1]) Уравнение (88.3) имеет формальное сходство с уравнением Шредингера для одномерного движения частицы в квантовой механике, а приближению геометрической оптики соответствует квазиклассический случай. Ниже мы приводим окончательные результаты, отсылая за выводом их к другому тому этого курса — см. III, гл. VII.

конечное при всех z, есть

$$E = \frac{A}{\alpha^{1/6}}\Phi(\alpha^{1/3}z), \tag{88.7}$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{u^3}{3} + u\xi\right)du$$

— функция Эйри (множитель $\exp(-i\omega t + i\varkappa x)$ в E везде опускаем)[1]. Асимптотический же вид решения уравнения (88.3) при больших $|z|$ есть

$$\begin{aligned} E &= \frac{A}{f^{1/4}}\cos\left(\int_0^z \sqrt{f}\,dz + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{при} \quad z < 0, \\ E &= \frac{A}{2|f|^{1/4}}\exp\left(-\int_0^z \sqrt{|f|}\,dz\right) \quad \text{при} \quad z > 0, \end{aligned} \tag{88.8}$$

с тем же коэффициентом A, что и в (88.7). Первое из этих выражений представляет собой стоячую волну, получающуюся в результате наложения падающей (в положительном направлении оси z) волны и волны, отраженной от плоскости $z = 0$. Амплитуды этих волн одинаковы (и равны $A/2f^{1/4}$), т. е. коэффициент отражения равен единице. В область $z > 0$ проникает лишь экспоненциально затухающее поле.

При приближении к точке отражения амплитуда волны возрастает, как это видно уже из наличия $f^{1/4}$ в знаменателе в (88.8). Для определения величины поля в непосредственной близости этой точки надо, однако, воспользоваться выражением (88.7). Эта функция монотонно убывает в глубь области $z > 0$ и имеет осциллирующий характер в области $z < 0$, причем величина максимумов $|E|$ постепенно убывает. Первый, наибольший из максимумов, достигается при $\alpha^{1/3}z = -1{,}02$ и равен

$$E = 0{,}949 \cdot A\alpha^{-1/6}.$$

До сих пор мы писали решения для E-волн. Легко видеть, что в приближении геометрической оптики вполне аналогичные формулы могут быть написаны и для H-волн. Если сделать в

---

[1]) Мы пользуемся здесь тем же определением функции Эйри, что и в других томах этого курса. В настоящее время, однако, более употребительно определение

$$\mathrm{Ai}\,\xi = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{\pi}}.$$

уравнении (88.4) подстановку $H = u\sqrt{\varepsilon}$, то производные от ε войдут умноженными только на u (но не на u'); пренебрегая затем членами, содержащими эти производные (малыми в силу условия (88.5)), получим для функции $u(z)$ уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - \varkappa^2\right) u = 0,$$

совпадающее с уравнением (88.3). Поэтому все формулы для H отличаются от формул (88.6)–(88.8) лишь множителем $\sqrt{\varepsilon}$.

Своеобразное отличие в поведении обоих типов волн возникает при отражении наклонно ($\varkappa \neq 0$) падающей волны от слоя вещества, в котором $\varepsilon(z)$ проходит через нуль. Отражение происходит при этом от плоскости, на которой $f(z) = \varepsilon\omega^2/c^2 - \varkappa^2 = 0$, т. е. «не доходя» до точки $\varepsilon = 0$. E-волна проникает за эту плоскость лишь в виде экспоненциально затухающего поля. При отражении же H-волны на общем фоне такого затухающего поля вблизи точки $\varepsilon = 0$ возникает резкое усиление поля (*K. Försterling*, 1949) [1]). Рассмотрим это явление.

Пусть $\varepsilon = 0$ в точке $z = 0$. Вблизи этой точки пишем

$$\varepsilon = -az, \quad a > 0, \tag{88.9}$$

и уравнение (88.4) принимает вид

$$\frac{d^2H}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{dH}{dz} - \left(\frac{a\omega^2}{c^2}z + \varkappa^2\right) H = 0. \tag{88.10}$$

Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений, одно из решений этого уравнения (назовем его H_1) не имеет особенности при $z = 0$, а его разложение при малых z начинается с z^2:

$$H_1(z) = z^2 + \ldots$$

Второе независимое решение обладает логарифмической особенностью и его разложение имеет вид

$$H_2(z) = H_1(z) \ln \varkappa z + \frac{2}{\varkappa^2} + \ldots$$

(параметр a появляется лишь в более высоких членах разложения). Для определения поля вблизи точки $z = 0$ нет необходимости анализировать вопрос о выборе линейной комбинации из H_1 и H_2, удовлетворяющей условиям на бесконечности. Достаточно

[1]) Отметим, что эта точка является особой для уравнения (88.4), и потому вблизи нее приближение геометрической оптики становится неприменимым, несмотря на то, что $f(z)$ не обращается в нуль и условие (88.5) может не нарушаться.

заметить, что она стремится при $z \to 0$ к постоянной (обозначим ее H_0) и имеет логарифмическую особенность:

$$H \approx H_0 \left(1 + \frac{\varkappa^2}{2} z^2 \ln \varkappa z\right);$$

наряду с постоянной здесь выписан также главный член с особенностью. Электрическое поле определяется по полю $H_y = H$ уравнениями Максвелла

$$E_x = -\frac{ic}{\varepsilon\omega}\frac{\partial H}{\partial z}, \quad E_z = \frac{ic}{\varepsilon\omega}\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Вспомнив, что зависимость H от x дается множителем $e^{i\varkappa x}$, находим главные члены в E_x и E_z:

$$E_x \approx H_0 \frac{i\varkappa^2 c}{a\omega} \ln \varkappa z, \quad E_z \approx H_0 \frac{\varkappa c}{a\omega}\frac{1}{z}. \tag{88.11}$$

Они обращаются при $z \to 0$ в бесконечность.

В действительности, разумеется, благодаря непременному наличию в среде хотя бы малого поглощения поле достигает лишь относительно (по сравнению с окружающим слабым фоном) больших, но конечных значений. Интересно, однако, что уже сколь угодно малая мнимая часть в ε приводит к конечной диссипации энергии. Положим $\varepsilon = -az + i\delta$, $\delta \to +0$. Тогда аналитическое продолжение логарифма в (88.11) с правой полуоси z на левую должно производиться в комплексной плоскости z снизу, и при $z < 0$ будет

$$E_x = H_0 \frac{i\varkappa^2 c}{a\omega}(\ln|\varkappa z| - i\pi).$$

Средний (по времени) поток энергии вдоль оси z,

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,(E_x H_y^*)$$

(см. (59.9а)), равен нулю при $z > 0$, а при $z < 0$ появление в E_x вещественной части приводит к отличному от нуля потоку энергии по направлению к плоскости $z = 0$, где эта энергия диссипируется [1]):

$$\overline{S}_z = \frac{\varkappa^2 c^2}{8\omega a} H_0^2 \tag{88.12}$$

(*В.Б. Гильденбург*, 1963).

---

[1]) Этот результат можно получить и исходя из выражения (80.4) для энергии, диссипируемой в единице объема:

$$Q = \frac{\omega\varepsilon''|\mathbf{E}|^2}{8\pi} \approx \frac{\varkappa^2 c^2 H_0^2}{8\pi\omega} \lim_{\delta\to 0} \frac{\delta}{a^2 z^2 + \delta^2} = \frac{\varkappa^2 c^2 H_0^2}{8a\omega}\delta(z);$$

интегрирование по z приводит к (88.12).

Задача

По границе раздела между двумя средами соответственно с положительной и отрицательной диэлектрическими проницаемостями (ε_1 и $-|\varepsilon_2|$) может распространяться поверхностная H-волна, затухающая в глубь обеих сред. Определить связь между ее частотой и волновым вектором.

Решение. Выберем границы раздела в качестве плоскости xy, причем волна распространяется вдоль оси x, а поле $\mathbf{H}$ параллельно оси y. Пусть полупространство $z > 0$ заполнено средой с положительной (ε_1), а полупространство $z < 0$ — средой с отрицательной (ε_2) проницаемостью. Ищем поле в затухающей при $z \to \pm\infty$ волне в виде

$$H_1 = H_0 e^{ikx - \varkappa_1 z}, \quad \varkappa_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1} \quad \text{при} \quad z > 0,$$

$$H_2 = H_0 e^{ikx + \varkappa_2 z}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}|\varepsilon_2|} \quad \text{при} \quad z < 0,$$

причем k, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ вещественны. Граничное условие непрерывности $H_y = H$ уже удовлетворено, а условие непрерывности E_x дает

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_1}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial H_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = 0,$$

или $\varkappa_1/\varepsilon_1 = \varkappa_2/|\varepsilon_2|$. Это равенство может быть выполнено лишь при условии

$$\varepsilon_1 < |\varepsilon_2|$$

(и подразумевающемся $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$). При этом связь между k и ω дается уравнением

$$k^2 = \frac{\omega^2\varepsilon_1|\varepsilon_2|}{c^2(|\varepsilon_2| - \varepsilon_1)}.$$

Распространение же поверхностных E-волн, как легко убедиться, вообще невозможно.

§ 89. Принцип взаимности

Излучение монохроматических электромагнитных волн от источника, представляющего собой тонкий провод, расположенный в произвольной среде, описывается уравнениями

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c}\mathbf{D} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ст}}, \tag{89.1}$$

где $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ — плотность протекающих по проводу «сторонних» (по отношению к среде) периодических токов.

Пусть в среде расположены два различных источника (одинаковой частоты); будем отмечать индексами 1 и 2 поля, создаваемые каждым из этих источников в отдельности. Среда может быть произвольным образом неоднородна и анизотропна. Единственное, что предполагается ниже о ее свойствах, это —

линейные соотношения $D_i = \varepsilon_{ik}E_k$, $B_i = \mu_{ik}H_k$ с симметричными тензорами ε_{ik} и μ_{ik}. В этих условиях оказывается возможным получить определенное соотношение, связывающее между собой поля обоих источников и сторонние токи в них.

Умножим оба уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_1 = ik\mathbf{B}_1, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = -ik\mathbf{D}_1 + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ст}}^{(1)}$$

соответственно на $\mathbf{H}_2$ и $\mathbf{E}_2$, а такие же уравнения для поля $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ — на $-\mathbf{H}_1$ и $-\mathbf{E}_1$ Сложив почленно все эти уравнения, получим

$$(\mathbf{H}_2\operatorname{rot}\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1\operatorname{rot}\mathbf{H}_2) + (\mathbf{E}_2\operatorname{rot}\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1\operatorname{rot}\mathbf{E}_2) =$$
$$= i\frac{\omega}{c}(\mathbf{B}_1\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1\mathbf{B}_2) + i\frac{\omega}{c}(\mathbf{E}_1\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1\mathbf{E}_2) + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{\text{ст}}^{(1)}\mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{\text{ст}}^{(2)}\mathbf{E}_1).$$

Но $\mathbf{B}_1\mathbf{H}_2 = \mu_{ik}H_{1k}H_{2i} = \mathbf{H}_1\mathbf{B}_2$, $\mathbf{E}_1\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1\mathbf{E}_2$, так что два первых члена в правой части равенства обращаются в нуль. Левая же часть преобразуется по известной формуле векторного анализа, и мы находим

$$\operatorname{div}\{[\mathbf{E}_1\mathbf{H}_2] - [\mathbf{E}_2\mathbf{H}_1]\} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{\text{ст}}^{(1)}\mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{\text{ст}}^{(2)}\mathbf{E}_1).$$

Проинтегрируем это равенство по всему пространству; интеграл в левой части равенства преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и исчезает. Поэтому получим

$$\int \mathbf{j}_{\text{ст}}^{(1)}\mathbf{E}_2\,dV_1 = \int \mathbf{j}_{\text{ст}}^{(2)}\mathbf{E}_1\,dV_2. \tag{89.2}$$

Интегралы в левой и правой частях берутся соответственно лишь по объемам первого и второго источников, так как только в них отличны от нуля токи $\mathbf{j}_{\text{ст}}^{(1)}$ и $\mathbf{j}_{\text{ст}}^{(2)}$. Ввиду тонкости проводов влиянием каждого из них на поле другого провода можно пренебречь, и, таким образом, $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ в формуле (89.2) представляют собой поля излучений первого и второго источников, создаваемые каждым из них в месте нахождения другого источника, как если бы последнего не было. Формула (89.2) и является искомым соотношением, известным под названием *теоремы взаимности*.

Если размеры источников малы по сравнению с длиной волны, а также по сравнению с их взаимным расстоянием, то выражение теоремы взаимности можно упростить. Поле каждого источника слабо меняется на протяжении размеров другого источника, и в (89.2) можно вынести $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ из-под знаков интеграла, написав их просто как $\mathbf{E}_1(2)$ и $\mathbf{E}_2(1)$, где 1 и 2 обозначают точки нахождения обоих источников:

$$\mathbf{E}_2(1)\int \mathbf{j}_{\text{ст}}^{(1)}\,dV_1 = \mathbf{E}_1(2)\int \mathbf{j}_{\text{ст}}^{(2)}\,dV_2.$$

Интеграл $\int \mathbf{j}_{\text{ст}}\, dV$ есть не что иное, как производная по времени от полного дипольного момента источника $\mathscr{P}$. Поскольку $\dot{\mathscr{P}} = -i\omega\mathscr{P}$, то окончательно имеем

$$\mathbf{E}_2(1)\mathscr{P}_1 = \mathbf{E}_1(2)\mathscr{P}_2. \tag{89.3}$$

Такая форма теоремы взаимности применима, разумеется, лишь к дипольному излучению. Если же дипольный момент источника равен нулю (или аномально мал), то приближение, сделанное при переходе от общей формулы (89.2) к (89.3), недостаточно (см. задачу 1 к этому параграфу).

Задачи

1. Вывести теорему взаимности для квадрупольных и магнитно-дипольных излучателей.

Решение. Если $\int \mathbf{j}_{\text{ст}}\, dV = 0$, то в интегралах (89.2) надо взять следующие члены разложения:

$$\int \mathbf{j}_1\mathbf{E}_2\, dV_1 \approx \frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}\int x_k j_{1i}\, dV_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right)\int (x_k j_{1i} + x_i j_{1k})\, dV_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} - \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right)\int (x_k j_{1i} - x_i j_{1k})\, dV_1$$

(индекс «ст» у $\mathbf{j}$ для краткости опускаем). Вводим тензор квадрупольного момента и вектор магнитного момента согласно

$$\dot{D}_{ik} = -i\omega D_{ik} = \int \{3(x_i j_k + x_k j_i) - 2\delta_{ik}\mathbf{r}\mathbf{j}\}\, dV,$$

$$\mathscr{M} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{r}\mathbf{j}]\, dV.$$

Воспользовавшись уравнением $\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}/c$ и считая, что вблизи источников $\varepsilon = \text{const}$ (в силу чего $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$), получим

$$\int \mathbf{j}_1\mathbf{E}_2\, dV = -\frac{i\omega}{12}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right) D_{ik}^{(1)} + i\omega\mathbf{B}_2(1)\mathscr{M}_1.$$

Отсюда видно, что для квадрупольных излучателей теорема взаимности гласит:

$$\left(\frac{\partial E_{2i}(1)}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{2k}(1)}{\partial x_i}\right) D_{ik}^{(1)} = \left(\frac{\partial E_{1i}(2)}{\partial x_k} + \frac{\partial E_{1k}(2)}{\partial x_i}\right) D_{ik}^{(2)},$$

а для магнитно-дипольных

$$\mathbf{B}_2(1)\mathscr{M}_1 = \mathbf{B}_1(2)\mathscr{M}_2.$$

2. Определить зависимость интенсивности излучения дипольного источника, погруженного в однородную изотропную среду, от проницаемостей ε и μ среды.

Решение. В результате подстановки

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{E}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}', \quad \omega = \frac{\omega'}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

уравнения (89.1) принимают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}' = \frac{i\omega'}{c}\mathbf{H}', \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}' = -\frac{i\omega'}{c}\mathbf{E}' + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ст}},$$

не содержащий ε и μ. Решение этих уравнений для дипольного излучения приводит к векторному потенциалу поля в волновой зоне (см. II, § 67):

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{\text{ст}}\,dV;$$

R_0 — расстояние от источника; здесь и ниже мы опускаем несущественные для вычисления интенсивности фазовые множители. Отсюда видно, что при заданном $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ можно написать $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_0$, где индекс 0 отличает поле источника в пустоте. Для величин $\mathbf{H}'$, $\mathbf{E}'$ имеем

$$\mathbf{H}' = i[\mathbf{k}'\mathbf{A}'] = i\sqrt{\varepsilon\mu}[\mathbf{k}\mathbf{A}_0] = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{H}'.$$

Отсюда

$$\mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E} = \mu\mathbf{E}_0,$$

и для интенсивности:

$$I = I_0\mu^{3/2}\varepsilon^{1/2},$$

чем и решается поставленная задача.

§ 90. Электромагнитные колебания в полых резонаторах

Рассмотрим электрическое поле в пустом пространстве, ограниченном идеально проводящими стенками. Уравнения монохроматического поля в пустоте гласят:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c}\mathbf{E}. \tag{90.1}$$

Граничные же условия на поверхности идеально проводящего тела (тела с импедансом $\zeta = 0$):

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad H_n = 0. \tag{90.2}$$

Для решения задачи достаточно рассматривать одну из величин $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. Исключив, например, $\mathbf{H}$ из уравнений (90.1), получим для $\mathbf{E}$ волновое уравнение

$$\Delta\mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = 0, \tag{90.3}$$

к которому надо также присоединить уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \tag{90.4}$$

не вытекающее автоматически из (90.3). Решая эти уравнения с граничным условием $\mathbf{E}_t = 0$, определим поле $\mathbf{E}$, после чего вычисляем $\mathbf{H}$ непосредственно по первому из уравнений (90.1), причем граничное условие $H_n = 0$ выполняется автоматически.

При заданных размерах и форме полости уравнения (90.3) и (90.4) имеют решения лишь при вполне определенном наборе значений ω. Эти значения называют *собственными частотами* электромагнитных колебаний данного резонатора. При $\zeta = 0$ электромагнитное поле не проникает в глубь металла и потери в нем отсутствуют. Поэтому все собственные колебания не затухают, т. е. все собственные частоты вещественны. Число различных собственных частот резонатора бесконечно. Порядок величины наименьшей из них есть $\omega_1 \sim c/l$, где l — линейные размеры полости. Это очевидно уже непосредственно из соображений размерности, поскольку l есть единственный размерный параметр, характеризующий условия задачи (при заданной форме резонатора). Большие же собственные частоты ($\omega \gg c/l$) расположены очень близко друг к другу, причем их число, приходящееся на единичный интервал значений ω, равно $V\omega^2/(2\pi^2 c^3)$; оно зависит только от объема резонатора V, но не от его формы (см. II, § 52).

Средние (по времени) значения электрической и магнитной энергии поля в резонаторе даются соответственно интегралами

$$\frac{1}{2}\int \frac{|\mathbf{E}|^2}{8\pi}\,dV \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\int \frac{|\mathbf{H}|^2}{8\pi}\,dV.$$

Покажем, что эти две величины равны друг другу. С помощью первого из уравнений (90.1) пишем

$$\int \mathbf{H}\mathbf{H}^*\,dV = \frac{c^2}{\omega^2}\int \operatorname{rot}\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}^*\,dV.$$

Второй интеграл преобразуем по частям:

$$\int \operatorname{rot}\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}^*\,dV = \oint \operatorname{rot}\mathbf{E}^*[d\mathbf{f}\,\mathbf{E}] + \int \mathbf{E}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}^*\,dV.$$

Поскольку на границе объема $\mathbf{E}_t = 0$, то интеграл по поверхности обращается в нуль и остается

$$\int |\mathbf{H}|^2\,dV = \frac{c^2}{\omega^2}\int \mathbf{E}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}^*\,dV = -\frac{c^2}{\omega^2}\int \mathbf{E}\Delta\mathbf{E}^*\,dV,$$

или, ввиду (90.3),

$$\int |\mathbf{H}|^2\,dV = \int |\mathbf{E}|^2\,dV, \tag{90.5}$$

что и требовалось доказать [1]).

[1]) Мы понимаем везде под $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ напряженности поля, соответствующего одной определенной собственной частоте. Не представляет также труда показать, что поля, соответствующие двум различным собственным частотам ω_a и ω_b, удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\int \mathbf{E}_a\mathbf{E}_b^*\,dV = \int \mathbf{H}_a\mathbf{H}_b^*\,dV = 0.$$

Незатухающие колебания в резонаторе получаются в предположении равного нулю импеданса его стенок. Выясним теперь, какое влияние на собственные частоты оказывает наличие у стенок малого, но все же конечного импеданса.

Среднюю (по времени) энергию, диссипируемую в 1 с в стенках резонатора, можно вычислить как поток энергии, втекающей в стенки из электромагнитного поля в полости. Учитывая граничное условие (87.6) на поверхности тела с импедансом ζ, напишем нормальную составляющую плотности потока энергии:

$$\overline{S}_n = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,\{|\mathbf{E}_t\mathbf{H}_t^*|\} = \frac{c\zeta'}{8\pi}|\mathbf{H}_t|^2$$

(ζ' — вещественная часть ζ). В этом выражении, которое уже содержит малый множитель ζ', в первом приближении можно понимать под $\mathbf{H}$ поле, получающееся при решении задачи с $\zeta = 0$. Полная диссипируемая энергия дается интегралом

$$\frac{c}{8\pi}\oint \zeta'|\mathbf{H}|^2\,df, \tag{90.6}$$

взятым по внутренней поверхности резонатора. Декремент затухания амплитуды поля со временем получится делением этой величины на удвоенную полную энергию поля, равную

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8\pi}\int\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2\right)dV = \frac{1}{8\pi}\int|\mathbf{H}|^2\,dV.$$

Декремент затухания совпадает с мнимой частью $|\omega''|$ комплексной частоты $\omega = \omega' + i\omega''$ [1]). Написав формулу в комплексном виде

$$\omega - \omega_0 = -\frac{ic}{2}\frac{\oint\zeta|\mathbf{H}|^2\,df}{\int|\mathbf{H}|^2\,dV} \tag{90.7}$$

(ω и ω_0 — значения частоты с учетом и без учета ζ), мы можем с ее помощью определить не только декремент затухания, но и сдвиг самих собственных частот. Последний, как мы видим, определяется мнимой частью ζ. В § 87 было указано, что обычно $\zeta'' < 0$; при этом сдвиг собственных частот происходит в сторону их уменьшения.

Для фактического вычисления может оказаться удобнее преобразовать стоящий в знаменателе (90.7) объемный интеграл в интеграл по поверхности.

Ввиду тангенциальности вектора $\mathbf{H}$ к поверхности пишем тождественно

$$\oint(\mathbf{H}\mathbf{H}^*)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) = \oint(\mathbf{H}\mathbf{H}^*)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) - \oint(\mathbf{H}\mathbf{r})(\mathbf{H}^*\,d\mathbf{f}) - \oint(\mathbf{H}^*\mathbf{r})(\mathbf{H}\,d\mathbf{f}).$$

[1]) В радиотехнике обычно вводят вместо декремента затухания $|\omega''|$ так называемую *добротность* резонатора, определяемую как отношение $\omega'/2|\omega''|$.

Стоящие справа интегралы преобразуем в объемные заменой $d\mathbf{f} \to dV \cdot \nabla$; используя при этом уравнения (90.1), получим

$$\oint (\mathbf{H}\mathbf{H}^*)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) = ik\int \mathbf{r}([\mathbf{H}\mathbf{E}^*] - [\mathbf{H}^*\mathbf{E}])\,dV + \int \mathbf{H}\mathbf{H}^*\,dV.$$

Аналогичным образом, учитывая тождество $[\mathbf{r}[\mathbf{E}\,d\mathbf{f}]] = \mathbf{E}(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) - (\mathbf{r}\mathbf{E})\,d\mathbf{f} = 0$ (являющееся следствием граничного условия $\mathbf{E}_t = 0$), получим

$$\oint (\mathbf{E}\mathbf{E}^*)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) = -\oint (\mathbf{E}\mathbf{E}^*)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) + \oint (\mathbf{E}\mathbf{r})(\mathbf{E}^*\,d\mathbf{f}) + \\ + \oint (\mathbf{E}^*\mathbf{r})(\mathbf{E}\,d\mathbf{f}) = ik\int \mathbf{r}([\mathbf{H}\mathbf{E}^*] - [\mathbf{H}^*\mathbf{E}])\,dV - \int \mathbf{E}\mathbf{E}^*\,dV.$$

Вычитая почленно друг из друга оба полученных равенства и учитывая (90.5), получим формулу

$$\int |\mathbf{H}|^2\,dV = \frac{1}{2}\oint (|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{E}|^2)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}). \tag{90.8}$$

Все формулы для резонатора, полость которого заполнена непоглощающей диэлектрической средой с отличными от 1 значениями ε и μ, получаются из формул для пустого резонатора путем замены в них:

$$\omega,\ \mathbf{E},\ \mathbf{H} \to \omega\sqrt{\varepsilon\mu},\ \sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{E},\ \sqrt{\mu}\,\mathbf{H}. \tag{90.9}$$

Это ясно из того, что при таком преобразовании уравнения (90.1) переходят в правильные уравнения Максвелла в среде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mu\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon\mathbf{E}.$$

В частности, наличие среды уменьшает все собственные частоты в $\sqrt{\varepsilon\mu}$ раз.

Задачи

1. Определить частоты собственных колебаний в резонаторе с идеально проводящими стенками, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда.

Решение. Оси x, y, z выбираем по трем ребрам параллелепипеда, имеющим длины a_1, a_2, a_3. Решения уравнений (90.3) и (90.4), удовлетворяющие граничному условию $\mathbf{E}_t = 0$:

$$E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t} \tag{1}$$

и аналогично для E_y, E_z, где

$$k_x = \frac{n_1\pi}{a_1}, \quad k_y = \frac{n_2\pi}{a_2}, \quad k_z = \frac{n_3\pi}{a_3} \tag{2}$$

(n_1, n_2, n_3 — целые положительные числа); постоянные A_1, A_2, A_3 связаны соотношением

$$A_1k_x + A_2k_y + A_3k_z = 0, \tag{3}$$

а собственные частоты

$$\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2).$$

Магнитное поле вычисляется из (1):

$$H_x = -i\frac{c}{\omega}(A_3k_y - A_2k_z)\sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

и аналогично для H_y, H_z.

Если все три или два из чисел n_1, n_2, n_3 равны нулю, то $\mathbf{E} \equiv 0$. Поэтому первой (наименьшей) частоте соответствует колебание, в котором одно из этих чисел равно нулю, а два — единице.

Ввиду наличия связи (3) решение (1) (с заданными отличными от нуля n_1, n_2, n_3) содержит всего две независимые произвольные постоянные, т. е. каждая собственная частота двукратно вырождена. Частоты же, для которых одно из чисел n_1, n_2, n_3 равно нулю, не вырождены.

2. Определить частоты дипольно-электрических и дипольно-магнитных колебаний в сферическом резонаторе (радиуса a).

Р е ш е н и е. В стоячей сферической волне дипольно-электрического типа поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют вид

$$\mathbf{E} = e^{-i\omega t}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right), \quad \mathbf{H} = -ike^{-i\omega t}\operatorname{rot}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right),$$

где $\mathbf{b}$ — постоянный вектор, а $k = \omega/c$ (см. II, § 72). Граничное условие $[\mathbf{nE}] = 0$ при $r = a$ приводит к уравнению

$$\operatorname{ctg} ka = \frac{1}{ka} - ka.$$

Его наименьший корень есть $ka = 2{,}74$. Частота $\omega = 2{,}74c/a$ есть наименьшая из всех собственных частот сферического резонатора.

В стоячей сферической волне дипольно-магнитного типа

$$\mathbf{E} = ike^{-i\omega t}\operatorname{rot}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right), \quad \mathbf{H} = e^{-i\omega t}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right).$$

Граничное условие для $\mathbf{E}$ приводит к уравнению

$$\operatorname{tg} ka = ka.$$

Его первый корень: $ka = 4{,}49$.

3. В резонатор внесен маленький шарик с электрической и магнитной поляризуемостями α_e и α_m. Определить вызванный этим сдвиг собственной частоты резонатора.

Р е ш е н и е. Пусть $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — напряженности поля в резонаторе без шарика, а $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ — в его присутствии. Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют уравнениям (90.1), а $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{H}_1$ — уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_1 = \frac{i\omega_1}{c}\mathbf{H}_1, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_1 - \frac{i\omega_1}{c}\mathbf{E}_1, \tag{1}$$

где $\mathbf{j}_1$ — плотность тока в шарике. Умножим первое уравнение (1) на $\mathbf{H}^*$, второе на $-\mathbf{E}^*$, произведем комплексное сопряжение над уравнениями (90.1) и умножим первое из них на $\mathbf{H}_1$, а второе на $-\mathbf{E}_1$. Сложив затем все четыре уравнения, получим

$$\operatorname{div}\{[\mathbf{E}_1\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}_1]\} = i\frac{\delta\omega}{c}(\mathbf{H}_1\mathbf{H}^* + \mathbf{E}_1\mathbf{E}^*) - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_1\mathbf{E}^*,$$

где $\delta\omega = \omega_1 - \omega$ — искомый сдвиг частоты. Проинтегрируем это равенство по объему резонатора. Левая часть преобразуется по теореме Гаусса и

исчезает, так как на стенке $\mathbf{E}_t = 0$, $\mathbf{E}_{1t} = 0$. Ввиду малых размеров шарика основной вклад в интеграл от первого члена справа возникает на больших расстояниях от него; с другой стороны, на этих расстояниях производимое шариком возмущение поля мало, так что можно положить $\mathbf{E}_1 \approx \mathbf{E}$, $\mathbf{H}_1 \approx \mathbf{H}$. Интеграл же от второго члена преобразуется подобно тому, как это делалось в § 89 (и в задаче 1 к нему), и дает

$$\int \mathbf{j}_1 \mathbf{E}^* \, dV = -i\omega(\mathscr{P}\mathbf{E}_0^* + \mathscr{M}\mathbf{H}_0^*) = -i\omega V_0(\alpha_e|\mathbf{E}_0|^2 + \alpha_m|\mathbf{H}_0|^2),$$

где $\mathbf{E}_0 \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$, $\mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{H}(r_0)$; $\mathbf{r}_0$ — координаты шарика, V_0 — его объем; подразумевается, что размеры шарика настолько малы, что изменением полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ на них можно пренебречь.

Таким образом, с учетом (90.5), находим для искомого сдвига частоты:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\alpha_e|\mathbf{E}_0|^2 + \alpha_m|\mathbf{H}_0|^2}{\frac{1}{2\pi}\int |\mathbf{H}|^2 \, dV} V_0.$$

Если поляризуемости комплексны, эта формула дает как сдвиг частоты собственных колебаний, так и их затухание.

4. Резонатор заполнен прозрачным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Определить изменение собственной частоты при малом изменении $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ диэлектрической проницаемости.

Р е ш е н и е. Невозмущенное поле $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ в резонаторе удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = \frac{i\omega}{c}\mathbf{H}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\mathbf{E}_0,$$

а возмущенное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i(\omega + \delta\omega)}{c}\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{i}{c}(\omega\varepsilon + \omega\delta\varepsilon + \varepsilon\delta\omega)\mathbf{E}$$

(членом с $\delta\omega\,\delta\varepsilon$ пренебрегаем). Поступив с этими четырьмя уравнениями, как в предыдущей задаче, получим

$$\operatorname{div}\{[\mathbf{E}\mathbf{H}_0^*] + [\mathbf{E}_0^*\mathbf{H}]\} = \frac{i}{c}(\omega\delta\varepsilon + \varepsilon\delta\omega)\mathbf{E}\mathbf{E}_0^* + \frac{i}{c}\delta\omega\mathbf{H}\mathbf{H}_0^* \approx$$
$$\approx \frac{i}{c}(\omega\delta\varepsilon + \varepsilon\delta\omega)\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* + \frac{i}{c}\delta\omega\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^*,$$

и затем:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\int |\mathbf{E}_0|^2 \delta\varepsilon \, dV}{2\varepsilon \int |\mathbf{E}_0|^2 \, dV}. \tag{1}$$

При переходе к последней формуле учтено, что для заполненного диэлектриком резонатора соотношение (90.5) приобретает вид

$$\int |\mathbf{H}_0|^2 \, dV = \varepsilon \int |\mathbf{E}_0|^2 \, dV,$$

как это ясно из (90.9).

При наличии дисперсии диэлектрическая проницаемость меняется не только за счет изменения параметров, но и за счет изменения частоты, так что

$$\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_{\text{ст}} + \frac{d\varepsilon}{d\omega}\delta\omega,$$

где $\delta\varepsilon_{\text{ст}}$ — изменение диэлектрической проницаемости при заданной частоте

(ср. (81.9)). Подставляя в (1) и решая относительно $\delta\omega$, получаем окончательно:

$$\frac{\delta\omega}{\omega^2} = -\frac{\int |\mathbf{E}_0|^2 \delta\varepsilon_{\text{ст}}\, dV}{\frac{d(\varepsilon\omega^2)}{d\omega} \int |\mathbf{E}_0|^2\, dV}. \tag{2}$$

§ 91. Распространение электромагнитных волн в волноводах

В отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе резонаторов, имеющих конечный объем, волновод представляет собой полость неограниченной длины — бесконечно длинную полую трубу [1]. В то время как собственные колебания в резонаторе представляют собой стоячие волны, в волноводе волна является стоячей лишь в поперечных направлениях, а в направлении вдоль длины трубы возможно распространение бегущих волн.

Рассмотрим прямолинейный волновод с произвольной (односвязной) формой поперечного сечения, неизменной вдоль его длины. Будем считать сначала, что стенки волновода являются идеально проводящими. Направление длины волновода выберем в качестве оси z. В волне, бегущей вдоль оси z, зависимость всех величин от z дается множителем вида $\exp(ik_z z)$ с постоянным k_z.

Все возможные в таком волноводе электромагнитные волны можно разбить на два типа: в одном из них $H_z = 0$, а в другом $E_z = 0$ (*Rayleigh*, 1897). Волны первого типа, с чисто поперечным магнитным полем, называют *волнами электрического типа* или *E-волнами*. Волны же с чисто поперечным электрическим полем называют *волнами магнитного типа* или *H-волнами* [2].

Рассмотрим сначала E-волны; x- и y-компоненты уравнений (90.1) дают

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y = \frac{i\omega}{c} H_x, \quad -\frac{\partial E_z}{\partial x} + ik_z E_x = \frac{i\omega}{c} H_y,$$
$$ik_z H_y = \frac{i\omega}{c} E_x, \quad ik_z H_x = -\frac{i\omega}{c} E_y.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, & E_y &= \frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= -\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, & H_y &= \frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{aligned} \tag{91.1}$$

[1] Ниже мы пишем все формулы для пустого волновода. Переход к формулам для волновода, заполненного непоглощающим диэлектриком, осуществляется преобразованием (90.9).

[2] E- и H-волны называют также соответственно TM- и TE- (поперечно-магнитными и поперечно-электрическими) волнами.

где введено обозначение

$$\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2.$$

Таким образом, в E-волне все поперечные компоненты **E** и **H** могут быть выражены через продольную компоненту электрического поля. Последняя же должна быть определена путем решения волнового уравнения, сводящегося к двумерному уравнению

$$\Delta_2 E_z + \varkappa^2 E_z = 0 \tag{91.2}$$

(Δ_2 — двумерный оператор Лапласа). Граничные условия к этому уравнению заключаются в обращении в нуль касательных составляющих **E** на стенке волновода. Для этого достаточно потребовать

$$E_z = 0 \quad \text{на контуре сечения.} \tag{91.3}$$

Согласно формулам (91.1) двумерный вектор с составляющими E_x, E_y пропорционален двумерному градиенту величины E_z. Поэтому при выполнении условия (91.3) автоматически обратится в нуль также и тангенциальная составляющая **E** в плоскости xy.

Аналогичным образом, в H-волне поперечные составляющие **E** и **H** могут быть выражены через продольную компоненту магнитного поля согласно формулам

$$\begin{gathered} H_x = \frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_y = \frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ E_x = \frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}. \end{gathered} \tag{91.4}$$

Продольное же поле H_z дается решениями уравнения

$$\Delta_2 H_z + \varkappa^2 H_z = 0 \tag{91.5}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \quad \text{на контуре сечения.} \tag{91.6}$$

Это условие обеспечивает согласно формулам (91.4) обращение в нуль нормальной компоненты **H**.

Таким образом, задача об определении электромагнитного поля в волноводе сводится к нахождению решений двумерного волнового уравнения вида $\Delta_2 f + \varkappa^2 f = 0$ с граничным условием $f = 0$ или $\partial f/\partial n = 0$ на контуре сечения. Для заданного контура такие решения имеются лишь при вполне определенных собственных значениях параметра $\varkappa^2$.

Каждому собственному значению $\varkappa^2$ соответствует своя зависимость

$$\omega^2 = c^2(k_z^2 + \varkappa^2) \tag{91.7}$$

между частотой ω и волновым вектором k_z. Скорость распространения волны вдоль длины волновода дается производной

$$u_z = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{k_z^2 + \varkappa^2}} = \frac{c^2 k_z}{\omega}. \tag{91.8}$$

При заданном $\varkappa$ она пробегает значения от 0 до c, когда k_z меняется от 0 до ∞.

Средняя (по времени) плотность потока энергии вдоль длины волновода дается z-компонентой вектора Пойнтинга. Простое вычисление с помощью формул (91.1) дает для E-волны

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}\{[\mathbf{EH}^*]_z\} = \frac{\omega k_z}{8\pi\varkappa^4} |\nabla_2 E_z|^2.$$

Полный поток энергии q получается путем интегрирования $\overline{S}_z$ по площади сечения волновода. Имеем

$$\int |\nabla_2 E_z|^2 \, df = \oint E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} \, dl - \int E_z^* \Delta_2 E_z \, df.$$

Первый интеграл берется по контуру сечения и обращается в нуль в силу граничного условия $E_z = 0$. Во втором же интеграле заменяем $\Delta_2 E_z$ на $-\varkappa^2 E_z$ и окончательно получаем

$$q = \frac{\omega k_z}{8\pi\varkappa^2} \int |E_z|^2 \, df. \tag{91.9}$$

Для H-волны получается такое же выражение с H_z вместо E_z.

Аналогичным образом можно вычислить плотность электромагнитной энергии W (отнесенную к единице длины волновода). Проще, однако, получить W непосредственно из q, поскольку должно быть $q = W u_z$. Так из (91.8) и (91.9) получим

$$W = \frac{\omega^2}{8\pi\varkappa^2 c^2} \int |E_z|^2 \, df. \tag{91.10}$$

Из (91.7) следует, что для каждого типа волн (соответствующих определенному значению $\varkappa^2$) существует минимальное возможное значение частоты, равное $c\varkappa$. При меньших частотах распространение данного типа волн становится невозможным. Но среди всех собственных значений $\varkappa$ есть наименьшее, $\varkappa_{\min}$, тоже отличное от нуля (см. ниже). Поэтому мы приходим к выводу, что существует нижняя граница частот, $\omega_{\min} = c\varkappa_{\min}$, за которой вообще невозможно распространение вдоль волновода каких бы то ни было волн. По порядку величины $\omega_{\min} \sim c/a$, где a — поперечные размеры трубы.

Это утверждение, однако, справедливо лишь для волноводов с односвязной формой сечения, которые мы до сих пор и имели в виду. Положение совершенно меняется при многосвязной форме сечения [1]). В таких волноводах, наряду с описанными выше E- и H-волнами, оказывается возможным распространение еще одного типа волн, частота которых не ограничена никакими условиями.

Этот тип волн — так называемая *главная волна* — характеризуется тем, что $k_z = \pm k$ (т. е. $\varkappa = 0$); скорость ее распространения совпадает со скоростью света c. Выясним основные свойства этой волны; одновременно мы увидим, почему этот тип волн невозможен при односвязной форме сечения волновода.

Все компоненты поля в главной волне удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа $\Delta_2 f = 0$. При граничном условии $f = 0$ единственное решение этого уравнения, регулярное во всей области (одно- или многосвязной), есть $f \equiv 0$. Поэтому в главной волне $E_z = 0$.

При граничном же условии $\partial f/\partial n = 0$ регулярное решение $f = \text{const}$. Легко, однако, видеть, что для $f = H_z$ эта const может быть только нулем (напомним, что const означает величину, не зависящую от x, y). Действительно, проинтегрировав уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{i\omega}{c} H_z = 0$$

по площади сечения, получаем

$$\oint H_n\, dl + \frac{i\omega}{c}\int H_z\, df = 0;$$

ввиду равенства $H_n = 0$ на контуре сечения и постоянства H_z по его площади отсюда следует, что $H_z = 0$.

Таким образом, главная волна чисто поперечна. При $E_z = H_z = 0$ x- и y-компоненты уравнений (90.1) дают

$$H_x = -E_z, \quad H_y = E_x, \tag{91.11}$$

т. е. поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны и равны друг другу по величине. Для определения этих полей имеем уравнения

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (\operatorname{rot}\mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

с граничным условием $\mathbf{E}_t = 0$.

Мы видим, что зависимость $\mathbf{E}$ (а с ним и $\mathbf{H}$) от x, y дается решением двумерной электростатической задачи: $\mathbf{E} = -\nabla_2\varphi$, где потенциал φ удовлетворяет уравнению $\Delta_2\varphi = 0$ с граничным

[1]) Речь может идти как о пространстве между двумя вставленными одна в другую трубами, так и о пространстве вне двух параллельных проводов.

условием $\varphi = \mathrm{const}$. В односвязной области это граничное условие приводит к $\varphi = \mathrm{const}$ (а потому $\mathbf{E} = 0$) как единственному решению, регулярному во всей области. Тем самым доказывается невозможность распространения этого типа волн по волноводам с односвязным сечением. В многосвязной же области значение const в граничном условии не обязано быть одним и тем же на различных граничных контурах, и тогда уравнение Лапласа имеет нетривиальные решения. При этом распределение электрического поля в поперечном сечении волновода соответствует плоскому электростатическому полю между обкладками конденсатора, находящимися при заданной разности потенциалов.

До сих пор мы предполагали стенки волновода идеально проводящими[1]). Наличие же у стенки малого, но все же конечного импеданса приводит к появлению потерь и тем самым к затуханию волны при ее распространении вдоль волновода. Коэффициент затухания может быть вычислен аналогично тому, как в предыдущем параграфе было вычислено затухание со временем электромагнитных колебаний в резонаторе.

Количество энергии, диссипируемой в 1 с в стенках волновода (отнесенное к единице его длины), дается интегралом

$$\frac{c}{8\pi}\zeta' \oint |\mathbf{H}|^2\, dl,$$

взятым по контуру сечения; $\mathbf{H}$ есть магнитное поле, вычисленное в предположении $\zeta = 0$. Разделив эту величину на удвоенный поток энергии q вдоль волновода, мы получим искомый коэффициент затухания α. При таком определении α дает скорость затухания амплитуды волны, убывающей вдоль длины волновода, как $e^{-\alpha z}$.

Выражая все величины через E_z или H_z согласно формулам (91.1) или (91.4), получим следующие формулы для коэффициента поглощения E-волны:

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{2\varkappa^2 k_z c}\,\frac{\oint |\nabla_2 E_z|^2\, dl}{\int |E_z|^2\, df}, \tag{91.12}$$

и для H-волны:

$$\alpha = \frac{c\varkappa^2\zeta'}{2k_z\omega}\,\frac{\oint \{|H_z|^2 + (k_z^2/\varkappa^4)|\nabla_2 H_z|^2\}\, dl}{\int |H_z|^2\, df}. \tag{91.13}$$

Для фактического вычисления может оказаться удобным преобразовать стоящие в знаменателях поверхностные интегралы в интегралы по контуру. Приведем получающиеся таким образом

---

[1]) В частности, лишь при этом условии вообще возможно строгое разделение на волны с $E_z = 0$ и волны с $H_z = 0$.

формулы, вывод которых аналогичен выводу формулы (90.8):

$$\int |E_z|^2\,df = \frac{1}{2\varkappa^2}\oint (\mathbf{nr})|\nabla_2 E_z|^2\,dl,$$
$$\int |H_z|^2\,df = \frac{1}{2\varkappa^2}\oint (\mathbf{nr})\{\varkappa^2|H_z|^2 - |\nabla_2 H_z|^2\}\,dl. \tag{91.14}$$

Когда $k_z \to 0$ (т. е. частота $\omega \to c\varkappa$), выражения (91.12), (91.13) стремятся к бесконечности. При этом, однако, эти формулы перестают быть применимыми, так как их вывод предполагает малость $\varkappa$ по сравнению с k_z.

Формулы (91.12), (91.13) не относятся к главной волне (в волноводе с многосвязным сечением), в которой равны нулю все величины E_z, H_z и $\varkappa$. В этом случае можно выразить все компоненты поля через скалярный потенциал φ. Учитывая взаимную перпендикулярность и равенство по величине полей $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E} = -\nabla_2\varphi$ в главной волне, получим для ее коэффициента поглощения следующее выражение:

$$\alpha = \frac{\zeta'\oint |\nabla_2\varphi|^2\,dl}{2\int |\nabla_2\varphi|^2\,df}. \tag{91.15}$$

Распространение главной волны вдоль волновода может быть сравнительно просто рассмотрено и в тех случаях, когда ее коэффициент поглощения не мал (так что формула (91.15) неприменима), если при этом длина волны c/ω велика по сравнению с поперечными размерами волновода.

Как было указано выше, поперечное электрическое поле в главной волне (в каждый момент времени) соответствует электростатическому полю в конденсаторе, образованном стенками волновода, заряженными равными и противоположными зарядами. Обозначим эти заряды, отнесенные к единице длины волновода, через $\pm e(z)$. Они связаны с токами $\pm J(z)$, текущими по стенкам волновода, уравнением непрерывности

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial z},$$

или, для монохроматического поля,

$$i\omega e = \frac{\partial J}{\partial z}.$$

Пусть, далее, C — емкость единицы длины волновода. «Разность потенциалов» между его стенками $\varphi_2 - \varphi_1 = e/C$; дифференцируя ее по z, мы получим ЭДС, поддерживающую протекание тока по стенкам (напомним, что при наличии поглощения поле не является чисто поперечным). Приравняв ее ZJ (Z — импеданс единицы длины волновода), получим

$$-\frac{\partial}{\partial z}\frac{e}{C} = ZJ,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial J}{\partial z}\right) + i\omega Z J = 0. \tag{91.16}$$

Подставив сюда $Z = R - i\omega L/c^2$ (где R и L — сопротивление и самоиндукция единицы длины волновода), мы можем перейти от монохроматических компонент тока обратно к произвольной функции времени. Предполагая также емкость C постоянной вдоль длины волновода, получим так называемое *телеграфное уравнение*:

$$\frac{1}{C}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - R\frac{\partial J}{\partial t} - \frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0. \tag{91.17}$$

В отсутствие поглощения ($R = 0$) это уравнение, как и должно быть, сводится к волновому уравнению со скоростью распространения волн, равной $c/\sqrt{LC} = c$. Равенство $LC = 1$ следует из математической эквивалентности задач об определении $1/C$ и L при заданной форме контуров. Электрическое и магнитное поля между поверхностями идеальных проводников перпендикулярны по направлению и равны по величине (см. (91.11)), причем значение последней на самих поверхностях определяет в первом случае плотность зарядов, а во втором случае — плотность токов. Поэтому совпадают и коэффициенты пропорциональности ($1/C$ и L) между энергией поля и квадратами соответственно заряда или тока.

Задачи

1. Найти значения $\varkappa$ для волн, распространяющихся по волноводу прямоугольного сечения (длины сторон a, b). Найти коэффициенты затухания этих волн.

Решение. В E-волнах[1]

$$E_z = \text{const}\cdot\sin k_x x \sin k_y y,$$

где

$$k_x = \frac{n_1\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n_2\pi}{b},$$

а n_1, n_2 — целые числа, начиная от единицы. В H-волнах

$$H_z = \text{const}\cdot\cos k_x x \cos k_y y,$$

причем одно из чисел n_1, n_2 может быть равно нулю. В обоих типах волн

$$\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right).$$

Наименьшее значение $\varkappa$ соответствует волне H_{10} (индексы указывают значения n_1, n_2) и равно $\varkappa_{\min} = \pi/a$ (полагаем, что $a > b$).

[1]) Множитель $\exp\{i(k_z z - \omega t)\}$ везде опускаем.

Коэффициенты затухания вычисляются по формулам (91.12), (91.13) и равны: для E-волн

$$\alpha = \frac{2\omega\zeta'}{c\varkappa^2 k_z ab}(k_x^2 b + k_y^2 a),$$

для волн $H_{n_1 0}$

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{ck_z ab}\left(a + \frac{2\varkappa^2}{k^2}b\right)$$

и для волн $H_{n_1 n_2}$ $(n_1,\ n_2 \neq 0)$

$$\alpha = \frac{2c\varkappa^2\zeta'}{\omega k_z ab}\left[a + b + \frac{k_z^2}{\varkappa^4}(ak_x^2 + bk_y^2)\right].$$

2. То же для волновода кругового сечения (радиуса a).

Р е ш е н и е. Решая волновое уравнение в полярных координатах r, φ, получим в E-волнах

$$E_z = \text{const} \cdot J_n(\varkappa r) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\varphi,$$

с условием $J_n(\varkappa a) = 0$, определяющим значения $\varkappa$. В H-волнах такая же формула дает H_z, а значения $\varkappa$ определяются условием $J_n'(\varkappa a) = 0$. Наименьшим значением $\varkappa$ обладает первая из волн H_1; оно равно $\varkappa_{\min} = 1{,}84/a$.

Коэффициенты затухания вычисляются по формулам (91.12)–(91.14) и равны: для E-волн

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{cak_z},$$

а для H-волн

$$\alpha = \frac{c\varkappa^2\zeta'}{\omega k_z a}\left[1 + \frac{n^2\omega^2}{c^2\varkappa^2(a^2\varkappa^2 - n^2)}\right].$$

§ 92. Рассеяние электромагнитных волн на малых частицах

Рассмотрим рассеяние электромагнитных волн на макроскопических частицах, размеры которых малы по сравнению с длиной рассеиваемой волны $\lambda \sim c/\omega$ (*Rayleigh*, 1871). При выполнении этого условия электромагнитное поле вблизи частицы можно считать однородным. Находясь в однородном периодическом поле, частица приобретает определенные электрический и магнитный моменты $\mathscr{P}$ и $\mathscr{M}$, зависимость которых от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$. Рассеянная волна может быть описана как результат излучения этими переменными моментами. На больших (по сравнению с λ) расстояниях R от частицы в волновой зоне поле рассеянной волны дается формулами (см. II, § 71):

$$\mathbf{H}' = \frac{\omega^2}{c^2 R}\{[\mathbf{n}\mathscr{P}] + [\mathbf{n}[\mathscr{M}\mathbf{n}]]\}, \quad \mathbf{E}' = [\mathbf{H}'\mathbf{n}], \tag{92.1}$$

где единичный вектор $\mathbf{n}$ указывает направление рассеяния, а значения $\mathscr{P}$ и $\mathscr{M}$ должны быть взяты в момент времени $t - R/c$;

поле рассеянной волны будем обозначать буквами со штрихом, а поле падающей волны — буквами без штриха. Средняя (по времени) интенсивность излучения, рассеянного в телесный угол do, равна

$$dI = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{4\pi}|\mathbf{H}'|^2 R^2\, do,$$

а разделив на плотность потока энергии в падающей волне

$$\frac{c}{8\pi}|\mathbf{H}|^2 = \frac{c}{8\pi}|\mathbf{E}|^2,$$

получим *сечение рассеяния*.

Вычисление $\mathscr{P}$ и $\mathscr{M}$ особенно просто, если размеры частицы малы не только по сравнению с λ, но и по сравнению с «длиной волны» δ, соответствующей частоте ω в веществе частицы. В этом случае можно вычислять поляризуемость частицы по формулам, относящимся к внешнему однородному статическому полю, разумеется, с той разницей, что для ε и μ берутся не статические значения, а значения, соответствующие данной частоте ω. Если, как это обычно имеет место, μ близко к единице, то в формуле (92.1) можно опустить магнитно-дипольный член.

Так, для сферической частицы радиуса a имеем (см. (8.10))

$$\mathscr{P} = V\alpha\mathbf{E}, \quad \alpha = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \tag{92.2}$$

и сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{\omega^4}{c^4}|\alpha|^2 V^2 \sin^2\theta\, do, \tag{92.3}$$

где θ — угол между направлением $\mathbf{n}$ рассеяния и направлением электрического поля $\mathbf{E}$ линейно поляризованной падающей волны. Полное сечение

$$\sigma = \frac{8\pi|\alpha|^2\omega^4 V^2}{3c^4}. \tag{92.4}$$

Зависимость сечения от частоты заключена как в множителе ω^4, так и в поляризуемости. Если частоты настолько малы, что дисперсия α отсутствует, то рассеяние пропорционально ω^4. Отметим также, что сечение рассеяния пропорционально квадрату объема частицы.

Если падающая волна не поляризована (естественный свет), то для получения дифференциального сечения надо усреднить (92.3) по всем направлениям вектора $\mathbf{E}$ в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения падающей волны (т. е. к ее волновому вектору $\mathbf{k}$). Обозначив через ϑ и φ полярный угол и азимут направления $\mathbf{n}$ по отношению к $\mathbf{k}$ (причем φ отсчитываем от плоскости $\mathbf{kE}$), имеем $\cos\theta = \sin\vartheta\cos\varphi$ (рис. 47),

так что

$$d\sigma = \frac{\omega^4}{c^4}|\alpha|^2 V^2 (1 - \sin^2\vartheta\cos^2\varphi)\, do. \qquad (92.5)$$

Усреднив по φ, получим следующую формулу для сечения рассеяния неполяризованной волны:

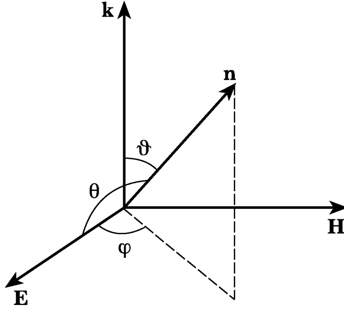


Рис. 47

$$d\sigma = \frac{\omega^4}{2c^4}V^2|\alpha|^2(1+\cos^2\vartheta)\, do, \quad (92.6)$$

где ϑ — угол между направлениями падения и рассеяния. Обратим внимание на симметрию углового распределения (92.6) относительно плоскости $\vartheta = \pi/2$: рассеяния вперед и назад одинаковы.

Из формулы (92.5) легко найти также степень деполяризации рассеянного света. Для этого замечаем, что при заданном направлении **E** направление **E**$'$ лежит в плоскости **En**. Поэтому направление электрического поля **E**$'$ в рассеянной волне будет лежать в плоскости **kn** (плоскость рассеяния) или перпендикулярно к ней соответственно в случаях, когда азимут вектора **E** по отношению к плоскости **kn** равен $\varphi = 0$ или $\pi/2$. Пусть $I_{\parallel}$ и $I_{\perp}$ — интенсивности рассеяния с этими двумя поляризациями; степень деполяризации определяется как отношение меньшей из этих величин к большей. Согласно (92.5) получим

$$I_{\parallel}/I_{\perp} = \cos^2\vartheta. \qquad (92.7)$$

Если рассеивающая частица обладает большой диэлектрической проницаемостью, то $\delta \sim c/\omega\sqrt{|\varepsilon|} \ll \lambda$. Размеры частицы могут при этом быть малыми по сравнению с λ и в то же время не малыми по сравнению с δ. В первом приближении по $1/\varepsilon$ электрический момент частицы можно при этом вычислять просто как момент проводника ($\varepsilon \to \infty$) в однородном постоянном внешнем поле. При вычислении же магнитного момента в этих условиях существенны возникающие в частице индукционные токи и задача не сводится к статической; вместо этого надо искать решение уравнения (83.2)

$$\Delta\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{H} = 0 \qquad (92.8)$$

(полагаем $\mu = 1$), обращающееся вдали от частицы в поле падающей волны. Магнитный и электрический моменты оказываются при этом одного порядка величины, и в формуле (92.1) должны быть сохранены оба члена. Угловое распределение и величина рассеяния при этом существенно меняются по сравнению с рассмотренным выше случаем (см. задачу 2).

Задачи

1. Линейно поляризованный свет рассеивается на хаотически ориентированных малых частицах, имеющих три различных главных значения тензора электрической поляризуемости. Определить коэффициент деполяризации рассеянного света.

Решение. Пренебрегая, как и в тексте, магнитным моментом, имеем из (92.1)

$$\mathbf{E}' = \frac{\omega^2}{c^2 R}[[\mathbf{n}\boldsymbol{\mathscr{P}}]\mathbf{n}].$$

Искомый коэффициент деполяризации дается отношением главных значений двумерного тензора

$$I_{\alpha\beta} = \langle E'_\alpha E'^*_\beta \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по ориентациям рассеивающей частицы при заданном направлении рассеяния $\mathbf{n}$, а индексы α и β пробегают два значения в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{n}$ (см. II, § 50). Удобнее, однако, усреднить трехмерный тензор $\mathscr{P}_i \mathscr{P}^*_k$, после чего спроецировать его на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{n}$; эти компоненты тензора $\langle \mathscr{P}_i \mathscr{P}^*_k \rangle$ пропорциональны соответствующим компонентам $I_{\alpha\beta}$.

Подставив $\mathscr{P}_i = \alpha_{ik} E_k$, имеем

$$\langle \mathscr{P}_i \mathscr{P}^*_k \rangle = \langle \alpha_{il} \alpha^*_{km} \rangle E_l E^*_m.$$

Для проведения усреднения пользуемся формулой

$$\langle \alpha_{il} \alpha^*_{km} \rangle = A\delta_{il}\delta_{km} + B(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{kl}).$$

Это есть наиболее общий вид тензора четвертого ранга, симметричного по парам индексов il и km и содержащего лишь скалярные постоянные. Последние определяются из двух равенств, получающихся путем упрощения тензора один раз по парам $i = l$, $k = m$, а другой раз — по $i = k$, $l = m$; они равны

$$A = \frac{1}{15}(2\alpha_{ii}\alpha^*_{kk} + \alpha_{ik}\alpha^*_{ik}), \quad B = \frac{1}{30}(3\alpha_{ik}\alpha^*_{ik} - \alpha_{ii}\alpha^*_{kk}).$$

В линейно поляризованной волне амплитуда поля $\mathbf{E}$ (временно́й множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем) всегда может быть определена как вещественная величина. Тогда получим

$$\langle \mathscr{P}_i \mathscr{P}^*_k \rangle = (A + B)E_i E_k + BE^2\delta_{ik}. \tag{1}$$

Пусть ось z направлена вдоль $\mathbf{n}$, а плоскость xz проходит через векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{E}$; эти оси являются главными осями тензора $I_{\alpha\beta}$. Взяв соответствующие компоненты тензора (1), получим коэффициент деполяризации

$$\frac{I_y}{I_x} = \frac{B}{(A+B)\sin^2\theta + B}$$

(θ — угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$).

2. Определить сечение рассеяния на шарике (радиуса a), обладающем большим ε; предполагается, что $\lambda \gg a \sim \delta$.

Решение. Задача о вычислении магнитного момента, приобретаемого в переменном магнитном поле $\mathbf{H}$ шариком с данным значением ε (и $\mu = 1$), совпадает с решенной в § 59 (задача 1), с той лишь разницей, что в

полученных там формулах надо положить $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$. Поэтому имеем

$$\mathscr{M} = -a^3\gamma\mathbf{H}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{ka}\operatorname{ctg} ka - \frac{3}{(ka)^2}\right).$$

Отметим, что при $|ka| \ll 1$: $\gamma \approx -(ka)^2/30$, а при $|ka| \gg 1$ имеем $\operatorname{ctg} ka \to \to -i$, $\gamma \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3i}{ka}\right)$.

Электрический же момент вычисляется в первом приближении по $1/\varepsilon$ просто как момент проводящего ($\varepsilon \to \infty$) шара в постоянном однородном электрическом поле:

$$\mathscr{P} = a^3\mathbf{E}.$$

Учитывая взаимную перпендикулярность $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, получим после простого вычисления с помощью (92.1) следующую формулу для сечения рассеяния:

$$d\sigma = \frac{a^6\omega^4}{c^4}[|\gamma|^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - (\gamma+\gamma^*)\cos\vartheta + \\ + \cos^2\vartheta(\cos^2\varphi + |\gamma|^2\sin^2\varphi)]\,do,$$

где φ и ϑ — углы, показанные на рис. 47. При рассеянии неполяризованного света

$$d\sigma = \frac{a^6\omega^4}{c^4}\left[\frac{1}{2}(1+|\gamma|^2)(1+\cos^2\vartheta) - (\gamma+\gamma^*)\cos\vartheta\right]do,$$

а степень деполяризации рассеянного света

$$\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = \left|\frac{\gamma - \cos\vartheta}{1 - \gamma\cos\vartheta}\right|^2.$$

Полное сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi a^6\omega^4}{3c^4}(1+|\gamma|^2).$$

В пределе $ka \to \infty$ (т. е. когда $\lambda \gg a \gg \delta$) имеем $\gamma = 1/2$; этот предел соответствует рассеянию на идеально отражающем шарике, в глубь которого вообще не проникают ни электрическое, ни магнитное поля. Для дифференциального сечения рассеяния имеем

$$d\sigma = \frac{5a^6\omega^4}{8c^4}\left(1 + \cos^2\vartheta - \frac{8}{5}\cos\vartheta\right)do.$$

Обратим внимание на резкую асимметрию углового распределения относительно плоскости $\vartheta = \pi/2$: рассеяние происходит в основном назад (отношение интенсивности света, рассеянного вперед, к интенсивности рассеяния назад составляет 1 : 9).

§ 93. Поглощение электромагнитных волн на малых частицах

Рассеяние электромагнитных волн сопровождается одновременным их поглощением на частицах. Сечение этого процесса дается отношением средней диссипируемой (в 1 с) в частице энергии Q к плотности падающего потока энергии. Для вычис-

ления Q можно при этом воспользоваться формулой

$$Q = -\overline{\dot{\mathscr{P}}\mathfrak{E}} - \overline{\dot{\mathscr{M}}\mathfrak{H}}, \tag{93.1}$$

где $\mathscr{P}$ и $\mathscr{M}$ — полные электрический и магнитный моменты частицы, а роль внешних полей $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ играют электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{H}$ поля рассеиваемой волны (ср. (59.11)).

Пользуясь комплексным представлением величин, пишем (см. примеч. на стр. 300)

$$Q = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\mathscr{P}\dot{\mathbf{E}}^* + \mathscr{M}\dot{\mathbf{H}}^*\} = \frac{\omega}{2}V(\alpha_e'' + \alpha_m'')|\mathbf{E}|^2,$$

где α_e, α_m — электрическая и магнитная поляризуемости частицы. Разделив на падающий поток энергии, получим

$$\sigma = \frac{4\pi\omega}{c}(\alpha_e'' + \alpha_m'')V. \tag{93.2}$$

Применим эту формулу к поглощению на шарике радиуса a ($a \ll \lambda$), предполагая его вещество немагнитным ($\mu = 1$). Характер поглощения существенно зависит от величины диэлектрической проницаемости.

Если ε невелико, то наряду с $a \ll \lambda$ имеем также и $a \ll \delta$. В этом случае магнитной поляризуемостью можно пренебречь по сравнению с электрической. Взяв последнюю из (92.2), получим

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3\varepsilon''}{c[(\varepsilon' + 2)^2 + \varepsilon''^2]}. \tag{93.3}$$

Если же $|\varepsilon| \gg 1$, то электрическая часть поглощения становится малой и магнитное поглощение может стать существенным, даже если все еще $\delta \gg a$. При $\delta \gg a$ (т. е. $|ka| \ll 1$) магнитная поляризуемость (см. задачу 2 § 92)

$$\alpha_m = \frac{(ka)^2}{40\pi} = \frac{a^2\omega^2\varepsilon}{40\pi c^2}$$

и сечение поглощения

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3\varepsilon''}{c}\left(\frac{1}{|\varepsilon|^2} + \frac{\omega^2 a^2}{90c^2}\right). \tag{93.4}$$

При дальнейшем увеличении ε электрическая часть поглощения становится малой по сравнению с магнитной. В предельном случае $\delta \ll a$ (т. е. $|ka| \gg 1$) имеем

$$\alpha_m = -\frac{3}{8\pi}\left(1 - \frac{3i}{ka}\right) = -\frac{3}{8\pi}\left(1 - \frac{3ic}{\omega a}\zeta\right),$$

где $\zeta = 1/\sqrt{\varepsilon}$ — поверхностный импеданс шарика. Отсюда

$$\sigma = 6\pi a^2\zeta'. \tag{93.5}$$

Заметим, что эту формулу можно было бы получить и более прямым путем, без использования общего выражения для магнитной поляризуемости шарика $\alpha_m(\omega)$. При малом ζ диссипация энергии Q может быть вычислена интегрированием среднего вектора Пойнтинга (87.4) по поверхности шарика, причем распределение магнитного поля на поверхности дается решением (54.3) задачи о сверхпроводящем ($\zeta = 0$) шаре в однородном магнитном поле.

Зная сечение поглощения шариком, можно непосредственно определить интенсивность испускаемого им самим теплового излучения. Согласно закону Кирхгофа (см. V, § 63) интенсивность dI (в интервале частот $d\omega$) выражается через $\sigma(\omega)$ формулой

$$dI = 4\pi c\sigma(\omega)e_0(\omega)\,d\omega, \tag{93.6}$$

где

$$e_0(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3c^3(e^{\hbar\omega/T} - 1)}$$

— спектральная плотность черного излучения, отнесенная к единице объема и к единичному интервалу телесных углов.

§ 94. Дифракция на клине

Обычная приближенная теория дифракции (см. II, § 59–61) основана на предположении о малости отклонений от геометрической оптики. Тем самым предполагается, во-первых, что все размеры велики по сравнению с длиной волны; это относится как к размерам тел (экранов) или отверстий в них, так и к расстояниям от тел до точек испускания и наблюдения света. Во-вторых, рассматриваются лишь малые углы дифракции, т. е. распределение света по направлениям, близким к направлению границы геометрической тени. В этих условиях конкретные оптические свойства вещества тел вообще несущественны; существен лишь самый факт непрозрачности экранов.

Если же указанные условия не выполнены, то решение задачи дифракции требует точного решения волнового уравнения с учетом соответствующих граничных условий на поверхности тел, зависящих от их конкретных свойств. Нахождение таких решений представляет исключительные математические трудности и произведено лишь для сравнительно небольшого числа задач. При этом обычно делается определенное упрощающее предположение о свойствах тела, на котором происходит дифракция: оно предполагается идеально проводящим (и тем самым, с оптической точки зрения, идеально отражающим).

Отметим в этой связи следующее обстоятельство. Могло бы показаться естественным решать задачу дифракции, предполагая поверхность тела «черной», т. е. полностью поглощающей

падающий на нее свет. В действительности, однако, в постановке точной задачи дифракции такое предположение о свойствах тела было бы внутренне противоречивым. Дело в том, что если само вещество тела является сильно поглощающим, то коэффициент отражения от его поверхности не мал, а, напротив, близок к единице (см. § 87). Поэтому осуществление близкого к нулю коэффициента отражения требует слабо поглощающего вещества, но зато достаточно большой (по сравнению с длиной волны) толщины тела. В точной же теории дифракции неизбежно играют существенную роль участки поверхности тела вблизи (на расстояниях порядка длины волны) его края; но толщина тела вблизи его края во всяком случае мала, так что предположение о его «черноте» здесь заведомо не будет справедливым.

Существенный теоретический интерес представляет точное решение задачи о дифракции света от края идеально проводящего клина, ограниченного двумя пересекающимися полуплоскостями (*A. Sommerfeld*, 1894). Полное изложение этой сложной математической теории, требующей применения особых математических приемов, выходит за рамки настоящей книги. Мы изложим здесь для справочных целей лишь окончательные результаты [1]).

Выберем край клина за ось z цилиндрической системы координат r, φ, z. Передней поверхности клина (OA на рис. 48) соответствует $\varphi = 0$, а задней (OB) $\varphi = \gamma$, где $2\pi - \gamma$ — угол раствора клина; области вне клина соответствуют углы $0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma$. Пусть плоская монохроматическая волна с равной единице амплитудой падает в плоскости $r\varphi$ на переднюю поверхность клина под углом φ_0 к ней (ввиду симметрии клина достаточно рассматривать значения $\varphi_0 < \gamma/2$). Будем различать два независимых случая поляризации падающей (а с нею и дифрагированной) волны: когда краю клина (оси z) параллелен вектор $\mathbf{E}$ или вектор $\mathbf{H}$. Буквой u обозначается в этих случаях соответственно E_z или H_z.

Электромагнитное поле во всем пространстве дается тогда формулой (временно́й множитель $e^{-i\omega t}$ везде опускаем)

$$u(r, \varphi) = v(r, \varphi - \varphi_0) \mp v(r, \varphi + \varphi_0), \tag{94.1}$$

где верхний и нижний знаки отвечают соответственно поляризациям с $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ вдоль оси z, а функция $v(r, \psi)$ определяется

[1]) Подробное проведение вычислений можно найти в книгах: *Зоммерфельд А.* Оптика. — М.: ИЛ, 1953; *Франк Ф.* и *Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. — М.: ОНТИ, 1937, ч. 2, гл. XX. Другой метод решения, принадлежащий *М.И. Конторовичу* и *Н.Н. Лебедеву*, изложен в книге: *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Изд-во. АН СССР, 1948, гл. XXII.

комплексным интегралом

$$v(r,\psi) = \frac{1}{2\gamma}\int\limits_C e^{-ikr\cos\zeta}\frac{d\zeta}{1 - e^{-i\pi(\zeta+\psi)/\gamma}} \tag{94.2}$$

$(k = \omega/c)$. Путь интегрирования $C = C_1 + C_2$ в плоскости ζ состоит из двух петель (рис. 49). Концы этих петель уходят на бесконечность в тех частях плоскости ζ (заштрихованных на рис. 49), в которых $\operatorname{Im}(\cos\zeta) < 0$, и потому множитель $\exp(-ikr\cos\zeta)$ стремится к нулю на бесконечности. Подынтегральное выраже-

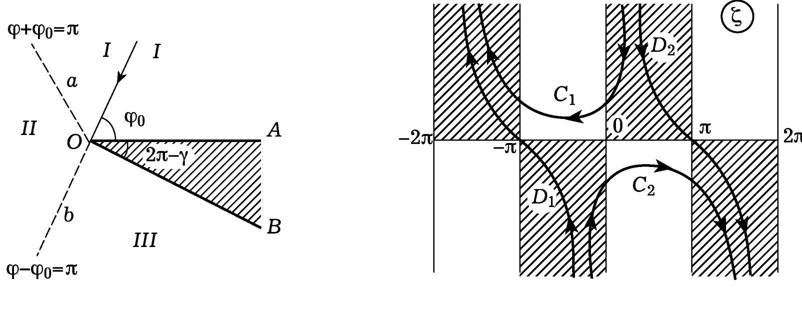


Рис. 48 Рис. 49

ние в (94.2) имеет полюсы, лежащие на вещественной оси ζ в точках $\zeta = -\psi + 2n\gamma$, где n — целые числа. Вместо пути C можно производить интегрирование по пути $D = D_1 + D_2$ (рис. 49), добавив к интегралу вычеты подынтегрального выражения в полюсах, расположенных на отрезке $-\pi \leqslant \zeta \leqslant \pi$, если таковые имеются. Представим v в виде

$$v(r,\psi) = v_0(r,\psi) + v_d(r,\psi), \tag{94.3}$$

где v_d — интеграл (94.2), взятый по пути D, а v_0 — вклад, происходящий от вычетов в указанных полюсах. От каждого полюса возникает в v_0 член, равный

$$\exp\left[-ikr\cos(\psi - 2n\gamma)\right],$$

изображающий собой либо падающую волну, либо одну из волн, отраженных от поверхности клина по законам геометрической оптики. Функция же v_d описывает собственно дифракционное искажение волн. Наибольший интерес представляет поле на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от края клина.

При $kr \gg 1$ справедлива асимптотическая формула [1])

$$v_d(r,\psi) = \frac{\pi}{\gamma\sqrt{2\pi kr}} e^{i(kr+\pi/4)} \frac{\sin(\pi^2/\gamma)}{\cos(\pi^2/\gamma) - \cos(\pi\psi/\gamma)}, \tag{94.4}$$

если только угол ψ удовлетворяет условию

$$\left(\cos\frac{\pi^2}{\gamma} - \cos\frac{\pi\psi}{\gamma}\right)^2 \gg \frac{1}{kr}. \tag{94.5}$$

Зависимость функции v_d, а с нею и поля

$$u_d(r,\varphi) = v_d(r,\varphi-\varphi_0) \mp v_d(r,\varphi+\varphi_0)$$

от r дается множителем $e^{ikr}/\sqrt{r}$, т. е. это поле имеет характер цилиндрической волны, как бы излучаемой краем клина.

В написанном виде формулы (94.1)–(94.5) справедливы при любых значениях углов γ и φ_0. Более подробное обсуждение этих формул мы для определенности произведем при таком соотношении между углами γ и φ_0 ($\gamma > \pi + \varphi_0$), которое приводит, с точки зрения геометрической оптики, к возникновению двух границ: границы Ob полной тени (область *III* на рис. 48) и границы Oa «тени» волны, отраженной от поверхности OA. На рис. 48 $\varphi_0 < \pi/2$; если же $\varphi_0 > \pi/2$, то граница Oa лежит справа от направления падающей волны. При $\gamma < \pi+\varphi_0$ область полной тени вообще отсутствует, а отражение (одно- или даже многократное) происходит от обеих сторон клина.

В областях *I*, *II*, *III* функция

$$u_0(r,\varphi) = v_0(r,\varphi-\varphi_0) \mp v_0(r,\varphi+\varphi_0)$$

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\text{в области } I \ u_0 = \exp[-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)] \mp \exp[-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)], \\ &\text{в области } II \ u_0 = \exp[-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)], \\ &\text{в области } III \ u_0 = 0. \end{aligned} \tag{94.6}$$

Эти выражения, не обращающиеся в нуль при $kr \to \infty$, описывают не искаженные дифракцией падающую (в области *II*) или совокупность падающей и отраженной (в области *I*) волн. Дифракционное же искажение поля дается формулой (94.4), но условие (94.5) нарушается при значениях ψ, слишком близких к π (когда разность $|\psi-\pi|$ перестает быть малой по сравнению с $1/\sqrt{kr}$).

Значения $\psi = \pi$ соответствуют геометрическим границам тени; при $\psi = \varphi - \varphi_0$ это есть граница полной тени, а при $\psi = \varphi + \varphi_0$ — граница тени отраженной волны. В непосредственной

[1]) Следующие члены этого асимптотического разложения — см. *Pauli W.* // Phys. Rev. 1938. V. 54. P. 924.

близости этих значений надо применять другое асимптотическое выражение, справедливость которого требует лишь соблюдения неравенства $|\psi-\pi| \ll 1$. Это условие вместе с условием $kr \gg 1$ как раз обеспечивает применимость обычной приближенной теории дифракции Френеля. В соответствии с этим, вблизи границы Ob полной тени получается следующее асимптотическое выражение:

$$u(r,\varphi) = \exp\left[-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)\right]\frac{1-i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2}\,d\eta, \qquad w = -(\varphi-\varphi_0-\pi)\sqrt{kr/2}. \tag{94.7}$$

Аналогично вблизи границы Oa тени отраженной волны

$$u(r,\varphi) = \exp\left[-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)\right] + \exp\left[-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)\right]\frac{1-i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2}\,d\eta, \qquad w = -\,(\varphi+\varphi_0-\pi)\sqrt{kr/2}. \tag{94.8}$$

В этом приближении дифракционная картина не зависит от направления поляризации волны и от угла раствора клина.

Области применимости формул (94.4) и (94.7), (94.8) частично перекрываются. Так, вблизи границы полной тени совместная область применимости дается неравенствами

$$1 \gg |\varphi-\varphi_0-\pi| \gg \frac{1}{\sqrt{kr}},$$

и в ней

$$u(r,\varphi) = u_0(r,\varphi) + \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}\,\frac{1}{\varphi-\varphi_0-\pi} \tag{94.9}$$

(с u_0 из (94.6)). Из (94.7) это выражение получается с помощью известных асимптотических формул для интеграла Френеля при больших $|w|$:

$$\int\limits_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2}\,d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2iw}e^{iw^2} \quad \text{при} \quad w>0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2}\,d\eta = \frac{1}{2iw}e^{iw^2} \quad \text{при} \quad w<0.$$

§ 95. Дифракция на плоском экране

Точная формула (94.2) для дифракции на клине может быть приведена к сравнительно простому виду в частном случае дифракции на полуплоскости (чему соответствует $\gamma = 2\pi$). Именно,

комплексный интеграл в (94.2) может быть сведен к интегралу Френеля:

$$v(r,\psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i(kr\cos\psi + \pi/4)} \int\limits_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2}\, d\eta, \qquad w = \sqrt{2kr}\cos\frac{\psi}{2}. \tag{95.1}$$

Эта формула справедлива при любых значениях r и ψ. При $kr \gg 1$ и углах $|\psi - \pi| \gg 1/\sqrt{kr}$ пригодно асимптотическое выражение

$$v_d(r,\psi) = -e^{i(kr+\pi/4)} \frac{1}{2\sqrt{2\pi kr}\cos(\psi/2)} \tag{95.2}$$

(формула (94.4) с $\gamma = 2\pi$).

С помощью формулы (95.2) может быть получено в замкнутом виде решение задачи о дифракции на плоском идеально проводящем экране любой формы. При этом предполагается лишь, что размеры экранов и расстояния до них велики по сравнению с длиной волны, а углы дифракции не слишком малы (причем эта область перекрывается с областью малых углов, в которой применимы обычные формулы дифракции Френеля). Результат выражается в виде интеграла по контуру края экрана, аналогично тому, как в обычной приближенной теории дифракционное поле выражается в виде интеграла по поверхности, закрывающей отверстие в экране. Мы не станем останавливаться здесь на этих вычислениях.

В точной теории дифракции на плоских идеально проводящих экранах можно высказать теорему (принадлежащую *Л.И. Мандельштаму* и *М.А. Леонтовичу*), в известном смысле аналогичную теореме Бабинэ в приближенной теории дифракции.

Рассмотрим плоский экран с отверстием произвольной формы; выберем плоскость экрана в качестве плоскости $z = 0$, и пусть электромагнитная волна падает со стороны $z < 0$. Пусть $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ — суммарное поле падающей волны и волны, отраженной от экрана (так, как если бы отверстие отсутствовало); будем представлять его продолженным по другую сторону от экрана ($z > 0$). Поскольку $H_z = 0$, $\mathbf{E}_t = 0$ при $z = 0$ (в силу граничных условий на идеально проводящей поверхности), то значения $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ при $z > 0$ и $z < 0$ будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned} E_{0z}(x,y,z) &= E_{0z}(x,y,-z), \quad & \mathbf{E}_{0t}(x,y,z) &= -\mathbf{E}_{0t}(x,y,-z), \\ H_{0z}(x,y,z) &= -H_{0z}(x,y,-z), \quad & \mathbf{H}_{0t}(x,y,z) &= \mathbf{H}_{0t}(x,y,-z). \end{aligned} \tag{95.3}$$

Пусть, далее, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ — поле, которое получилось бы при помещении в поле $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ плоской пластинки, по форме, величине и положению совпадающей с отверстием в экране и обладающей

магнитной проницаемостью $\mu = \infty$. Тогда решение дифракционной задачи на отверстие в экране дается выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}') \quad \text{при } z < 0, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}'), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}') \quad \text{при } z > 0. \end{aligned} \tag{95.4}$$

Для доказательства этого утверждения замечаем, что поле $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ обладает той же симметрией (выражаемой формулами (95.3)), что и поле $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$. Поэтому на плоскости $z = 0$ оно удовлетворяет условиям

$$\mathbf{E}'_t = 0, \quad H'_z = 0 \quad \text{вне отверстия},$$
$$\mathbf{E}'_{t1} = -\mathbf{E}'_{t2}, \quad H'_{z1} = -H'_{z2} \quad \text{на отверстии}$$

(индексы 1 и 2 соответствуют $z \to \pm 0$). Кроме того, оно удовлетворяет условиям

$$E'_z = 0, \quad \mathbf{H}'_t = 0 \text{ на отверстии},$$

так как граничные условия на поверхности тела с $\mu = \infty$ обратны (в смысле замены **E**, **H** на **H**, **E**) условиям на идеально проводящей ($\varepsilon = \infty$) поверхности. Отсюда ясно, что поле (95.4) удовлетворяет необходимым условиям $\mathbf{E}_t = 0$, $H_z = 0$ на поверхности экрана ($z \to -0$) вне отверстия и непрерывно на отверстии. Наконец, поскольку поле $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ стремится на бесконечности к $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$, то поле (95.4) стремится к $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ при $z \to -\infty$ и к нулю при $z \to +\infty$. Тем самым оно удовлетворяет всем условиям поставленной дифракционной задачи, и теорема доказана.

Таким образом, задача о дифракции на отверстии в экране с $\varepsilon = \infty$ эквивалентна задаче о дифракции на дополнительном экране с $\mu = \infty$.

Задачи

1. Плоская монохроматическая волна падает нормально на прорезанную в идеально проводящем плоском экране щель ширины $2a$, большой по сравнению с длиной волны. Определить распределение интенсивности света за щелью на больших расстояниях от нее для больших углов дифракции.

Решение. При $a \gg \lambda$ дифракционное поле за щелью можно рассматривать как наложение полей, происходящих от независимой дифракции на каждом из двух краев щели и определяющихся с помощью асимптотической формулы (95.2) [1]). Когда расстояния $AP = r_1$ и $BP = r_2$ от краев щели до точки наблюдения (рис. 50) велики по сравнению с a, в множителях e^{ikr_1} и e^{ikr_2} пишем:

$$r_1 = r - a\sin\chi, \quad r_2 = r_1 + a\sin\chi;$$

[1]) Это предположение становится, однако, несправедливым при углах дифракции, достаточно близких к $\pi/2$ (при $\pi/2 - \chi \lesssim 1/\sqrt{ka}$).

во всех же других местах полагаем $r_1 \approx r_2 \approx r$, а все углы между AP, OP, BP и осью z — равными одному и тому же углу дифракции χ.

В результате получаем

$$u = \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} \left[\frac{\sin(ka\sin\chi)}{\sin(\chi/2)} \pm i\frac{\cos(ka\sin\chi)}{\cos(\chi/2)} \right].$$

Отсюда интенсивность света, дифрагировавшего в интервал углов $d\chi$ (отнесенная к полной интенсивности падающего на щель света):

$$dI = \frac{1}{4\pi ak}\left\{\left[\frac{\sin(ak\sin\chi)}{\sin(\chi/2)}\right]^2 + \left[\frac{\cos(ak\sin\chi)}{\cos(\chi/2)}\right]^2\right\} d\chi =$$

$$= \frac{ak}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin(ak\sin\chi)}{ak\sin\chi}\right]^2 \cos\chi + \left[2ak\cos\frac{\chi}{2}\right]^{-2}\right\} d\chi.$$

При малых χ это выражение переходит в формулу для дифракции Фраунгофера на щели:

$$dI = \frac{1}{\pi ak}\frac{\sin^2(ak\chi)}{\chi^2}\, d\chi.$$

2. Плоская волна падает на идеально проводящую плоскость с круглым отверстием радиуса a, малого по сравнению с длиной волны. Определить интенсивность дифрагированного света, прошедшего через отверстие (*Rayleigh*, 1897).

Р е ш е н и е. Согласно изложенному в тексте, данная задача приводится к задаче о дифракции на круглой пластинке с $\mu = \infty$, а поскольку $a \ll \lambda$, то мы имеем дело с рассеянием на малой частице. Согласно § 92 для решения задачи о таком рассеянии надо определить статические электрическую и магнитную поляризуемости диска. Поле $\mathbf{E}_0$ перпендикулярно к плоскости диска, а граничное условие $E'_z = 0$ формально совпадает с условием, которое имело бы место в электростатике на поверхности тела с $\varepsilon = 0$. Поле же $\mathbf{H}_0$ параллельно диску, а граничное условие $\mathbf{H}'_t = 0$ соответствует магнитостатической задаче с $\mu = \infty$. Поэтому электрический и магнитный моменты диска (см. задачу 4 § 4 и задачу к § 54):

$$\mathscr{P} = -\frac{2a^3}{3\pi}\mathbf{E}_0, \quad \mathscr{M} = \frac{4a^3}{3\pi}\mathbf{H}_0.$$

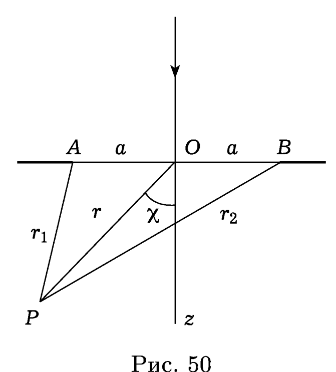


Рис. 50

При переходе к задаче о дифракции на отверстии эти выражения надо умножить, в соответствии с формулами (95.4), на 1/2 и затем подставить в формулу рассеяния (92.1).

Таким образом, интенсивность дифрагированного излучения в телесном угле do[1])

$$dI = \frac{c}{4\pi}\frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4}\{[\mathbf{n}\mathbf{E}_0] - 2[\mathbf{n}[\mathbf{H}_0\mathbf{n}]]\}^2\, do =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4}\{[\mathbf{n}\mathbf{E}_0]^2 + 4[\mathbf{n}\mathbf{H}_0]^2 + 4\mathbf{n}[\mathbf{H}_0\mathbf{E}_0]\}\, do.$$

---

[1]) Множители $e^{-i\omega t}$ предполагаем опущенными, так что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ вещественны.

Полная интенсивность дифракции получается интегрированием по полусфере и равна

$$I = \frac{\omega^4 a^6}{27\pi^2 c^3}(E_0^2 + 4H_0^2).$$

Сечение дифракции определим как отношение интенсивности дифрагированного излучения к плотности потока энергии в падающей волне ($cE^2/(4\pi)$; буквы без индекса относятся к полю падающей волны). Различаем два случая поляризации падающей волны:

а) вектор **E** в падающей волне перпендикулярен к плоскости падения (плоскости xz), т. е. параллелен плоскости экрана (плоскость xy). Сумма полей падающей и отраженной волн у поверхности экрана

$$E_0 = 0, \quad H_{0x} = 2H\cos\alpha = 2E\cos\alpha$$

(α — угол падения). Отсюда

$$d\sigma = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2 c^4}\cos^2\alpha\cdot(1 - \sin^2\vartheta\cos^2\varphi)\,do.$$

Здесь ϑ — угол между направлением дифракции **n** и нормалью к экрану (ось z), а φ — азимут вектора **n** по отношению к плоскости падения. Полное сечение

$$\sigma = \frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4}\cos^2\alpha.$$

б) вектор **E** в плоскости падения. Тогда

$$E = E_{0z} = -2E\sin\alpha, \; H_0 = H_{0y} = 2H = 2E.$$

Дифференциальное сечение

$$d\sigma = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2 c^4}\left\{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\left(\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right) - \sin\vartheta\sin\alpha\cos\varphi\right\}do,$$

полное сечение

$$\sigma = \frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right).$$

Для естественного света имеем

$$\sigma = \frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4}\left(1 - \frac{3}{8}\sin^2\alpha\right).$$

Г Л А В А XI

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

§ 96. Диэлектрическая проницаемость кристаллов

Свойства анизотропной среды по отношению к электромагнитным волнам определяются тензорами $\varepsilon_{ik}(\omega)$ и $\mu_{ik}(\omega)$, устанавливающими связь между индукцией и напряженностью согласно формулам [1])

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega)E_k, \quad B_i = \mu_{ik}(\omega)H_k. \tag{96.1}$$

Ниже мы для определенности говорим об электрическом поле и тензоре ε_{ik}; все получаемые результаты полностью справедливы и для тензора μ_{ik}.

При $\omega \to 0$ величины ε_{ik} принимают свои статические значения, для которых в § 13 была доказана симметричность по индексам i, k. Это доказательство имело чисто термодинамический характер и поэтому относилось лишь к термодинамически равновесным состояниям. В переменном же поле состояние вещества, разумеется, не равновесно, и потому указанное доказательство неприменимо. Для выяснения свойств тензора ε_{ik} надо теперь обратиться к обобщенному принципу симметрии кинетических коэффициентов (см. V, § 125).

Напомним, что фигурирующие в формулировке этого принципа обобщенные восприимчивости $\alpha_{ab}(\omega)$ определяются по отклику системы на возмущение вида

$$\widehat{V} = -\widehat{x}_\alpha f_a(t)$$

(где x_a — ряд величин, характеризующих систему) и представляют собой коэффициенты в линейной связи между фурье-компонентами средних значений $\overline{x}_a(t)$ и обобщенных сил $f_a(t)$:

$$\overline{x}_{a\omega} = \alpha_{ab}(\omega) f_{b\omega}.$$

Изменение энергии системы со временем под влиянием возмущения выражается формулой

$$\dot{\mathscr{U}} = -\dot{f}_a \overline{x}_a.$$

[1]) Напомним, что все величины относятся к переменному полю в волне. Возможное же наличие постоянной индукции (в пироэлектрическом или ферромагнитном кристалле) не имеет отношения к рассматриваемым здесь вопросам.

Согласно принципу симметрии,

$$\alpha_{ab}(\omega) = \alpha_{ba}(\omega),$$

если система не находится во внешнем магнитном поле и не обладает магнитной структурой; в противном случае $\alpha_{ab}(\omega)$ надо взять для «обращенной по времени» системы.

Легко связать компоненты тензора $\varepsilon_{ik}(\omega)$ с обобщенными восприимчивостями. Для этого замечаем, что скорость изменения энергии диэлектрического тела в переменном электрическом поле дается интегралом

$$\int \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,dV. \tag{96.2}$$

Сравнив с написанными выше формулами, мы видим, что если выбрать в качестве величин $\overline{x}_a$ значения компонент вектора $\mathbf{E}$ в каждой точке тела, то соответствующими величинами f_a будут компоненты $\mathbf{D}$ (причем индекс a пробегает непрерывный ряд значений, нумеруя как компоненты векторов, так и точки тела). Роль коэффициентов α_{ab} будут играть компоненты тензора ε^{-1}_{ik}; но все свойства симметрии обратного и прямого тензоров, разумеется, совпадают. Поскольку в интеграле (96.2) перемножаются значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ лишь в одинаковых точках тела, то перестановка индексов a и b фактически сводится к перестановке только тензорных индексов. Таким образом, мы приходим к выводу, что тензор ε_{ik} симметричен [1]):

$$\varepsilon_{ik}(\omega) = \varepsilon_{ki}(\omega). \tag{96.3}$$

Заметим, что под определение обобщенных восприимчивостей подпадают также и компоненты тензора поляризуемости тела как целого, т. е. коэффициенты в равенствах

$$\mathscr{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k.$$

Действительно, изменение энергии тела, внесенного во внешнее переменное поле $\mathfrak{E}$, дается формулой

$$-\mathscr{P}\frac{d\mathfrak{E}}{dt}. \tag{96.4}$$

Отсюда видно, что если величинами x_a являются три компоненты вектора $\mathscr{P}$, то соответствующими величинами f_a будут компоненты вектора $\mathfrak{E}$, так что коэффициенты α_{ab} совпадают с $V\alpha_{ik}$.

[1]) Свойства тензора ε_{ik} при наличии внешнего магнитного поля будут рассмотрены в § 101.

Ряд формул, полученных ранее для изотропной среды, непосредственно обобщается на анизотропный случай. Повторив произведенный в § 80 вывод, найдем, что диссипация энергии в монохроматическом электромагнитном поле дается формулой

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi}\{(\varepsilon_{ik}^* - \varepsilon_{ki})E_iE_k^* + (\mu_{ik}^* - \mu_{ki})H_iH_k^*\}, \tag{96.5}$$

аналогичной формуле (80.5). Условие же отсутствия поглощения состоит в равенстве $\varepsilon_{ik}^* = \varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$, т. е. в вещественности всех ε_{ik} (и то же самое для μ_{ik}).

В отсутствие поглощения может быть определена, как было показано в § 80, электромагнитная внутренняя энергия единицы объема тела. Для анизотропной среды она дается формулой

$$\overline{U} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon_{ik})E_iE_k^* + \frac{d}{d\omega}(\omega\mu_{ik})H_iH_k^*\right\}, \tag{96.6}$$

аналогичной (80.11).

В § 87 было введено понятие о поверхностном импедансе ζ, с помощью которого могут быть сформулированы граничные условия на поверхности металла даже в тех случаях, когда понятие диэлектрической проницаемости теряет смысл. На поверхности анизотропного тела граничное условие, аналогичное (87.6), должно быть написано в виде

$$E_\alpha = \zeta_{\alpha\beta}[\mathbf{Hn}]_\beta, \tag{96.7}$$

где $\zeta_{\alpha\beta}(\omega)$ — двумерный тензор на поверхности тела. Следует иметь в виду, что значения этого тензора, вообще говоря, зависят и от кристаллографического направления грани кристалла.

Поток энергии, втекающий внутрь тела, есть

$$\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]\mathbf{n} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}[\mathbf{Hn}] \equiv \frac{c}{4\pi}E_\alpha[\mathbf{Hn}]_\alpha$$

(здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ вещественны). Отсюда видно, что если при применении принципа выбрать в качестве величин x_a компоненты E_α, то соответствующими f_a будут $-[\mathbf{Hn}]_\alpha$, т. е. (возвращаясь к комплексному представлению) величинами f_a будут $-(i/\omega)[\mathbf{Hn}]_\alpha$. Поэтому коэффициенты α_{ab} совпадают, с точностью до множителя, с компонентами $\zeta_{\alpha\beta}$, и мы приходим к выводу, что

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\beta\alpha} \tag{96.8}$$

(в отсутствие внешнего магнитного поля).

Задача

Выразить компоненты тензора $\zeta_{\alpha\beta}$ через компоненты тензора $\eta_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ (предполагая, что последний существует); тело немагнитно ($\mu_{ik} = \delta_{ik}$).

Решение. В анизотропном случае равенство (87.2) $\zeta^2 = 1/\varepsilon$ заменится следующим:

$$\zeta_{\alpha\gamma}\zeta_{\gamma\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

В компонентах:

$$\zeta_{11}^2 + \zeta_{12}\zeta_{21} = \eta_{11}, \qquad \zeta_{22}^2 + \zeta_{12}\zeta_{21} = \eta_{22},$$
$$\zeta_{12}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) = \eta_{12}, \quad \zeta_{21}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) = \eta_{21}.$$

Решение этих уравнений:

$$\zeta_{12} = \eta_{12}/\xi, \qquad \zeta_{21} = \eta_{21}/\xi,$$
$$\zeta_{11} = \frac{1}{\xi}[\eta_{11} \pm \sqrt{\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}}\,], \quad \zeta_{22} = \frac{1}{\xi}[\eta_{22} \pm \sqrt{\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}}\,]$$
$$(\xi^2 = \eta_{11} + \eta_{22} \pm 2\sqrt{\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}}).$$

Выбор знаков определяется условием положительности поглощения энергии. Мы не предполагаем равенства $\zeta_{12} = \zeta_{21}$, допуская тем самым также и применение к случаю наличия внешнего магнитного поля.

§ 97. Плоская волна в анизотропной среде

При изучении оптики анизотропных тел — кристаллов — мы ограничимся наиболее важным случаем, когда среду можно считать (в данной области частот) немагнитной и прозрачной. В соответствии с этим связь между напряженностями и индукциями электрического и магнитного полей дается равенствами

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \tag{97.1}$$

причем все компоненты диэлектрического тензора ε_{ik} вещественны, а его главные значения положительны.

Уравнения Максвелла для поля монохроматической волны гласят:

$$i\omega\mathbf{H} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \quad i\omega\mathbf{D} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}. \tag{97.2}$$

В плоской волне, распространяющейся в прозрачной среде, все величины пропорциональны $e^{i\mathbf{kr}}$ с вещественным волновым вектором $\mathbf{k}$. Произведя дифференцирование по координатам, получим

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{H} = [\mathbf{kE}], \quad \frac{\omega}{c}\mathbf{D} = -[\mathbf{kH}]. \tag{97.3}$$

Отсюда прежде всего видно, что три вектора $\mathbf{k}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны. Кроме того, вектор $\mathbf{H}$ перпендикулярен к $\mathbf{E}$. Поскольку вектор $\mathbf{H}$ перпендикулярен одновременно к трем векторам $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{k}$, то последние лежат в одной плоскости.

На рис. 51 иллюстрируется взаимное расположение всех векторов. По отношению к направлению волнового вектора поперечны **D** и **H**, но не **E**. На рисунке указано также направление потока энергии **S** в волне. Оно определяется векторным произведением [**EH**], т. е. перпендикулярно к **E** и **H**. В отличие от волны в изотропной среде, здесь направление потока энергии не совпадает с направлением волнового вектора. Очевидно, что вектор **S** компланарен с векторами **E**, **D**, **k** и составляет с вектором **k** угол, равный углу между **E** и **D**.

Выделим из абсолютной величины вектора **k** множитель ω/c и будем писать

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}. \qquad (97.4)$$

Рис. 51

Абсолютная величина определенного таким образом вектора **n** в анизотропной среде зависит от его направления, в отличие от изотропной среды, в которой $n = \sqrt{\varepsilon}$ зависит только от частоты[1]). С помощью обозначения (97.4) основные формулы (97.3) напишутся в виде

$$\mathbf{H} = [\mathbf{nE}], \quad \mathbf{D} = -[\mathbf{nH}]. \qquad (97.5)$$

Выпишем также выражение для вектора потока энергии в плоской волне:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] = \frac{c}{4\pi}\{\mathbf{n}E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{En})\} \qquad (97.6)$$

(в этой формуле **E** и **H** вещественны).

До сих пор мы не использовали еще соотношения (97.1), содержащего материальные константы ε_{ik}. Совместное использование этого соотношения и уравнений (97.5) позволяет определить зависимость $\omega(\mathbf{k})$.

Подставив первую из формул (97.5) во вторую, получим

$$\mathbf{D} = [\mathbf{n}[\mathbf{En}]] = n^2\mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{nE}). \qquad (97.7)$$

Если приравнять компоненты этого вектора выражениям $\varepsilon_{ik}E_k$ согласно (97.1), мы получим три однородных линейных уравнения для трех составляющих вектора **E**:

$$n^2E_i - n_in_kE_k = \varepsilon_{ik}E_k$$

или

$$(n^2\delta_{ik} - n_in_k - \varepsilon_{ik})E_k = 0. \qquad (97.8)$$

[1]) О величине n и здесь принято говорить как о показателе преломления, хотя она теперь не имеет такого простого отношения к закону преломления, как в изотропных телах.

Условие совместности этих уравнений требует обращения в нуль определителя, составленного из их коэффициентов:

$$\det |n^2\delta_{ik} - n_i n_k - \varepsilon_{ik}| = 0. \tag{97.9}$$

Фактическое вычисление этого определителя удобно производить, воспользовавшись в качестве декартовых осей координат x, y, z главными осями тензора ε_{ik} (называемыми в этой связи *главными диэлектрическими осями*). Главные значения тензора обозначим через $\varepsilon^{(x)}$, $\varepsilon^{(y)}$, $\varepsilon^{(z)}$. Простое вычисление приводит к следующему уравнению:

$$n^2(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2)-[n_x^2\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)})+n_y^2\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)})+ \\ + n_z^2\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)})] + \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)} = 0. \tag{97.10}$$

Отметим, что старшие члены (шестой степени по n_i) при раскрытии взаимно сокращаются; это обстоятельство, разумеется, не случайно и связано в конечном счете с тем, что волна имеет всего два, а не три независимых направления поляризации.

Уравнение (97.10) — так называемое *уравнение Френеля* — одно из основных уравнений кристаллооптики[1]). Оно определяет в неявном виде закон дисперсии, т. е. зависимость между частотой и волновым вектором (функциями частоты являются главные значения $\varepsilon^{(i)}$, а в некоторых случаях — см. § 99 — также и направления главных осей тензора ε_{ik}). Обычно при рассмотрении монохроматических волн частота, а с нею и все $\varepsilon^{(i)}$ являются заданными постоянными величинами, и тогда уравнение (97.10) определяет абсолютную величину волнового вектора по его направлению. При заданном направлении **n** (97.10) есть квадратное уравнение для n^2 с вещественными коэффициентами. Поэтому каждому направлению **n** соответствуют в общем случае два различных абсолютных значения волнового вектора.

Уравнение (97.10) (с постоянными коэффициентами $\varepsilon^{(i)}$) определяет в координатах n_x, n_y, n_z некоторую поверхность — *поверхность волновых векторов*[2]). В общем случае это есть поверхность четвертого порядка; ее подробное исследование будет произведено в следующих параграфах. Здесь же мы укажем лишь некоторые ее важные общие свойства.

[1]) Основы кристаллооптики были заложены *Френелем* (*A. Fresnel*) в 1820-х годах, исходя из механических аналогий, задолго до построения электромагнитной теории.

[2]) Используемое в литературе другое построение — *поверхность нормалей* (или *поверхность индексов*), получающаяся путем откладывания вдоль каждого направления отрезка $1/n$ (вместо n), — представляется менее удобным.

Предварительно введем еще одну величину, характеризующую свет, распространяющийся в анизотропной среде. Направление световых лучей (в геометрической оптике) определяется вектором групповой скорости $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$. В изотропной среде его направление всегда совпадает с направлением волнового вектора; в анизотропной же среде это, вообще говоря, не так. Для характеристики лучей введем вектор $\mathbf{s}$, по направлению совпадающий с групповой скоростью, а по абсолютной величине определяющийся равенством

$$\mathbf{ns} = 1. \tag{97.11}$$

Будем называть $\mathbf{s}$ *лучевым вектором*. Смысл этой величины выясняется следующим образом.

Рассмотрим пучок лучей (с одинаковой частотой), распространяющихся во все стороны из некоторого центра. Значение эйконала ψ (совпадающего с точностью до множителя ω/c с фазой волны; см. § 85) в каждой точке луча дается интегралом $\int \mathbf{n}\,d\mathbf{l}$, взятым вдоль луча. Введя вектор $\mathbf{s}$, определяющий направление луча, напишем

$$\psi = \int \mathbf{n}\,d\mathbf{l} = \int \frac{\mathbf{ns}}{s}\,dl = \int \frac{dl}{s}. \tag{97.12}$$

В однородной среде s постоянно вдоль луча, так что $\psi = L/s$, где L — длина данного отрезка луча. Отсюда видно, что если вдоль каждого радиуса, выходящего из центра пучка лучей, отложить отрезок, равный (или пропорциональный) s, то мы получим поверхность, во всех точках которой лучи имеют одинаковую фазу. Эту поверхность называют *лучевой*.

Введенные таким образом поверхность волновых векторов и лучевая поверхность находятся в определенном взаимном отношении друг с другом. Напишем уравнение поверхности волновых векторов условно в виде $f(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Тогда групповая скорость

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = -\frac{\partial f}{\partial\mathbf{k}}\Big/\frac{\partial f}{\partial\omega}, \tag{97.13}$$

т. е. пропорциональна вектору $\partial f/\partial\mathbf{k}$ или, что то же (поскольку производная берется при постоянном ω), — вектору $\partial f/\partial\mathbf{n}$. Ему же, следовательно, пропорционален лучевой вектор. Но вектор $\partial f/\partial\mathbf{n}$ направлен по нормали к поверхности $f = 0$.

Таким образом, мы приходим к результату, что направление лучевого вектора волны с заданным значением $\mathbf{n}$ определяется нормалью к соответствующей точке поверхности волновых векторов.

Легко видеть, что справедливо и обратное утверждение: нормали к лучевой поверхности определяют направления соответствующих волновых векторов. Действительно, перпендикуляр-

ность $\mathbf{s}$ к поверхности волновых векторов выражается соотношением

$$\mathbf{s}\delta\mathbf{n} = 0,$$

где $\delta\mathbf{n}$ — любое бесконечно малое изменение $\mathbf{n}$ (при заданном ω), т. е. вектор бесконечно малого смещения поверхности. Но, дифференцируя (тоже при заданном ω) равенство $\mathbf{ns} = 1$, получим $\mathbf{n}\delta\mathbf{s} + \mathbf{s}\delta\mathbf{n} = 0$, откуда видно, что и

$$\mathbf{n}\delta\mathbf{s} = 0,$$

чем и доказывается сделанное утверждение.

Описанная связь между поверхностями $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ может быть еще уточнена. Пусть $\mathbf{n}_0$ есть радиус-вектор какой-либо точки поверхности волновых векторов, а $\mathbf{s}_0$ — соответствующий ей лучевой вектор; напишем уравнение (в координатах n_x, n_y, n_z) касательной в этой точке плоскости. Это есть

$$\mathbf{s}_0(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) = 0,$$

чем выражается перпендикулярность $\mathbf{s}_0$ к любому вектору $\mathbf{n} - \mathbf{n}_0$, лежащему в данной плоскости. Поскольку $\mathbf{s}_0$ и $\mathbf{n}_0$ связаны соотношением $\mathbf{s}_0\mathbf{n}_0 = 1$, то это уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{s}_0\mathbf{n} = 1. \tag{97.14}$$

Отсюда видно, что $1/s_0$ есть длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, касательную к поверхности волновых векторов в точке $\mathbf{n}_0$.

Обратно: если к некоторой точке $\mathbf{s}_0$ лучевой поверхности построена касательная плоскость, то длина перпендикуляра, опущенного (из начала координат) на эту плоскость, равна $1/n_0$.

Выясним расположение лучевого вектора по отношению к векторам напряженности поля в волне. Для этого замечаем, что направление групповой скорости совпадает с направлением среднего (по времени) вектора потока энергии. Действительно, рассмотрим волновой пакет, заключенный в малом участке пространства. При перемещении пакета сосредоточенная в нем энергия перемещается вместе с ним, а это и значит, что направление ее потока совпадает с направлением скорости пакета, т. е. групповой скорости. Совпадение направлений групповой скорости и вектора Пойнтинга можно доказать также и непосредственно из формул (97.5). Дифференцируя эти формулы (при заданном ω), получим

$$\delta\mathbf{D} = [\delta\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}] + [\mathbf{H}\delta\mathbf{n}], \quad \delta\mathbf{H} = [\mathbf{n}\delta\mathbf{E}] + [\delta\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}]. \tag{97.15}$$

Умножим первое равенство скалярно на $\mathbf{E}$, а второе на $\mathbf{H}$; с учетом (97.5) имеем

$$\mathbf{E}\delta\mathbf{D} = \mathbf{H}\delta\mathbf{H} + [\mathbf{EH}]\delta\mathbf{n}, \quad \mathbf{H}\delta\mathbf{H} = \mathbf{D}\delta\mathbf{E} + [\mathbf{EH}]\delta\mathbf{n}.$$

Но $\mathbf{D}\delta\mathbf{E} = \varepsilon_{ik}E_k\delta E_i = \mathbf{E}\delta\mathbf{D}$; поэтому, складывая оба равенства, получим

$$[\mathbf{EH}]\delta\mathbf{n} = 0, \tag{97.16}$$

т. е. вектор $[\mathbf{EH}]$ нормален поверхности волновых векторов, что и требовалось доказать [1]).

Поскольку вектор Пойнтинга перпендикулярен $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, то то же самое относится и к вектору $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{sH} = 0, \quad \mathbf{sE} = 0. \tag{97.17}$$

Непосредственное вычисление с помощью формул (97.5), (97.11) и (97.17) приводит к соотношениям

$$\mathbf{H} = [\mathbf{sD}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{sH}]. \tag{97.18}$$

Так,

$$[\mathbf{sH}] = [\mathbf{s}[\mathbf{nE}]] = \mathbf{n}(\mathbf{sE}) - \mathbf{E}(\mathbf{ns}) = -\mathbf{E}.$$

Если сравнить формулы (97.18) с формулами (97.5), то мы увидим, что они получаются друг из друга заменой

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{D}, \quad \mathbf{n} \leftrightarrow \mathbf{s}, \quad \varepsilon_{ik} \leftrightarrow \varepsilon^{-1}_{ik} \tag{97.19}$$

(причем не нарушается, разумеется, и соотношение $\mathbf{ns} = 1$). Последняя из этих трех замен должна быть введена для того, чтобы не нарушалась также и связь (97.1) между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$. Таким образом, можно высказать следующее правило, полезное при различных вычислениях: если имеется какое-либо уравнение, справедливое для одного ряда перечисленных величин, то замена (97.19) приводит к правильному аналогичному уравнению для другого ряда величин.

В частности, применив это правило к уравнению (97.10), сразу же получим аналогичное уравнение для вектора $\mathbf{s}$:

$$s^2(\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}s_x^2 + \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(z)}s_y^2 + \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}s_z^2) -$$
$$- [s_x^2(\varepsilon^{(y)} + \varepsilon^{(z)}) + s_y^2(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(z)}) + s_z^2(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)})] + 1 = 0. \tag{97.20}$$

Этим уравнением определяется форма лучевой поверхности. Как и поверхность волновых векторов, это есть поверхность четвертого порядка. При заданном направлении $\mathbf{s}$ (97.20) дает квадратное уравнение для s^2, имеющее в общем случае два различных

[1]) Полученный таким образом результат относится к мгновенному (а не только к среднему) значению потока энергии. Однако в приведенном доказательстве существенным образом использована симметричность тензора ε_{ik}. Поэтому в таком виде результат не будет справедлив для сред с несимметричным ε_{ik} (гиротропные среды — см. § 101). Утверждение же для среднего значения вектора Пойнтинга справедливо и в этом случае (задача 1 к § 101).

вещественных корня. Таким образом, вдоль каждого направления в кристалле могут распространяться два луча с различными волновыми векторами.

Перейдем к вопросу о характере поляризации волн, распространяющихся в анизотропной среде. Уравнения (97.8), из которых было получено уравнение Френеля, для этой цели неудобны, так как в них входит напряженность **E**, в то время как поперечной в волне (по отношению к заданному **n**) является индукция **D**. Для того чтобы с самого начала учесть поперечность вектора **D**, выберем временно новую систему координат, одна из осей которой направлена вдоль волнового вектора волны. Две же поперечные оси будем отмечать греческими индексами, пробегающими значения 1, 2. Поперечные составляющие равенства (97.7) дают $D_\alpha = n^2 E_\alpha$; подставив сюда $E_\alpha = \varepsilon^{-1}_{\alpha\beta} D_\beta$ (где $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$ — компонента тензора, обратного тензору $\varepsilon_{\alpha\beta}$), получим

$$(n^{-2}\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}) D_\beta = 0. \qquad (97.21)$$

Условие совместности этих двух ($\alpha = 1, 2$) уравнений с двумя неизвестными D_1, D_2 заключается в равенстве нулю их определителя:

$$\det |n^{-2}\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}| = 0. \qquad (97.22)$$

Это условие совпадает, разумеется, с написанным в исходной системе координат x, y, z уравнением Френеля. Мы видим теперь, однако, что соответствующие двум значениям n векторы **D** направлены вдоль главных осей двумерного симметричного тензора второго ранга $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$. Согласно общим теоремам отсюда следует, что эти векторы взаимно перпендикулярны. Таким образом, в двух волнах с одинаковым направлением волнового вектора векторы электрической индукции линейно поляризованы в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

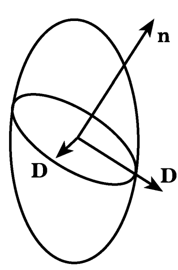


Рис. 52

Уравнения (97.21) допускают простую геометрическую интерпретацию. Построим в системе координат x, y, z (снова возвращаемся к главным диэлектрическим осям) тензорный эллипсоид, соответствующий тензору ε^{-1}_{ik}, т. е. поверхность

$$\varepsilon^{-1}_{ik} x_i x_k = \frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}} = 1 \qquad (97.23)$$

(рис. 52). Пересечем эллипсоид плоскостью, проходящей через его центр и перпендикулярной к заданному направлению **n**. Фигурой сечения будет в общем случае эллипс; длины его главных осей определяют значения n, а их направления — соответствующие направления колебаний (векторы **D**).

Из этого построения (в общем случае различных $\varepsilon^{(x)}$, $\varepsilon^{(y)}$, $\varepsilon^{(z)}$) очевидно, что если волновой вектор направлен, скажем, вдоль оси x, то направлениями поляризации **D** будут оси y и z. Если же вектор **n** лежит в одной из координатных плоскостей, например в плоскости xy, то одно из направлений поляризации лежит тоже в плоскости xy, а другое — перпендикулярно к ней.

Аналогичными свойствами обладают поляризации двух волн с одинаковым направлением лучевого вектора. Вместо направлений индукции **D** здесь надо рассматривать направления поперечного к **s** вектора **E**, причем вместо уравнений (97.21) будем иметь аналогичные уравнения

$$(s^{-2}\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta})E_\beta = 0. \tag{97.24}$$

Геометрическое построение осуществляется в этом случае с помощью тензорного эллипсоида

$$\varepsilon_{ik}x_i x_k = \varepsilon^{(x)}x^2 + \varepsilon^{(y)}y^2 + \varepsilon^{(z)}z^2 = 1, \tag{97.25}$$

соответствующего прямому тензору ε_{ik} (*эллипсоид Френеля*).

Следует подчеркнуть тот факт, что распространяющиеся в анизотропной среде плоские волны оказываются линейно поляризованными в определенных плоскостях. В этом отношении оптические свойства анизотропных сред существенно отличаются от свойств изотропных сред. Распространяющаяся в изотропной среде плоская волна в общем случае поляризована эллиптически, и лишь в частных случаях эллиптическая поляризация сводится к линейной. Это существенное отличие связано с тем, что случай полной изотропии среды является в известном смысле вырожденным: двум направлениям поляризации соответствует здесь один и тот же волновой вектор, вместо двух различных (с одинаковым направлением) в общем случае анизотропной среды; распространяясь с одним и тем же значением **n**, две линейно поляризованные волны складываются в эллиптически поляризованную.

Задача

Выразить компоненты лучевого вектора **s** через компоненты **n** в главных диэлектрических осях.

Решение. Продифференцировав левую часть уравнения $f(\mathbf{n}) = 0$ (97.10) по n_i и определив затем коэффициент пропорциональности между s_i и $\partial f/\partial n_i$, из условия $\mathbf{ns} = 1$, получим следующие формулы для связи между векторами **s** и **n**:

$$\frac{s_x}{n_x} = \frac{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)}) - 2\varepsilon^{(x)}n_x^2 - (\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)})n_y^2 - (\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)})n_z^2}{2\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)} - n_x^2\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)}) - n_y^2\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)}) - n_z^2\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)})}$$

и аналогично — для s_y, s_z.

§ 98. Оптические свойства одноосных кристаллов

Оптические свойства кристалла зависят в первую очередь от симметрии его диэлектрического тензора ε_{ik}. В этом отношении все кристаллы делятся на три категории — кубические, одноосные и двухосные (см. § 13).

В кристалле кубической системы $\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik}$, т. е. три главных значения тензора совпадают, а направления главных осей вполне произвольны. Поэтому в отношении своих оптических свойств кубические кристаллы вообще не отличаются от изотропных тел.

К одноосным относятся кристаллы ромбоэдрической, тетрагональной и гексагональной систем. Одна из главных осей тензора ε_{ik} совпадает здесь с осью симметрии соответственно третьего, четвертого или шестого порядка; эту ось называют в оптике *оптической осью* кристалла (ниже мы выбираем эту ось в качестве оси z, а соответствующее главное значение ε_{ik} обозначаем как $\varepsilon_{\parallel}$). Направления же двух других главных осей (в плоскости, перпендикулярной к оптической оси) произвольны, а соответствующие главные значения диэлектрического тензора совпадают (ниже они обозначены $\varepsilon_{\perp}$).

Если в уравнении Френеля (97.10) положить $\varepsilon^{(x)} = \varepsilon^{(y)} = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon^{(z)} = \varepsilon_{\parallel}$, то выражение в его левой части распадается на два квадратичных множителя:

$$(n^2 - \varepsilon_{\perp})[\varepsilon_{\parallel} n_z^2 + \varepsilon_{\perp}(n_x^2 + n_y^2) - \varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel}] = 0.$$

Другими словами, уравнение четвертого порядка распадается на два уравнения второго порядка:

$$n^2 = \varepsilon_{\perp}, \tag{98.1}$$

$$\frac{n_z^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{n_x^2 + n_y^2}{\varepsilon_{\parallel}} = 1. \tag{98.2}$$

Геометрически это означает, что поверхность волновых векторов (в общем случае — поверхность четвертого порядка) распадается на две раздельные поверхности — сферу и эллипсоид. На рис. 53 изображен продольный разрез этих поверхностей. Здесь возможны два случая: если $\varepsilon_{\perp} > \varepsilon_{\parallel}$, то сфера лежит вне эллипсоида, а если $\varepsilon_{\perp} < \varepsilon_{\parallel}$ — то внутри его (в первом случае одноосный кристалл называют *отрицательным*, а во втором — *положительным*; рис. 53). Обе поверхности касаются друг друга в двух точках — противоположных полюсах, лежащих на оси n_z. Иначе говоря, направлению оптической оси соответствует всего одно значение волнового вектора.

Аналогичный вид имеет лучевая поверхность. Согласно правилу (97.19) ее уравнение получается из (98.1), (98.2) в виде

$$s^2 = \frac{1}{\varepsilon_\perp}, \tag{98.3}$$

$$\varepsilon_\perp s_z^2 + \varepsilon_\parallel (s_x^2 + s_y^2) = 1. \tag{98.4}$$

В положительном кристалле эллипсоид лежит внутри сферы, а в отрицательном — наоборот.

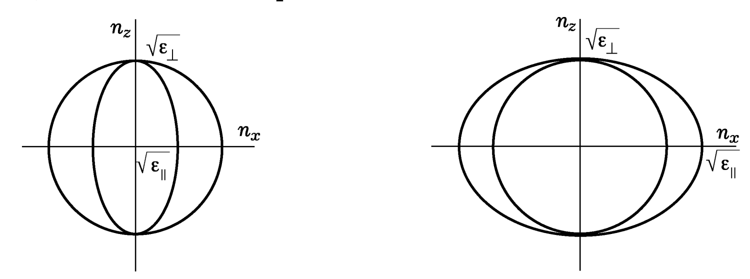


Рис. 53

Таким образом, мы видим, что в одноосном кристалле могут распространяться волны двух типов. По отношению к одному из этих типов волн (так называемые *обыкновенные* волны) кристалл ведет себя как изотропное тело с показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon_\perp}$. Абсолютная величина волнового вектора равна $\omega n/c$ вне зависимости от его направления, а направление лучевого вектора совпадает с направлением $\mathbf{n}$.

В волнах же второго типа (*необыкновенные* волны) величина волнового вектора зависит от угла θ его наклона к оптической оси. Согласно (98.2)

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp}. \tag{98.5}$$

Что касается лучевого вектора необыкновенной волны, то его направление не совпадает с направлением волнового вектора, но лежит в той же проходящей через оптическую ось плоскости (эту плоскость называют принадлежащим данному $\mathbf{n}$ *главным сечением*). Пусть эта плоскость совпадает с плоскостью xz; продифференцировав левую часть равенства (98.2) по n_z и по n_x и взяв отношение этих производных, найдем направление лучевого вектора:

$$\frac{s_x}{s_z} = \frac{\varepsilon_\perp n_x}{\varepsilon_\parallel n_z}.$$

Другими словами, угол θ' между лучевым вектором и оптической осью связан с углом θ простым соотношением:

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \operatorname{tg}\theta. \tag{98.6}$$

Направления **n** и **s** совпадают лишь для волн, распространяющихся вдоль оптической оси и перпендикулярно к ней.

Вопрос о направлении поляризации обыкновенной и необыкновенной волн решается очень просто. Для этого достаточно заметить, что четыре вектора **E**, **D**, **s**, **n** во всякой волне компланарны. В необыкновенной волне направления **s** и **n** не совпадают, но лежат в одном и том же главном сечении. Поэтому эта волна поляризована так, что векторы **E** и **D** лежат в этом же сечении. С другой стороны, векторы **D** в обыкновенной и необыкновенной волнах с одинаковым направлением **n** (или векторы **E** при одинаковом направлении **s**) взаимно перпендикулярны. Поэтому поляризация обыкновенной волны такова, что **E** и **D** лежат в плоскости, перпендикулярной к главному сечению.

Исключением являются лишь волны, распространяющиеся в направлении оптической оси. В этом направлении различие между обыкновенной и необыкновенной волнами исчезает, их поляризации соответственно складываются, давая в общем случае эллиптически поляризованную волну.

Явление преломления плоской волны, падающей на поверхность кристалла, существенно отличается от преломления на границе двух изотропных сред. Закон преломления (и отражения) и здесь получается из условия непрерывности касательной к плоскости раздела составляющей $\mathbf{n}_t$ волнового вектора. Поэтому волновой вектор преломленной (как и отраженной) волны лежит в плоскости падения. При этом, однако, в кристалле возникают одновременно две различные преломленные волны (*двойное преломление*) соответственно двум возможным значениям нормальной компоненты n_n, даваемым уравнением Френеля при заданном $\mathbf{n}_t$. Кроме того, необходимо помнить, что наблюдаемое направление распространения лучей определяется не волновым, а лучевым вектором **s**; оно отличается от направления **n** и в общем случае лежит вне плоскости падения.

В одноосном кристалле при преломлении возникают обыкновенная и необыкновенная преломленные волны. Первая полностью аналогична обычным преломленным волнам в изотропных телах; в частности, ее лучевой вектор (совпадающий по направлению с ее волновым вектором) лежит в плоскости падения. Направление же лучевого вектора необыкновенной волны лежит, вообще говоря, не в плоскости падения.

Задачи

1. Найти направление необыкновенного луча при преломлении света (падающего из пустоты) на поверхности одноосного кристалла, перпендикулярной к его оптической оси.

Решение. Преломленный луч в данном случае остается в плоскости падения (которую выберем в качестве плоскости xz с осью z по нормали к поверхности). При преломлении сохраняется x-компонента волнового вектора $n_x = \sin\vartheta$ (ϑ — угол падения); компоненту n_z для преломленной волны

находим по (98.2):

$$n_z = \left(\varepsilon_\perp - \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\sin^2\vartheta\right)^{1/2}.$$

Направление преломленного луча (ϑ' — угол преломления) находим по (98.6):

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{\varepsilon_\perp n_x}{\varepsilon_\parallel n_z} = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp}\sin\vartheta}{\sqrt{\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\parallel - \sin^2\vartheta)}}.$$

2. Найти направление необыкновенного луча при нормальном падении света на поверхность одноосного кристалла с произвольно направленной оптической осью.

Р е ш е н и е. Преломленный луч лежит в плоскости xz, проходящей через нормаль к поверхности (ось z) и оптическую ось; угол между оптической осью и нормалью пусть будет α. Лучевой вектор (компоненты которого пропорциональны производным от левой части уравнения (98.2) по соответствующим компонентам $\mathbf{n}$) пропорционален

$$\mathbf{s} \propto \frac{\mathbf{n}}{\varepsilon_\parallel} + (\mathbf{nl})\,\mathbf{l}\left(\frac{1}{\varepsilon_\perp} - \frac{1}{\varepsilon_\parallel}\right),$$

где $\mathbf{l}$ — единичный вектор в направлении оптической оси. В данном случае волновой вектор $\mathbf{n}$ направлен по оси z, так что

$$s_x \propto \cos\alpha\sin\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon_\perp} - \frac{1}{\varkappa_\parallel}\right), \quad s_z \propto \frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp}.$$

Отсюда находим для угла преломления ϑ':

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{s_x}{s_z} = \frac{(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)\sin 2\alpha}{\varepsilon_\parallel + \varepsilon_\perp + (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)\cos 2\alpha}.$$

§ 99. Двухосные кристаллы

У двухосных кристаллов все три главных значения тензора ε_{ik} различны. Сюда относятся кристаллы триклинной, моноклинной и ромбической систем. В кристаллах триклинной системы положение главных диэлектрических осей не связано с какими бы то ни было определенными кристаллографическими направлениями; в частности, оно меняется с изменением частоты, от которой зависят все компоненты ε_{ik}. В кристаллах моноклинной системы кристаллографически фиксирована одна из главных диэлектрических осей (она совпадает с осью симметрии второго порядка или перпендикулярна к плоскости симметрии); положение же двух других главных осей зависит от частоты. Наконец, в кристаллах ромбической системы фиксировано положение всех трех главных осей — они должны совпадать с тремя взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка.

Изучение оптических свойств двухосных кристаллов связано с исследованием уравнения Френеля в его общем виде.

Примем в дальнейшем для определенности, что

$$\varepsilon^{(x)} < \varepsilon^{(y)} < \varepsilon^{(z)}. \tag{99.1}$$

Для выяснения характера формы поверхности четвертого порядка, определяемой уравнением (97.10), прежде всего найдем форму ее сечений координатными плоскостями. Положив в уравнении $n_z = 0$, найдем, что его левая часть распадается на два множителя:

$$(n^2 - \varepsilon^{(z)})(\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 - \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}) = 0.$$

Отсюда видно, что контур сечения в плоскости xy состоит из круга

$$n^2 = \varepsilon^{(z)} \tag{99.2}$$

и эллипса

$$\frac{n_x^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{n_y^2}{\varepsilon^{(x)}} = 1, \tag{99.3}$$

причем согласно условию (99.1), эллипс лежит внутри круга. Аналогично найдем, что сечения плоскостями yz и xz тоже состоят из эллипса и круга, но в плоскости yz эллипс лежит вне круга, а в плоскости xz они пересекают друг друга. Таким образом, поверхность волновых векторов есть самопересекающаяся поверхность изображенного на рис. 54 типа (на рисунке изображена поверхность в одном октанте).

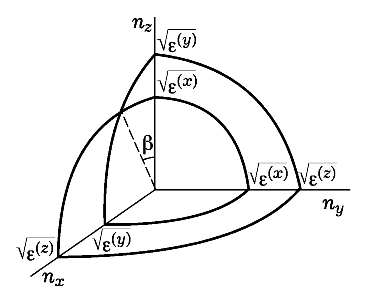


Рис. 54

Эта поверхность имеет четыре особые точки — четыре точки самопересечения, лежащие по одной в каждом квадранте плоскости xz. Особые точки поверхности, заданной уравнением вида $f(n_x, n_y, n_z) = 0$, определяются, как известно, равенством нулю всех трех первых производных функции f. Дифференцируя выражение в левой части уравнения (97.10), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} n_x\left[\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)}) - \varepsilon^{(x)}n^2 - (\varepsilon^{(x)}n_x^2 + \varepsilon^{(y)}n_y^2 + \varepsilon^{(z)}n_z^2)\right] &= 0,\\ n_y\left[\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)}) - \varepsilon^{(y)}n^2 - (\varepsilon^{(x)}n_x^2 + \varepsilon^{(y)}n_y^2 + \varepsilon^{(z)}n_z^2)\right] &= 0,\\ n_z\left[\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)}) - \varepsilon^{(z)}n^2 - (\varepsilon^{(x)}n_x^2 + \varepsilon^{(y)}n_y^2 + \varepsilon^{(z)}n_z^2)\right] &= 0 \end{aligned} \tag{99.4}$$

(причем должно удовлетворяться, конечно, и само уравнение (97.10)). Заранее зная, что искомые направления $\mathbf{n}$ лежат в плоскости xz, полагаем $n_y = 0$, а из двух остающихся уравнений после

простого вычисления находим [1]):

$$n_x^2 = \frac{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}}, \quad n_z^2 = \frac{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)})}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)}}. \tag{99.5}$$

Направления этих векторов $\mathbf{n}$ наклонены к оси z под углом β, для которого

$$\frac{n_x}{n_z} = \pm \operatorname{tg}\beta = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)})}}. \tag{99.6}$$

Этой формулой определяются две оси (два направления) в плоскости xz, каждая из которых проходит через две противоположные особые точки и наклонена под углом β к оси z. Они называются *оптическими осями* (или *бинормалями*) кристалла; на рис. 54 штриховой линией показана одна из них. Направления оптических осей являются, очевидно, единственными направлениями, в которых волновой вектор может иметь всего одно значение [2]).

Аналогичными свойствами обладает лучевая поверхность. Для получения соответствующих формул достаточно заменить $\mathbf{n}$ на $\mathbf{s}$ и ε на $1/\varepsilon$. В частности, имеются две *оптические оси лучей* (или *бирадиали*), расположенные тоже в плоскости xz и наклоненные к оси z под углом γ:

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}}}\operatorname{tg}\beta. \tag{99.7}$$

Так как $\varepsilon^{(x)} < \varepsilon^{(z)}$, то $\gamma < \beta$.

Направления $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ совпадают лишь для волн, распространяющихся в направлениях координатных осей (т. е. главных диэлектрических осей). Если $\mathbf{n}$ лежит в какой-либо из координатных плоскостей, то $\mathbf{s}$ лежит в той же плоскости. Из этого правила имеется, однако, одно замечательное исключение — для волновых векторов, направленных вдоль оптических осей.

Общие формулы, определяющие вектор $\mathbf{s}$ по вектору $\mathbf{n}$ (см. задачу к § 97), при подстановке в них значения $\mathbf{n}$ из (99.5) дают неопределенность вида 0/0. Происхождение и смысл этой неопределенности вполне понятны из следующих геометрических соображений. Вблизи особой точки внешняя и внутренняя полости поверхности волновых векторов представляют собой конусы

---

[1]) Легко непосредственно убедиться в том, что найденное таким образом решение есть единственное вещественное решение уравнений (99.4). Если все три компоненты n_x, n_y, n_z отличны от нуля, то три уравнения (99.4) противоречат друг другу (в них, по существу, входят всего две неизвестные: n^2 и $\varepsilon^{(x)}n_x^2 + \varepsilon^{(y)}n_y^2 + \varepsilon^{(z)}n_z^2$). Если же $n_x = 0$ или $n_z = 0$, то уравнения имеют мнимые решения.

[2]) На тензорном эллипсоиде (97.23) бинормали определяются как направления, перпендикулярные к которым сечения эллипсоида являются окружностями. Как известно, трехосный эллипсоид имеет два таких сечения.

с общей вершиной. В этой вершине (особой точке) направление нормали к поверхности становится неопределенным; между тем указанные формулы определяют направление $\mathbf{s}$ именно как направление нормали. В действительности волновому вектору, направленному вдоль оптической оси (бинормали), соответствует бесконечное множество лучевых векторов, направления которых заполняют определенную коническую поверхность (*конус внутренней конической рефракции*) [1]).

Для нахождения этого конуса лучей можно было бы исследовать направления нормалей в окрестности особой точки. Более нагляден, однако, путь, основанный на геометрическом построении с помощью лучевой поверхности.

На рис. 55 изображено в одном квадранте (сплошными кривыми) сечение лучевой поверхности плоскостью xz. В этих же осях координат изображено (в произвольно измененном масштабе) сечение поверхности волновых векторов. Прямая OS есть бирадиаль, а ON — бинормаль; волновой вектор, соответствующий точке N, обозначим как $\mathbf{n}_N$. Легко видеть, что особой точке N поверхности волновых векторов соответствует на лучевой поверхности особая касательная плоскость — плоскость, перпендикулярная к направлению ON и касающаяся поверхности не в отдельной точке, а по целой кривой (как оказывается, — по окружности). На рис. 55 сечение этой плоскости изображено отрезком ab. Это непосредственно следует из указанного в § 97 геометрического соответствия между поверхностью волновых векторов и лучевой поверхностью: если к какой-либо точке $\mathbf{s}$ лучевой поверхности провести касательную плоскость, то перпендикуляр, опущенный из начала координат на эту плоскость, совпадает по направлению с $\mathbf{n}$ и по величине равен $1/n$, где $\mathbf{n}$ — волновой вектор, соответствующий данному $\mathbf{s}$. В нашем случае должно иметься бесконечное множество векторов $\mathbf{s}$, соответствующих одному и тому же $\mathbf{n} = \mathbf{n}_N$; поэтому отвечающие всем им точки лучевой поверхности должны лежать на одной и той же касательной плоскости, причем эта плоскость перпендикулярна к $\mathbf{n}_N$. Таким образом, на рис. 55 треугольник Oab есть след сечения конуса внутренней конической рефракции плоскостью xz.

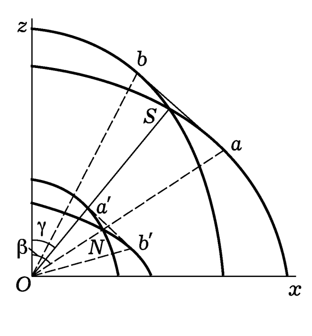


Рис. 55

Количественный расчет описанной геометрической картины не представляет особых трудностей, но мы не будем излагать его

[1]) Описываемое ниже явление конической рефракции было предсказано *Гамильтоном* (*W.R. Hamilton*, 1833).

здесь, ограничившись приведением окончательных формул. Уравнение окружности, по которой конус рефракции пересекает лучевую поверхность, дается совокупностью следующих двух формул:

$$(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)})s_y^2 + \left(s_x\sqrt{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)})} - s_z\sqrt{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)})}\right) \times \\ \times \left(s_x\sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}}{\varepsilon^{(x)}}} - s_z\sqrt{\frac{\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}}}\right) = 0, \quad (99.8)$$

$$s_x\sqrt{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)})} + s_z\sqrt{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)})} = \sqrt{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)}}.$$

Первое из этих уравнений, если понимать в нем s_x, s_y, s_z как три независимые переменные, есть уравнение самого конуса рефракции. Второе же дает уравнение касательной (к лучевой поверхности) плоскости. В частности, при $s_y = 0$ первое уравнение (99.8) распадается на два уравнения

$$\frac{s_x}{s_z} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)})}}, \qquad \frac{s_x}{s_z} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)})}},$$

которые определяют направления крайних лучей (соответственно Oa и Ob на рис. 55) в плоскости сечения xz. Первое из них совпадает с направлением бинормали (ср. (99.6)), которое в то же время перпендикулярно к касательной ab.

Аналогичное положение имеет место для волновых векторов, соответствующих заданному лучевому вектору. Вектору $\mathbf{s}$, направленному по бирадиали, соответствует бесконечное множество волновых векторов, направления которых заполняют так называемый *конус внешней конической рефракции* (на рис. 55 треугольник $Oa'b'$ есть след сечения этого конуса плоскостью xz). Соответствующие формулы получаются, как всегда, заменой $\mathbf{s} \to \mathbf{n}$, $\varepsilon \to 1/\varepsilon$ в формулах (99.8) и гласят:

$$\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)})n_y^2 + \left(n_x\sqrt{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}} - n_z\sqrt{\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}}\right) \times \\ \times \left(n_x\varepsilon^{(x)}\sqrt{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}} - n_z\varepsilon^{(z)}\sqrt{\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}}\right) = 0,$$

$$n_x\sqrt{\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}} + n_z\sqrt{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}} = \sqrt{\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)})}. \quad (99.9)$$

Для фактического наблюдения внутренней конической рефракции [1]) можно воспользоваться плоскопараллельной пластинкой, вырезанной из кристалла перпендикулярно к бинормали

[1]) Следующее ниже описание весьма схематично.

(рис. 56). Поверхность пластинки закрыта узкой диафрагмой, выделяющей из перпендикулярно падающей на пластинку плоской волны (волны с определенным направлением волнового вектора) узкий пучок. Волновой вектор в прошедшем в пластинку свете будет иметь это же направление, совпадающее с бинормалью, и потому его лучи распределятся по поверхности конуса внутренней рефракции. Свет же, выходящий из другой поверхности пластинки, имея тот же волновой вектор, что и падающий свет, распределится по поверхности кругового цилиндра.

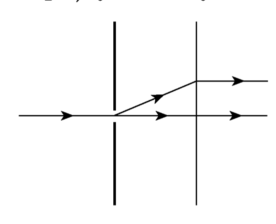


Рис. 56

Для наблюдения же внешней конической рефракции пластинка должна быть вырезана перпендикулярно к бирадиали, а ее обе поверхности — закрыты диафрагмами с малыми отверстиями, расположенными точно одно против другого. При освещении пластинки сходящимся пучком света (т. е. пучком, содержащим лучи со всевозможными направлениями $\mathbf{n}$) диафрагмы выделят внутри пластинки лучи с направлением $\mathbf{s}$ вдоль бирадиали и, соответственно, с направлениями $\mathbf{n}$, заполняющими поверхность конуса внешней конической рефракции. Выходящий из второго отверстия свет распределится поэтому тоже по конической поверхности (которая, однако, вследствие преломления на выходе не точно совпадает с конусом внешней рефракции).

Законы преломления на поверхности двухосного кристалла при произвольном направлении падения чрезвычайно громоздки, и мы не будем останавливаться на них[1]). Укажем лишь, что в отличие от одноосного кристалла обе преломленные волны являются «необыкновенными» и их лучи не лежат в плоскости падения.

Как условлено в § 97, мы рассматриваем оптику прозрачных кристаллов. Упомянем здесь, однако, об одном свойстве двухосных кристаллов, которое может возникнуть при учете поглощения.

Рассмотрим распространяющуюся в кристалле однородную плоскую волну; в ней $\mathbf{n}$ — комплексный вектор, причем, однако, его вещественная и мнимая части имеют одинаковое направление: $\mathbf{n} = n\boldsymbol{\nu}$, где $\boldsymbol{\nu}$ — вещественный единичный вектор, а $n = n(\omega)$ — комплексная величина. При заданном $\boldsymbol{\nu}$ дисперсионное уравнение (97.21) в раскрытом виде гласит:

$$n^{-4} - n^{-2}(\eta_{11} + \eta_{22}) + \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2 = 0,$$

где $\eta_{ik} \equiv \varepsilon_{ik}^{-1}$, а индексы 1, 2 — тензорные индексы в плоскости,

[1]) Изложение соответствующих вычислений можно найти в статье *Szivessy G.* Kristaloptik в кн.: Handbuch der Physik. Bd XX. — Berlin, 1928.

перпендикулярной $\boldsymbol{\nu}$. Это квадратное по n^{-2} уравнение имеет кратный корень, если

$$\eta_{22} - \eta_{11} = \pm 2i\eta_{12}; \tag{99.10}$$

при этом $n^{-2} = (\eta_{11} + \eta_{22})/2$. При наличии поглощения тензор $\eta_{ik} = \eta'_{ik} + i\eta''_{ik}$ комплексен.

В двухосных кристаллах эллипсоиды тензоров η'_{ik} и η''_{ik} трехосны, причем отношения длин их полуосей (а в кристаллах триклинной и моноклинной систем также и их направления) различны для обоих тензоров. В этих условиях двумерные тензоры $\eta'_{\alpha\beta}$ и $\eta''_{\alpha\beta}$ не приводятся, вообще говоря, одновременно к главным осям. Угол ϑ между главными осями обоих тензоров — функция двух независимых переменных (углов, задающих направление $\boldsymbol{\nu}$). Поэтому при заданной частоте ω может существовать однопараметрическое множество направлений $\boldsymbol{\nu}$, для которых $\vartheta = \pi/4$. При таком значении ϑ мнимая часть комплексного уравнения (99.10) удовлетворяется тождественно, а вещественная часть принимает вид

$$\eta'_2 - \eta'_1 = \mp(\eta''_2 - \eta''_1), \tag{99.11}$$

где индексы 1 и 2 указывают главные значения соответствующих тензоров [1]). При любом выборе осей x_1, x_2 уравнения (97.21) дадут теперь

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\eta_{22} - \eta_{11}}{2\eta_{12}} = \pm i,$$

где два знака в правой части равенства отвечают двум знакам в (99.10). Таким образом, условия $\vartheta = \pi/4$ и (99.11) совместно выделяют для каждого значения ω определенное направление $\boldsymbol{\nu}$, в котором может распространяться лишь волна с круговой поляризацией одного знака — левой или правой, смотря по тому, с каким знаком выполняется условие (99.10) (*W. Voigt*, 1902). Такое направление в кристалле называют *сингулярной* или *круговой оптической осью*.

В соответствии с общей теорией линейных дифференциальных уравнений, второе независимое решение уравнений поля содержит в этом случае наряду с экспоненциальным множителем $\exp(in\boldsymbol{\nu}\mathbf{r})$ (содержащим в себе и затухание) еще и линейный по координатам множитель вида $a + b\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}$ [2]). Поляризация этой волны

---

[1]) В сказанном легко убедиться, выбрав оси x_1, x_2 в направлении главных осей тензора $\eta'_{\alpha\beta}$ и выразив компоненты тензора $\eta''_{\alpha\beta}$ через его главные значения.

[2]) Это решение должно учитываться, например, в задачах об отражении и преломлении света, распространяющегося вдоль сингулярной оси.

меняется вдоль луча, но в конце концов по мере увеличения $\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}$ устанавливается такая же круговая поляризация, как и в первой волне (это становится очевидным, если заметить, что в указанном пределе при подстановке решения в уравнения поля дифференцированию следует подвергать только экспоненциальный множитель; разница между обоими решениями тогда исчезает).

Подчеркнем отличие сингулярной оси от случая, когда двойной корень дисперсионного уравнения возникает автоматически в силу симметрии кристалла. Для света, распространяющегося вдоль оптической оси одноосного кристалла, двумерный тензор $\eta_{\alpha\beta}$ имеет вид $\eta_{\alpha\beta} = \eta\delta_{\alpha\beta}$ и условие (99.10) удовлетворяется тождественно. При этом уравнения (97.21) допускают два независимых решения с различными поляризациями.

§ 100. Двойное преломление в электрическом поле

Изотропное тело в постоянном электрическом поле становится оптически анизотропным. Появление этой анизотропии может быть описано как результат изменения диэлектрической проницаемости под влиянием постоянного поля. Хотя это изменение является относительно слабым, но в данном случае оно существенно, так как приводит к качественному изменению оптических свойств тела.

Будем обозначать в этом параграфе через **E** напряженность постоянного электрического поля в теле[1]) и произведем разложение диэлектрического тензора ε_{ik} по степеням этой величины. В изотропном теле в нулевом приближении $\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$. Членов первого порядка по полю в ε_{ik} не может быть, так как в изотропном теле не существует никакого постоянного вектора, с помощью которого можно было бы составить линейный по **E** тензор второго ранга. Поэтому следующие члены разложения ε_{ik} будут квадратичными по полю. Из компонент вектора можно составить два симметричных тензора второго ранга: $E^2\delta_{ik}$ и E_iE_k. Из них первый не меняет симметрии тензора $\varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$, и прибавление к последнему члена вида $\mathrm{const}\cdot E^2\delta_{ik}$ сводится просто к малой поправке к скалярной постоянной $\varepsilon^{(0)}$; эта поправка не приводит, очевидно, к появлению какой-либо оптической анизотропии и потому не представляет интереса. Таким образом, мы приходим к следующему виду зависящего от поля диэлектрического тензора:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_iE_k, \tag{100.1}$$

где α — скалярная постоянная.

---

[1]) Не смешивать с напряженностью слабого переменного электрического поля волны!

Одна из главных осей этого тензора совпадает с направлением электрического поля, и соответствующее главное значение равно

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon^{(0)} + \alpha E^2. \tag{100.2}$$

Остальные два главных значения равны друг другу,

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon^{(0)}, \tag{100.3}$$

а положение соответствующих главных осей в плоскости, перпендикулярной к полю, произвольно. Таким образом, изотропное тело в электрическом поле ведет себя в оптическом отношении как одноосный кристалл (*эффект Керра*).

Изменение оптической симметрии в электрическом поле может иметь место и у кристалла (так, оптически одноосный кристалл может превратиться в двухосный, оптически изотропный кубический кристалл может стать оптически анизотропным). В отличие от соответствующего явления у изотропных тел, здесь эффект может быть и первого порядка по полю. Этому линейному эффекту соответствует диэлектрический тензор вида

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + \alpha_{ikl} E_l, \tag{100.4}$$

где совокупность коэффициентов α_{ikl} составляет тензор третьего ранга, симметричный по индексам i и k. Симметрия этого тензора совпадает с симметрией пьезоэлектрического тензора. Поэтому рассматриваемый эффект существует у кристаллов тех же 20 классов, которые допускают пьезоэлектричество.

§ 101. Магнитооптические эффекты

При наличии постоянного магнитного поля $\mathbf{H}$[1]) тензор $\varepsilon_{ik}(\omega; \mathbf{H})$ перестает быть симметричным. Обобщенный принцип симметрии кинетических коэффициентов связывает компоненты ε_{ik} и ε_{ki} в различных полях:

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{H}) = \varepsilon_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{101.1}$$

Условие отсутствия поглощения требует лишь эрмитовости этого тензора:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^{*} \tag{101.2}$$

(как это видно из (96.5)), а не его вещественности. Из (101.2) следует только, что вещественная и мнимая части ε_{ik} должны быть соответственно симметричной и антисимметричной:

$$\varepsilon'_{ik} = \varepsilon'_{ki}, \quad \varepsilon''_{ik} = -\varepsilon''_{ki}. \tag{101.3}$$

---

[1]) Не смешивать с периодическим слабым полем электромагнитной волны!

Учитывая (101.1), имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ik}(\mathbf{H}) = \varepsilon'_{ki}(\mathbf{H}) = \varepsilon'_{ik}(-\mathbf{H}), \\ \varepsilon''_{ik}(\mathbf{H}) = -\varepsilon''_{ki}(\mathbf{H}) = -\varepsilon''_{ik}(-\mathbf{H}), \end{aligned} \tag{101.4}$$

т. е. в непоглощающей среде величины ε'_{ik} являются четными, а ε''_{ik} — нечетными функциями $\mathbf{H}$.

Такими же свойствами симметрии обладает, очевидно, и обратный тензор ε^{-1}_{ik}. В дальнейших вычислениях будет удобнее пользоваться именно этим тензором. Во избежание многочисленных индексов введем для него специальное обозначение [1]):

$$\varepsilon^{-1}_{ik} = \eta_{ik} = \eta'_{ik} + i\eta''_{ik} \tag{101.5}$$

(которым мы пользовались уже и ранее).

Как известно, всякий антисимметричный тензор второго ранга эквивалентен (дуален) некоторому аксиальному вектору; для тензора η''_{ik} обозначим этот вектор через $\mathbf{G}$. С помощью антисимметричного единичного тензора e_{ikl} связь между компонентами тензора η''_{ik} и вектора $\mathbf{G}$ записывается в виде

$$\eta''_{ik} = e_{ikl}G_l, \tag{101.6}$$

а в компонентах:

$$\eta''_{xy} = G_z, \quad \eta''_{zx} = G_y, \quad \eta''_{yz} = G_x.$$

Связь $E_i = \eta_{ik}D_k$ между электрической индукцией и напряженностью принимает при этом вид:

$$E_i = (\eta'_{ik} + ie_{ikl}G_l)D_k = \eta'_{ik}D_k + i[\mathbf{DG}]_i. \tag{101.7}$$

Аналогичным образом выглядит прямая зависимость $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$:

$$D_i = \varepsilon'_{ik}E_k + i[\mathbf{Eg}]_i. \tag{101.8}$$

Связь между коэффициентами в (101.7) и (101.8) дается формулами:

$$\eta'_{ik} = \frac{1}{|\varepsilon|}\{\varepsilon'^{-1}_{ik}|\varepsilon'| - g_i g_k\}, \quad G_i = -\frac{1}{|\varepsilon|}\varepsilon'_{ik}g_k, \tag{101.9}$$

где $|\varepsilon|$ и $|\varepsilon'|$ — определители тензоров ε_{ik} и ε'_{ik} (ср. задачу к § 22). Среду с такой формой зависимости между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ называют *гиротропной*. Вектор $\mathbf{g}$ называют *вектором гирации*, а $\mathbf{G}$ — *вектором оптической активности*.

Произведем общее исследование характера волн, распространяющихся в произвольной гиротропной среде, считая при этом

[1]) Разумеется, η'_{ik} и η''_{ik} сами не являются тензорами, обратными ε'_{ik} и ε''_{ik}.

среду анизотропной и не делая никаких предположений о величине магнитного поля [1]).

Выберем направление волнового вектора в качестве оси z и напишем уравнение (97.21):

$$\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right) D_\beta = \left(\eta'_{\alpha\beta} + i\eta''_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right) D_\beta = 0, \qquad (101.10)$$

где индексы α, β пробегают значения x, y. Направления осей x и y выберем вдоль главных осей двумерного тензора $\eta'_{\alpha\beta}$, а соответствующие главные значения этого тензора обозначим как n_{01}^{-2} и n_{02}^{-2}; тогда уравнения примут следующий вид:

$$\begin{gathered}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n^2}\right) D_x + iG_z D_y = 0,\\ -iG_z D_x + \left(\frac{1}{n_{02}^2} - \frac{1}{n^2}\right) D_y = 0.\end{gathered} \qquad (101.11)$$

Условие равенства нулю определителя этой системы дает квадратное по n^2 уравнение:

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{01}^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right) = G_z^2, \qquad (101.12)$$

корни которого определяют два значения n, относящиеся к заданному направлению $\mathbf{n}$ [2]):

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2} + \frac{1}{n_{02}^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right)^2 + G_z^2}. \qquad (101.13)$$

Подставляя эти значения обратно в уравнения (101.11), найдем соответствующие отношения:

$$\frac{D_y}{D_x} = \frac{i}{G_z}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right)^2 + G_z^2}\right]. \qquad (101.14)$$

---

[1]) Мы по-прежнему считаем среду немагнитной по отношению к переменному полю электромагнитной волны (т. е. полагаем $\mu_{ik}(\omega) = \delta_{ik}$). Этим, однако, не исключается возможность намагничения среды постоянным полем (т. е. статическая проницаемость может быть отлична от 1).

Все излагаемые свойства $\varepsilon_{ik}(\omega)$ в той же степени относятся к тензору $\mu_{ik}(\omega)$, когда в данной области частот существенна дисперсия магнитной проницаемости.

[2]) В отсутствие поля $\mathbf{G} = 0$ и $n = n_{01}$ или n_{02}. Следует, однако, иметь в виду, что при наличии поля величины n_{01} и n_{02} в уравнении (101.12) не имеют, вообще говоря, смысла значений n при $\mathbf{H} = 0$, так как от поля зависит не только вектор $\mathbf{G}$, но и компоненты тензора η'_{ik}.

Чисто мнимое отношение D_y/D_x означает, что волны эллиптически поляризованы, причем главные оси эллипсов поляризации совпадают с осями x, y. Произведение двух значений этого отношения равно, как легко видеть, единице. Другими словами, если в одной волне

$$D_y = i\rho D_x$$

(где вещественное число ρ есть отношение длин осей эллипса поляризации), то во второй волне

$$D_y = -\frac{iD_x}{\rho}.$$

Это значит, что эллипсы поляризации двух волн имеют одинаковое отношение осей, но повернуты относительно друг друга на 90°; направление вращения в них противоположно (рис. 57).

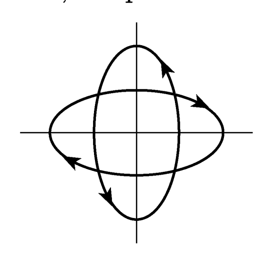


Рис. 57

Если обозначить векторы $\mathbf{D}$ в обеих волнах как $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$, то полученные соотношения могут быть записаны в виде

$$\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2^* = D_{1x}D_{2x}^* + D_{1y}D_{2y}^* = 0.$$

Такое соотношение является общим свойством собственных векторов, возникающих при приведении к главным осям эрмитового тензора (в данном случае — тензора $\eta_{\alpha\beta}$).

Компоненты вектора $\mathbf{G}$ и тензора η'_{ik} являются функциями напряженности магнитного поля. Если (как обычно имеет место) магнитное поле является сравнительно слабым, то можно произвести разложение по его степеням. Вектор $\mathbf{G}$ равен нулю в отсутствие поля; поэтому в слабом поле можно положить

$$G_i = f_{ik}H_k, \tag{101.15}$$

где f_{ik} — тензор второго ранга, в общем случае несимметричный. Такая форма зависимости находится в согласии с общим правилом, согласно которому в прозрачной среде компоненты антисимметричного тензора η''_{ik} (как и тензора ε''_{ik}) должны быть нечетными функциями $\mathbf{H}$. Что же касается симметричного тензора η'_{ik}, то его компоненты являются четными функциями магнитного поля. Поэтому первые поправочные, по сравнению со значениями в отсутствие поля, члены в η'_{ik} — второго порядка по полю (в пренебрежении этими членами из (101.9) имеем просто $\eta'_{ik} = \varepsilon'^{-1}_{ik}$).

В общем случае произвольного направления волнового вектора магнитное поле сравнительно мало влияет на распространение света в кристалле, вызывая лишь появление слабой эллиптичности колебаний с малым (первого порядка по полю) отношением длин осей эллипса поляризации.

Исключение в отношении характера магнитооптического эффекта представляют направления оптических осей (и близкие к ним), вдоль которых оба значения n в отсутствие поля совпадают. Корни уравнения (101.12) отличаются тогда от этих значений на величины первого порядка малости[1]) и возникают эффекты, аналогичные эффектам в изотропных телах, к рассмотрению которых мы теперь и перейдем. Магнитооптический эффект в изотропных телах (а также в кристаллах кубической системы) представляет особый интерес ввиду его своеобразного характера и сравнительно большой величины.

Пренебрегая величинами второго порядка малости, имеем $\eta'_{ik} = \varepsilon^{-1}\delta_{ik}$, где ε — диэлектрическая проницаемость изотропной среды в отсутствие магнитного поля. Зависимость между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ дается формулами

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D} + i[\mathbf{DG}], \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + i[\mathbf{Eg}], \tag{101.16}$$

причем векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{G}$ связаны, в том же приближении, соотношением

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{g}. \tag{101.17}$$

Зависимость $\mathbf{g}$ (или $\mathbf{G}$) от внешнего поля сводится в изотропной среде к простой пропорциональности:

$$\mathbf{g} = f\mathbf{H}; \tag{101.18}$$

скалярная постоянная может быть как положительной, так и отрицательной.

В уравнении (101.12) имеем теперь $n_{01} = n_{02} \equiv n_0 = \sqrt{\varepsilon}$; это — коэффициент преломления в отсутствие поля. Отсюда

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_0^2} \mp G_z$$

или, с той же точностью,

$$n_\mp^2 = n_0^2 \pm n_0^4 G_z = n_0^2 \mp g_z. \tag{101.19}$$

Вспоминая, что ось z выбрана вдоль вектора $\mathbf{n}$, можно написать эту формулу с той же точностью в следующем векторном виде:

$$\left(\mathbf{n} \pm \frac{1}{2n_0}\mathbf{g}\right)^2 = n_0^2. \tag{101.20}$$

[1]) Обратим внимание на то, что оба корня уравнения (101.12) при этом несколько отличаются друг от друга. Геометрически это означает, что обе полости (внутренняя и внешняя) поверхности волновых векторов оказываются полностью разделенными.

Отсюда видно, что поверхность волновых векторов представляет собой в данном случае совокупность двух сфер радиуса n_0, центры которых смещены вдоль направления $\mathbf{G}$ на расстояние $\pm g/2n_0$ от начала координат.

Каждому из двух значений n соответствует своя поляризация волны; именно,

$$D_x = \mp i D_y, \tag{101.21}$$

где знаки соответствуют знакам в (101.19). Равенство абсолютных значений D_x и D_y при сдвиге фаз между ними $\mp\pi/2$ означает круговую поляризацию волны с направлением вращения вектора $\mathbf{D}$ соответственно против и по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления волнового вектора (или, как принято говорить, соответственно *право-* и *левополяризованные волны*).

Разница между показателями преломления лево- и правополяризованных волн приводит к тому, что при преломлении на поверхности гиротропного тела возникают две поляризованные по кругу преломленные волны (так называемое *двойное круговое преломление*).

Пусть линейно поляризованная плоская волна падает в нормальном направлении на плоскопараллельный слой вещества (толщины l). Направление падения выберем в качестве оси z, а направление вектора $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ в падающей волне — в качестве оси x. Линейное колебание можно представить в виде суммы двух круговых колебаний с противоположными направлениями вращения, которые будут затем распространяться в слое вещества с различными волновыми векторами $k_\pm = \omega n_\pm / c$. Положив амплитуду волны условно равной единице, будем иметь

$$D_x = \frac{1}{2}(e^{ik_+z} + e^{ik_-z}), \quad D_y = \frac{i}{2}(-e^{ik_+z} + e^{ik_-z}),$$

или, введя $k = (k_+ + k_-)/2$, $\varkappa = (k_+ - k_-)/2$,

$$D_x = \frac{1}{2}e^{ikz}(e^{i\varkappa z} + e^{-i\varkappa z}) = e^{ikz}\cos\varkappa z,$$

$$D_y = \frac{i}{2}e^{ikz}(-e^{i\varkappa z} + e^{-i\varkappa z}) = e^{ikz}\sin\varkappa z,$$

при выходе волны из слоя будем иметь

$$\frac{D_y}{D_x} = \operatorname{tg}\varkappa l = \operatorname{tg}\left(l\frac{\omega g}{2cn_0}\right). \tag{101.22}$$

Вещественность этого отношения означает, что волна остается линейно поляризованной, но с повернутым относительно первоначального направлением поляризации (*эффект Фарадея*). Угол поворота плоскости поляризации пропорционален пройденному

волной пути; на единице длины вдоль направления волнового вектора он составляет

$$\frac{\omega g}{2cn_0}\cos\theta, \tag{101.23}$$

где θ — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{g}$.

Следует отметить, что при заданном направлении магнитного поля направление вращения плоскости поляризации (по отношению к направлению $\mathbf{n}$) при изменении знака $\mathbf{n}$ меняется на обратное — правое вращение переходит в левое и наоборот. Поэтому, если луч проходит один и тот же путь дважды (туда и обратно), то суммарное вращение плоскости поляризации будет вдвое больше, чем после одного прохождения.

При $\theta = \pi/2$ (волновой вектор перпендикулярен к магнитному полю) линейный по полю эффект, описывающийся формулами (101.19), исчезает (в соответствии с указанным выше общим правилом, что из всех компонент вектора $\mathbf{g}$ на распространение света влияет лишь его проекция на направление $\mathbf{n}$). Поэтому при углах θ, близких к $\pi/2$, должны учитываться также и члены, пропорциональные квадрату поля. В частности, должны быть учтены члены второго порядка и в тензоре η'_{ik}. В силу аксиальной симметрии вокруг направления поля два главных значения симметричного тензора η'_{ik} будут одинаковы (как у одноосного кристалла). Мы выбираем ниже ось x вдоль направления поля и обозначаем главные значения η'_{ik} в направлениях параллельно и перпендикулярно к магнитному полю через $\eta_{\parallel}$ и $\eta_{\perp}$; разность $\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}$ пропорциональна H^2.

Рассмотрим квадратичный эффект, возникающий при взаимно перпендикулярных $\mathbf{n}$ и $\mathbf{g}$ (*эффект Коттона–Мутона*). В уравнениях (101.11), (101.12) имеем в этом случае $G_z = 0$, а n_{01}^{-2} и n_{02}^{-2} равны соответственно $\eta_{\parallel}$ и $\eta_{\perp}$. Таким образом, в одной из волн

$$n^{-2} = \eta_{\parallel}, \quad D_y = 0;$$

эта волна линейно поляризована с вектором $\mathbf{D}$, направленным параллельно оси x. В другой же волне

$$n^{-2} = \eta_{\perp}, \quad D_x = 0,$$

т. е. $\mathbf{D}$ направлен вдоль оси y. Пусть линейно поляризованный свет падает в нормальном направлении на плоскопараллельный слой вещества, находящийся в параллельном ему магнитном поле. Две компоненты прошедшего в вещество света (с векторами $\mathbf{D}$ в плоскостях xz и yz) распространяются с различными значениями n. В результате этого свет, выходящий через противоположную сторону слоя, оказывается эллиптически поляризованным.

Наконец, остановимся еще на одном своеобразном эффекте, возникающем в среде с линейным по (постоянному) магнитному полю вектором оптической активности (101.15): намагничение немагнитной прозрачной среды переменным электрическим полем (*Л.П. Питаевский*, 1960).

Будем исходить из общей формулы (31.6)

$$-\frac{\mathbf{B}}{4\pi} = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \mathbf{H}},$$

причем учтем вклад в $\widetilde{U}$ от переменного электрического поля, даваемый формулой (80.11). Согласно теореме о малых добавках к термодинамическим величинам, изменение $\delta\widetilde{U}$ этого вклада при малом изменении диэлектрической проницаемости совпадает (будучи выражено через соответствующие переменные) с изменением свободной энергии $\delta\widetilde{F}$. Для последнего можно воспользоваться формулой (14.1), обобщив ее очевидным образом на анизотропные среды (о том, что эта формула остается справедливой для переменного — а не постоянного, как в § 14, — поля в прозрачной среде с дисперсией, было упомянуто в § 81 [1])). Таким образом, имеем

$$\delta\widetilde{U} = -\delta\varepsilon_{ik}\frac{E_i E_k^*}{16\pi} = \delta\eta_{ik}\frac{D_i D_k^*}{16\pi} \tag{101.24}$$

(лишний множитель 1/2 учитывает представление $\mathbf{E}$ в комплексном виде); последнее равенство в (101.24) — следствие того, что в силу определения $\varepsilon_{il}\eta_{lk} = \delta_{ik}$ имеем $\varepsilon_{il}\delta\eta_{lk} = -\eta_{lk}\delta\varepsilon_{il}$ [2]).

Понимая теперь варьирование диэлектрической проницаемости как результат изменения постоянного магнитного поля, пишем

$$-\frac{\mathbf{B}}{4\pi} = \frac{\partial \widetilde{U}_0}{\partial \mathbf{H}} + \frac{\partial \eta_{ik}}{\partial \mathbf{H}}\frac{D_i D_k^*}{16\pi},$$

где $\widetilde{U}_0$ относится к среде в отсутствие электрического поля. Если среда сама по себе немагнитна ($\mu = 1$), то $\partial\widetilde{U}_0/\partial\mathbf{H} = -\mathbf{H}/(4\pi)$. Тогда намагниченность $\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/(4\pi)$ равна

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial \mathbf{H}}\frac{D_i D_k^*}{16\pi}.$$

---

[1]) Напомним, что знак $\sim$ над U относится здесь к магнитным, а не электрическим переменным! Для упрощения записи опускаем знак усреднения по времени над $\widetilde{U}$.

[2]) Для прямого вывода формулы (101.24) следовало бы рассмотреть заполненный диэлектриком резонатор — вместо рассмотренного в § 81 колебательного контура. Вычислив изменение частоты при малом изменении диэлектрической проницаемости (ср. задачу 4 к § 90) и воспользовавшись теоремой об адиабатическом инварианте, найдем изменение энергии резонатора.

В отсутствие внешнего магнитного поля значение производной $\partial\eta_{ik}/\partial\mathbf{H}$ надо взять при $\mathbf{H} = 0$. С η_{ik} из (101.6) и (101.15) получим окончательно следующее выражение для намагниченности, создаваемой переменным электрическим полем:

$$M_l = -\frac{i}{16\pi} e_{ikm} f_{ml} D_i D_k^*; \tag{101.25}$$

она квадратична по электрическому полю. Если в отсутствие магнитного поля среда изотропна, то $f_{ml} = f\delta_{ml}$ и тогда

$$\mathbf{M} = -\frac{if}{16\pi}[\mathbf{D}\mathbf{D}^*]. \tag{101.26}$$

Для линейно поляризованного поля вектор $\mathbf{D}$ может отличаться от вещественного лишь фазовым множителем; тогда $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^*$ коллинеарны и выражение (101.25) или (101.26) обращается в нуль. Таким образом, намагничение возникает только под действием вращающегося электрического поля. Этот эффект в некотором смысле обратен эффекту вращения плоскости поляризации в магнитном поле и выражается через тот же тензор f_{ik}; его называют поэтому *обратным эффектом Фарадея.*

Задачи

1. Показать прямым расчетом, что направление среднего (по времени) вектора Пойнтинга в волне, распространяющейся в прозрачной гиротропной среде, совпадает с направлением групповой скорости.

Решение. Согласно (59.9а)

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\mathbf{E}^*\mathbf{H}],$$

причем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выражены в комплексном виде. Поступая аналогично выводу (97.16), умножаем равенства (97.15) соответственно на $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{H}^*$:

$$\mathbf{E}^*\delta\mathbf{D} = \mathbf{H}^*\delta\mathbf{H} + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]\delta\mathbf{n},$$

$$\mathbf{H}^*\delta\mathbf{H} = \mathbf{D}^*\delta\mathbf{E} + [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\delta\mathbf{n}.$$

Сложив их и заметив, что в силу эрмитовости тензора ε_{ik}: $\mathbf{E}^*\delta\mathbf{D} = \mathbf{D}^*\delta\mathbf{E}$, найдем требуемый результат:

$$\delta\mathbf{n}\cdot\operatorname{Re}[\mathbf{E}^*\mathbf{H}] = 0.$$

2. Определить направления лучей при преломлении падающего из пустоты луча на поверхности изотропного тела в магнитном поле.

Решение. Направление лучевого вектора $\mathbf{s}$ определяется нормалью к поверхности волновых векторов; дифференцируя левую часть уравнения (101.20) по компонентам вектора $\mathbf{n}$, найдем, что вектор $\mathbf{s}$ пропорционален $\mathbf{n} \pm \mathbf{g}/2n_0$. Квадрат этого выражения равен n_0^2; поэтому единичный вектор в направлении луча дается формулой

$$\frac{\mathbf{s}}{s} = \frac{1}{n_0}\left(\mathbf{n} \pm \frac{1}{2n_0}\mathbf{g}\right). \tag{1}$$

Обозначим угол падения через θ. Преломленные лучи не лежат, вообще говоря, в плоскости падения, и их направление определяется углом θ'

с направлением нормали к поверхности и азимутом φ', отсчитываемым от плоскости падения. Выберем последнюю в качестве плоскости xz с осью z, перпендикулярной к преломляющей поверхности. При преломлении остаются постоянными компоненты n_x, n_y волнового вектора. В падающем луче они равны $n_x = \sin\theta$, $n_y = 0$. Подставив эти значения в (1), найдем x- и y-компоненты единичного вектора $\mathbf{s}/s$, непосредственно дающие направление преломленных лучей:

$$\sin\theta'\cos\varphi' = \frac{1}{n_0}\sin\theta \pm \frac{1}{2n_0^2}g_x,$$

$$\sin\theta'\sin\varphi' = \pm\frac{1}{2n_0^2}g_y.$$

При не слишком малых углах падения малым является азимут φ' и можно написать

$$\varphi' = \pm\frac{g_y}{2n_0\sin\theta}, \quad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{n_0} \pm \frac{g_x}{2n_0^2}.$$

При нормальном падении ($\theta = 0$) выбираем плоскость xz, проходящей через вектор $\mathbf{g}$; тогда $\varphi' = 0$, а для θ' имеем

$$\theta' \approx \sin\theta' = \pm\frac{1}{2n_0^2}g_x.$$

Хотя в эту формулу и не входит g_z, но она неприменима, если $g_z = 0$, так как при взаимно перпендикулярных $\mathbf{n}$ и $\mathbf{g}$ недостаточно линейное приближение по полю.

3. Определить поляризацию отраженного света при нормальном падении линейно поляризованной волны из пустоты на поверхность изотропного тела в магнитном поле.

Р е ш е н и е. При нормальном падении направление волнового вектора остается неизменным при переходе волны во вторую среду. Поэтому во всех волнах (падающей, отраженной и преломленной) векторы $\mathbf{H}$ параллельны поверхности раздела (плоскость xy). Что же касается электрического вектора $\mathbf{E}$, то в падающей и отраженной волнах он тоже параллелен плоскости xy, а в преломленной волне, хотя $E_z \neq 0$, связь между x- и y-компонентами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ такая же, как в изотропном теле ($H_x = -nE_y$, $H_y = nE_x$). Если поляризация падающей волны совпадает с поляризацией одного из двух типов волн, которые могут распространяться в данной анизотропной (преломляющей) среде в данном направлении $\mathbf{n}$, то возникает всего одна преломленная волна с этой же поляризацией. В таких условиях задача формально не отличается от задачи об отражении от изотропного тела, и поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_0$ в отраженной и падающей волнах связаны друг с другом равенством

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1-n}{1+n}\mathbf{E}_0, \tag{1}$$

где n — соответствующий данной поляризации коэффициент преломления.

Линейную поляризацию можно рассматривать как результат сложения двух круговых поляризаций с противоположными направлениями вращения; если в падающей волне $\mathbf{E}_0$ направлен по оси x, то пишем $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^+ + \mathbf{E}_0^-$, где

$$E_{0x}^+ = iE_{0y}^+ = \frac{1}{2}E_0, \quad E_{0x}^- = -iE_{0y}^- = \frac{1}{2}E_0.$$

Воспользовавшись для каждой из волн $\mathbf{E}_0^+$, $\mathbf{E}_0^-$ формулой (1) с соответствующим $n_\pm$ из (101.19), получим

$$E_{1x} = \frac{E_0}{2}\left[\frac{1-n_+}{1+n_+} - \frac{1-n_-}{1+n_-}\right] \approx E_0\frac{1-n_0}{1+n_0},$$

$$E_{1y} = \frac{iE_0}{2}\left[\frac{1-n_-}{1+n_-} - \frac{1-n_+}{1+n_+}\right] \approx iE_0\frac{g\cos\theta}{n_0(1+n_0)^2}$$

(θ — угол между направлением падения и вектором $\mathbf{g}$). Отсюда видно, что отраженная волна эллиптически поляризована, причем большая ось эллипса расположена по оси x, а отношение малой оси к большой равно

$$\frac{g\cos\theta}{n_0(n_0^2-1)}.$$

4. Определить предельный закон зависимости вектора гирации от частоты при больших значениях последней.

Решение. Вычисления аналогичны произведенным в § 78, с той разницей, что в уравнение движения электрона (заряд $e=-|e|$) надо добавить лоренцеву силу от внешнего постоянного магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E}_0e^{-i\omega t} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{H}].$$

При соблюдении условия $\omega \gg |e|H/(mc)$ это уравнение можно решать последовательными приближениями. С точностью до члена первого порядка по $\mathbf{H}$ получим

$$\mathbf{v}' = \frac{ie}{m\omega}\mathbf{E} - \frac{e^2}{m^2\omega^2c}[\mathbf{EH}],$$

после чего найдем индукцию в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E} + if(\omega)[\mathbf{EH}],$$

где $\varepsilon(\omega)$ совпадает с (78.1), а

$$f(\omega) = -\frac{4\pi Ne^3}{cm^2\omega^3} = \frac{|e|}{2mc}\frac{d\varepsilon}{d\omega}$$

(*H. Becquerel*, 1897).

§ 102. Динамооптические явления

Наряду с электро- и магнитооптическими эффектами, существуют и другие случаи изменения оптической симметрии среды под влиянием внешних воздействий.

Сюда относится прежде всего влияние упругих деформаций на оптические свойства твердых тел. В частности, в результате деформации изотропное твердое тело может стать оптически анизотропным. Эти явления описываются введением в $\varepsilon_{ik}(\omega)$ дополнительных членов, пропорциональных компонентам тензора деформации. Соответствующие формулы имеют вид, совпадающий с формулами (16.1) и (16.6), которые были написаны для статической диэлектрической проницаемости, с той лишь разни-

цей, что стоящие в них коэффициенты являются теперь функциями частоты. Так, при деформации изотропного тела

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll}\delta_{ik}. \qquad (102.1)$$

Коэффициенты $a_1(\omega)$ и $a_2(\omega)$ называют *упругооптическими постоянными*.

Другой случай — это возникновение оптической анизотропии в неоднородно движущейся жидкости. Соответствующее общее выражение диэлектрического тензора

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + \lambda_1\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) + \frac{i}{2}\lambda_2\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) \qquad (102.2)$$

представляет собой первые члены разложения ε_{ik} по степеням производных скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Условие отсутствия поглощения (эрмитовость ε_{ik}) требует вещественности коэффициентов $\lambda_1(\omega)$ и $\lambda_2(\omega)$. Величина же $\varepsilon^0(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость неподвижной жидкости. В несжимаемой жидкости $\partial v_l/\partial x_l \equiv \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, и два последних члена в (102.2) дают при упрощении нуль.

При изучении электромагнитных свойств движущейся жидкости следует использовать совместно формулы электродинамики движущихся диэлектриков (76.9)–(76.11) (со скоростью $\mathbf{v}$, зависящей от координат) и выражение (102.2). При этом, однако, членами, содержащими одновременно скорость и ее производные, надо пренебрегать как лежащими за пределами точности формул.

Второй и третий члены в (102.2) соответственно симметричен и антисимметричен по индексам i, k. При вращении жидкости как целого $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{r}]$ ($\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения) и симметричный член обращается в нуль. Антисимметричный же член принимает вид $i\lambda_2 e_{ikl}\Omega_l$, т. е. среда становится гиротропной с вектором гирации

$$\mathbf{g} = \lambda_2\mathbf{\Omega}. \qquad (102.3)$$

В величину λ_2 вносят вклад два эффекта — дисперсия диэлектрической проницаемости и влияние на нее кориолисовых сил.

В системе отсчета, движущейся вместе с данным элементом жидкости, амплитуда $\mathbf{E}_0$ монохроматической (в лабораторной системе) волны вращается с угловой скоростью $-\mathbf{\Omega}$, т. е. становится функцией времени, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = -[\mathbf{\Omega}\mathbf{E}_0].$$

В этом смысле волна становится квазимонохроматической, и связь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в ней дается формулой

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E} + i\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega}\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}e^{-i\omega t} \qquad (102.4)$$

(вывод которой отличается от вывода формулы (80.10) лишь тем, что теперь $f(\omega) = \varepsilon(\omega)$). Подставив сюда значение производной $\partial \mathbf{E}_0/\partial t$ и сравнив результат с определением вектора гирации $\mathbf{g}$ в (101.16), найдем, что дисперсия дает в λ_2 вклад, равный $d\varepsilon^{(0)}/d\omega$ (*M.A. Player*, 1976).

Если теперь представить λ_2 в виде

$$\lambda_2 = \lambda_2^{(\text{к})} + \frac{d\varepsilon^{(0)}}{d\omega}, \qquad (102.5)$$

то $\lambda_2^{(\text{к})}$ будет связано только с кориолисовыми силами (линейными по $\mathbf{\Omega}$).

Как известно, во вращающейся системе отсчета роль гамильтониана системы играет разность

$$\widehat{\mathscr{H}}' = \widehat{\mathscr{H}} - \widehat{\mathscr{M}}_{\text{мех}}\mathbf{\Omega},$$

где $\widehat{\mathscr{H}}$ и $\widehat{\mathscr{M}}_{\text{мех}}$ — обычные операторы энергии и механического момента системы (см. V, § 34); диэлектрическая проницаемость вращающейся среды должна, в принципе, вычисляться по этому гамильтониану. Но это выражение аналогично гамильтониану системы в магнитном поле, написанному с точностью до линейных по $\mathbf{H}$ членов:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \widehat{\mathscr{H}_0} - \widehat{\mathscr{M}}\,\mathbf{H},$$

где $\widehat{\mathscr{M}}$ — оператор магнитного момента (см. III, § 113). Аналогия становится буквальной, если в данной области частот вклад в проницаемость возникает только от орбитального движения электронов в атомах. Тогда $\mathscr{M} = e/(2mc)\mathscr{M}_{\text{мех}}$ ($e = |e|$ — заряд электрона) и оба гамильтониана отличаются друг от друга только заменой $\mathbf{\Omega}$ на $e\mathbf{H}/(2mc)$. Ясно поэтому, что в таком случае будет

$$\lambda_2^{(\text{к})}(\omega) = \frac{2mc}{e} f(\omega), \qquad (102.6)$$

где $f(\omega)$ определено формулой (101.18) (*Н.Б. Баранова, Б.Я. Зельдович*, 1978) [1]).

Эффекты, связанные с коэффициентом λ_1, имеют заметную величину в таких объектах, как суспензии и коллоидальные растворы с анизотропными по форме частицами. При этом эффект

---

[1]) Подчеркнем в этой связи, что отличный от нуля коэффициент $\lambda_2^{(\text{к})}$ может существовать уже в классической (не квантовой) теории. Известное утверждение о независимости, в рамках классической теории, термодинамических свойств тел от кориолисовых сил при равномерном вращении (см. V, § 34) относится только к статистически равновесным свойствам. Диэлектрическая же проницаемость при $\omega \neq 0$ характеризует неравновесные, кинетические свойства тел.

связан с ориентирующим воздействием градиентов скорости на взвешенные в жидкости частицы. Равномерное вращение таким ориентирующим действием не обладает, поэтому в данном случае $\lambda_2 \ll \lambda_1$ и последний член в (102.2) может быть опущен. Описываемый же членом с λ_1 эффект называют *эффектом Максвелла*.

В заключение обратим внимание на то, что член с λ_1 в (102.2) не удовлетворяет обобщенному принципу симметрии кинетических коэффициентов, согласно которому должно было бы быть $\varepsilon_{ik}(\omega; \mathbf{v}) = \varepsilon_{ki}(\omega; -\mathbf{v})$ (поскольку $\mathbf{v}$ — параметр, меняющий знак при обращении времени). В этом, однако, нет необходимости. Дело в том, что вывод этого принципа предполагает, что процессы, описываемые рассматриваемыми коэффициентами, являются единственным источником диссипации энергии в системе. Но в данном случае наряду с диссипацией в переменном электромагнитном поле волны имеется еще и другой источник диссипации, не имеющий никакого отношения к полю — внутреннее трение в неоднородном потоке жидкости. С точки зрения теории обобщенных восприимчивостей член с λ_1 описывает отклик системы на нелинейное взаимодействие — вклад в индукцию одновременно от поля $\mathbf{E}$ и от градиентов скорости [1]). Равномерное же вращение жидкости как целого не связано с дополнительной диссипацией; поэтому член с λ_2 в (102.2), существующий и для такого вращения, удовлетворяет принципу симметрии: $\varepsilon_{ik}(\omega; \mathbf{\Omega}) = \varepsilon_{ki}(\omega; -\mathbf{\Omega})$.

З а д а ч а

Определить вращение плоскости поляризации волны, распространяющейся параллельно оси вращающегося диэлектрического тела.

Р е ш е н и е. Задача сводится к определению вектора гирации, который складывается аддитивно из двух частей: вклада (102.3) от изменения диэлектрической проницаемости и ее дисперсии и из «кинематической» части, связанной с присутствием скорости в соотношениях (76.10), (76.11); эту последнюю часть и надо вычислить.

В уравнениях Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{B}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{D}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \tag{1}$$

выражаем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ через $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ согласно соотношениям (76.10), (76.11) (с $\mu = 1$), после чего преобразуем их, применив к первому уравнению операцию rot и используя остальные уравнения. Получим:

$$\Delta \mathbf{D} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{D} + \frac{\varepsilon - 1}{c}\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathbf{vH}] + \frac{i\omega(\varepsilon - 1)}{c^2}\operatorname{rot}[\mathbf{Dv}] = 0 \tag{2}$$

[1]) Существуют, в принципе, и другие эффекты подобного рода. Так, в проводящей среде без центра инверсии допустимо существование в ε_{ik} псевдотензорных членов вида $\delta_{ik}\mathbf{EH}$ или $H_iE_k + H_kE_i$, где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — внешние постоянные поля (*Н.Б. Баранова, Ю.В. Богданов, Б.Я. Зельдович*, 1977). Важно, что эти члены, формально нарушающие принцип симметрии, возможны лишь в проводящей среде, где постоянное электрическое поле приводит к дополнительной диссипации.

(пишем здесь ε вместо $\varepsilon^{(0)}$, как это надо было бы писать в соответствии с обозначениями в тексте параграфа); поскольку все формулы справедливы лишь с точностью до членов первого порядка по $\mathbf{v}$, члены более высокого порядка опущены.

Два последних члена в уравнении (2) дают искомый эффект. Раскрываем их, подставив $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$; тогда

$$\operatorname{rot}[\mathbf{vH}] = -[\mathbf{H\Omega}], \quad \operatorname{rot}[\mathbf{Dv}] = [\mathbf{D\Omega}].$$

После осуществления этих дифференцирований координатная зависимость всех оставшихся величин сводится к множителям $e^{i\mathbf{kr}}$, причем $k \parallel \mathbf{\Omega}$ (по условию задачи). Наконец, заметив, что в нулевом приближении по $\mathbf{v}$ имеем обычные соотношения $\mathbf{H} = c[\mathbf{kE}]/\omega$, $k^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$, после вычисления приведем уравнение (2) к виду

$$\Delta\mathbf{D} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{D} + 2i\omega\frac{\varepsilon - 1}{c^2}[\mathbf{D\Omega}] = 0$$

или

$$\left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2}\right)\mathbf{D} - \frac{2i(\varepsilon - 1)}{\omega\varepsilon^2}[\mathbf{D\Omega}] = 0, \tag{3}$$

где $n_0^2 = \varepsilon$, а n — коэффициент преломления во вращающемся теле. Сравнив (3) с (101.11) и (101.17), найдем, что искомый «кинематический» вклад в вектор гирации равен

$$2(\varepsilon - 1)\frac{\mathbf{\Omega}}{\boldsymbol{\omega}}$$

(*E. Fermi*, 1923). Вращение плоскости поляризации волны определяется суммарным вектором

$$\mathbf{g} = \left\{\frac{2(\varepsilon - 1)}{\omega} + \frac{d\varepsilon}{d\omega} + \lambda_2^{(\text{к})}\right\}\mathbf{\Omega}.$$

Отметим, что в пределе больших частот, когда атомные электроны в веществе можно считать свободными, ε дается выражением (78.1), и первые два члена в скобках взаимно сокращаются.

ГЛАВА XII

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ

§ 103. Пространственная дисперсия

До сих пор при обсуждении диэлектрических свойств вещества мы предполагали, что значение индукции $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ определяется значениями напряженности электрического поля $\mathbf{E}(t', \mathbf{r})$ в той же точке пространства $\mathbf{r}$, хотя (при наличии дисперсии) и не только в тот же, но и во все предшествующие моменты времени $t' \leqslant t$. Такое предположение справедливо не всегда. В общем случае значение $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ зависит от значений $\mathbf{E}(t', \mathbf{r}')$ в некоторой области пространства вокруг точки $\mathbf{r}$. Линейная связь $\mathbf{D}$ с $\mathbf{E}$ записывается тогда в виде, обобщающем выражение (77.3):

$$D_i(t, \mathbf{r}) = E_i(t, \mathbf{r}) + \int\limits_0^\infty \int f_{ik}(\tau; \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_k(t - \tau, \mathbf{r}')\, dV'\, d\tau; \quad (103.1)$$

она представлена здесь сразу в форме, относящейся и к анизотропной среде. Такая *нелокальная* связь является проявлением, как говорят, *пространственной дисперсии* (в этой связи обычную — рассмотренную в § 77 — дисперсию называют *временно́й* или *частотной*). Для монохроматических компонент поля, зависимость которых от t дается множителями $e^{-i\omega t}$, эта связь принимает вид

$$D_i(\mathbf{r}) = E_i(\mathbf{r}) + \int f_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_k(\mathbf{r}')\, dV'. \quad (103.2)$$

Отметим сразу, что в большинстве случаев пространственная дисперсия играет гораздо меньшую роль, чем временная. Дело в том, что для обычных диэлектриков ядро f_{ik} интегрального оператора существенно убывает уже на расстояниях $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, больших только по сравнению с атомными размерами a. Между тем макроскопические поля, усредненные по физически бесконечно малым элементам объема, по определению должны мало меняться на расстояниях $\sim a$. В первом приближении можно тогда вынести $\mathbf{E}(\mathbf{r}') \approx \mathbf{E}(\mathbf{r})$ из-под знака интеграла по dV' в (103.1), в результате чего мы вернемся к (77.3). В таких случаях пространственная дисперсия может проявиться только в качестве

малых поправок. Но эти поправки, как мы увидим, могут приводить к качественно новым физическим явлениям и потому быть существенными.

Другая ситуация может иметь место в проводящих средах (металлы, растворы электролитов, плазма): движение свободных носителей тока приводит к нелокальности, простирающейся на расстояния, которые могут быть велики по сравнению с атомными размерами. В таких случаях существенная пространственная дисперсия может иметь место уже в рамках макроскопической теории[1]).

Проявлением пространственной дисперсии является и *доплеровское* уширение линии поглощения в газе. Если неподвижный атом имеет на частоте ω_0 линию поглощения с пренебрежимо малой шириной, то для движущегося атома эта частота сдвигается, в силу эффекта Доплера, на величину $\mathbf{kv}$, где $\mathbf{v}$ — скорость атома ($v \ll c$). Это приводит в спектре поглощения газа как целого к появлению линии ширины $\Delta\omega \sim kv_T$, где v_T — средняя тепловая скорость атомов. В свою очередь, такое уширение означает, что диэлектрическая проницаемость газа имеет существенную пространственную дисперсию при $k \gtrsim |\omega - \omega_0|/v_T$.

В связи с формой записи (103.1) необходимо сделать следующее замечание. Никакие соображения симметрии (пространственной или временной) не могут исключить возможности электрической поляризации диэлектрика в переменном неоднородном магнитном поле. В связи с этим может возникнуть вопрос о том, не следует ли дополнить правую часть равенства (103.1) или (103.2) членом с магнитным полем. В действительности, однако, в этом нет необходимости. Дело в том, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ нельзя считать полностью независимыми. Они связаны между собой (в монохроматическом случае) уравнением $\operatorname{rot}\mathbf{E} = \dfrac{i\omega}{c}\mathbf{B}$. В силу этого равенства зависимость $\mathbf{D}$ от $\mathbf{B}$ можно рассматривать как зависимость от пространственных производных $\mathbf{E}$, т. е. как одно из проявлений нелокальности.

При учете пространственной дисперсии представляется целесообразным, не умаляя степени общности теории, писать урав-

[1]) Для изотропной проводящей среды условия пренебрежения пространственной дисперсией могут оказаться различными для поперечной и продольной проницаемостей. В первом случае характерным расстоянием r_0, на котором ядро интеграла в (103.2) отлично от нуля, является меньшая из величин v/ω или l, где v — средняя скорость носителей тока, l — их длина свободного пробега. Для продольной проницаемости r_0 совпадает с меньшей из величин v/ω или $(lv/\omega)^{1/2}$ (последняя длина есть расстояние, которое носители тока проходят вдоль поля за счет диффузии за время $\sim 1/\omega$; коэффициент диффузии $D \sim lv$). Пространственная дисперсия несущественна, если $kr_0 \ll 1$.

нения Максвелла в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{103.3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \tag{103.4}$$

не вводя наряду со средней напряженностью магнитного поля $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$ еще и другую величину $\mathbf{H}$. Вместо этого все члены, возникающие в результате усреднения микроскопических токов, предполагаются включенными в определение $\mathbf{D}$. Использовавшееся ранее разделение среднего тока на две части согласно (79.3), вообще говоря, не однозначно. В отсутствие пространственной дисперсии оно фиксируется условием, чтобы $\mathbf{P}$ было электрической поляризацией, локальным образом связанной с $\mathbf{E}$. В отсутствие такой связи удобнее полагать $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ и

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \tag{103.5}$$

чему и отвечает представление уравнений Максвелла в виде (103.3), (103.4) [1]).

Компоненты тензора $f_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — ядра интегрального оператора в (103.2) — удовлетворяют соотношениям симметрии

$$f_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = f_{ki}(\omega; \mathbf{r}', \mathbf{r}). \tag{103.6}$$

Это следует из таких же рассуждений, которые были проведены в § 96 для тензора $\varepsilon_{ik}(\omega)$. Разница состоит только в том, что перестановка индексов a, b в обобщенных восприимчивостях α_{ab}, означающая перестановку как тензорных индексов i, k, так и точек $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, приводит теперь к перестановке соответствующих аргументов в функциях $f_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ [2]).

Ниже мы будем рассматривать неограниченную макроскопически однородную среду. В таком случае ядро интегрального опе-

[1]) В свете сказанного можно с несколько иной точки зрения взглянуть на сделанное в § 79 утверждение о потере смысла проницаемостью μ в области оптических частот. В этой области эффекты, связанные с отличием магнитной проницаемости от 1, вообще говоря, неотличимы от эффектов пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости. Вместе с тем следует иметь в виду, что принятое здесь определение $\mathbf{P}$, при котором $\mathbf{M} = 0$, не является единственным. Оно удобно в случае неограниченной однородной среды, о которой идет речь ниже в этой главе. В других случаях может оказаться целесообразным вводить $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ одновременно.

[2]) Как всегда при применении обобщенного принципа симметрии кинетических коэффициентов, если тело находится во внешнем магнитном поле или обладает магнитной структурой, правая часть соотношения (103.6) должна быть взята при измененном знаке поля или для обращенной по времени структуры.

ратора в (103.1) или (103.2) зависит только от разности $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Функции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ целесообразно разложить тогда в интеграл Фурье не только по времени, но и по координатам, сведя их к совокупности плоских волн, зависимость которых от $\mathbf{r}$ и t дается множителем $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$. Для таких волн связь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ принимает вид

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) E_k, \tag{103.7}$$

где

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ik} + \int_0^\infty \int f_{ik}(\tau, \boldsymbol{\rho}) e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\boldsymbol{\rho})}\, d^3\rho\, d\tau. \tag{103.8}$$

В таком описании пространственная дисперсия сводится к появлению зависимости тензора диэлектрической проницаемости от волнового вектора.

«Длина волны» $1/k$ определяет расстояния, на которых поле существенно меняется. Можно сказать поэтому, что пространственная дисперсия является выражением зависимости макроскопических свойств вещества от пространственной неоднородности электромагнитного поля, подобно тому, как частотная дисперсия выражает зависимость от временного изменения поля. При $k \to 0$ поле стремится к однородному, соответственно чему $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ стремится к обычной проницаемости $\varepsilon_{ik}(\omega)$ [1]).

Из определения (103.8) видно, что

$$\varepsilon_{ik}(-\omega, -\mathbf{k}) = \varepsilon^*_{ki}(\omega, \mathbf{k}) \tag{103.9}$$

— соотношение, обобщающее (77.7). Симметрия же (103.6), выраженная в терминах функций $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$, дает теперь

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}; \mathfrak{H}) = \varepsilon_{ki}(\boldsymbol{\omega}, -\mathbf{k}; -\mathfrak{H}), \tag{103.10}$$

где в явном виде выписан параметр $\mathfrak{H}$ — внешнее магнитное поле, если таковое имеется. Если среда обладает центром инверсии, компоненты ε_{ik} являются четными функциями вектора $\mathbf{k}$; аксиальный же вектор при инверсии не меняется и потому равенство (103.10) сводится к

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}; \mathfrak{H}) = \varepsilon_{ki}(\omega, \mathbf{k}; -\mathfrak{H}). \tag{103.11}$$

Пространственная дисперсия не сказывается на выводе формулы (96.5) для диссипации энергии. Поэтому условие отсутствия поглощения по-прежнему выражается эрмитовостью тензора $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$.

[1]) Более точно — зависимость от $\mathbf{k}$ исчезает при $kr_0 \ll 1$, где r_0 — размеры области, в которой $f_{ik}(\omega, \boldsymbol{\rho})$ существенно отлично от нуля.

При наличии пространственной дисперсии диэлектрическая проницаемость является тензором (а не скаляром) даже в изотропной среде: выделенное направление создается волновым вектором. Если среда не только изотропна, но обладает также и центром инверсии, тензор ε_{ik} может быть составлен только из компонент вектора $\mathbf{k}$ и единичного тензора δ_{ik} (при отсутствии центра симметрии может стать возможным также и член с единичным антисимметричным тензором e_{ikl}; см. § 104). Общий вид такого тензора можно записать как

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_t(\omega, k)\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right) + \varepsilon_l(\omega, k)\frac{k_i k_k}{k^2}, \qquad (103.12)$$

где ε_t и ε_l зависят только от абсолютной величины волнового вектора (и от ω). Если напряженность $\mathbf{E}$ направлена по волновому вектору, то индукция $\mathbf{D} = \varepsilon_l \mathbf{E}$; если же $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, то $\mathbf{D} = \varepsilon_t \mathbf{E}$. Соответственно, величины ε_l и ε_t называют *продольной* и *поперечной проницаемостями.* При $\mathbf{k} \to 0$ выражение (103.12) должно стремиться к значению $\varepsilon(\omega)\delta_{ik}$, не зависящему от направления $\mathbf{k}$; ясно поэтому, что

$$\varepsilon_l(\omega, 0) = \varepsilon_t(\omega, 0) = \varepsilon(\omega). \qquad (103.13)$$

Описание электромагнитных свойств изотропной среды с помощью проницаемостей ε_l и ε_t отвечает уравнениям Максвелла, представленным в виде (103.3), (103.4). С другой стороны, при $\mathbf{k} \to 0$, когда пространственная дисперсия исчезает, можно вернуться к описанию с помощью проницаемостей ε и μ. Поэтому между теми и другими величинами существует определенная связь (см. задачу 1).

Аналогия между формулами (103.8) и (77.5) позволяет перенести на каждую из компонент $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ как функцию комплексной переменной ω результаты исследования аналитических свойств, произведенного в § 77, 82. Они являются аналитическими функциями, не имеющими особенностей в верхней полуплоскости ω, и удовлетворяют (при каждом фиксированном значении $\mathbf{k}$) дисперсионным соотношениям Крамерса–Кронига. То же самое относится и к функциям $\varepsilon_l(\omega, k)$ и $\varepsilon_t(\omega, k)$ в (103.12). При этом надо иметь в виду, что функция ε_l при $k \neq 0$ не стремится при $\omega \to 0$ к бесконечности даже в проводящей среде, и потому вычитание (которое было необходимо при выводе (82.9)) здесь не требуется; обращение $\varepsilon(\omega)$ в проводнике в бесконечность при $\omega \to 0$ связано с однородностью ($\mathbf{k} = 0$) статического поля.

Средняя по времени (в объясненном в § 80 смысле) плотность энергии электромагнитного поля в прозрачной среде с пространственной дисперсией выражается прежней формулой (96.6); по-

скольку теперь $\mu \equiv 1$, то

$$\overline{U} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial(\omega\varepsilon_{ik})}{\partial\omega}E_i E_k^* + |\mathbf{B}|^2\right] \tag{103.14}$$

($\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ предполагаются представленными в комплексном виде). В плотности же потока энергии в такой среде появляется дополнительный член:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{E}^*\mathbf{B}] - \frac{\omega}{16\pi}\frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial\mathbf{k}}E_i^* E_k. \tag{103.15}$$

Эта формула выводится путем обобщения вывода формулы (80.11): теперь надо рассматривать волну, размытую как по небольшому интервалу частот, так и по направлениям волнового вектора (см. задачу 2).

Задачи

1. Найти связь между функциями $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ и предельными значениями функций $\varepsilon_l(\omega, k)$, $\varepsilon_t(\omega, k)$ при $k \to 0$.

Решение. Сравним выражения усредненного микроскопического тока $\overline{\rho\mathbf{v}}$ в виде (103.5) и (79.3). Для монохроматического поля имеем в первом случае

$$\overline{\rho v_i} = -\frac{i\omega}{4\pi}[\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ik}]E_k,$$

а во втором:

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = -\frac{i\omega}{4\pi}[\varepsilon(\omega) - 1]\mathbf{E} + \frac{ic}{4\pi}[\mu(\omega) - 1][\mathbf{kH}].$$

Подставив в первое выражение $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ из (103.12), а во второе $\mathbf{H} = (c/\omega\mu)[\mathbf{kE}]$ согласно уравнению Максвелла и приравняв оба выражения друг другу, получим равенство

$$\varepsilon_t(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega) + k^2(c^2/\omega^2)\left(1 - 1/\mu(\omega)\right), \quad \varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega).$$

Из этой формулы видно, что наличие магнитной восприимчивости приводит к появлению пропорционального k^2 члена в ε_t. Существенно, однако, что в ε_t и ε_l имеются, вообще говоря, и другие члены порядка k^2. Введение магнитной восприимчивости имеет смысл, если содержащий μ член является основным. Ввиду наличия ω^2 в знаменателе, это заведомо имеет место при $\omega \to 0$. На высоких частотах, напротив, введение μ не имеет смысла, как это уже было объяснено в § 79.

2. Вывести формулу (103.15) для средней (по времени) плотности потока энергии в среде с пространственной дисперсией.

Решение. Исходим, как и в § 80, из равенства (80.2), положив в нем $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ (в соответствии с описанием поля уравнениями (103.3), (103.4)), представив все величины в комплексном виде и усреднив по времени:

$$-\,\mathrm{div}\,\frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{EH}^*] = \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}^*\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B}^*\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right). \tag{1}$$

Рассматриваем почти монохроматическую плоскую волну, в которой

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)},$$

где $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$ — функция, медленно меняющаяся в пространстве и во времени. Производную $\partial D_i/\partial t$ пишем в виде $\widehat{f}_{ik}E_k$, введя оператор

$$\widehat{f}_{ik} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{ik}; \tag{2}$$

при воздействии на строго монохроматическую во времени и пространстве волну:

$$\widehat{f}_{ik}E_k = f_{ik}E_k = -i\omega\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})E_k.$$

Разложив $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$ в интеграл Фурье по времени и координатам, представим ее в виде наложения компонент вида

$$\mathbf{E}_{0\alpha\mathbf{q}}e^{i(\mathbf{qr}-\alpha t)},$$

причем $\alpha \ll \omega_0$, $\mathbf{q} \ll \mathbf{k}_0$. Далее поступаем, как при выводе формулы (80.10). Воздействуя оператором (2) на функцию

$$\mathbf{E}_{\omega_0+\alpha,\mathbf{k}_0+\mathbf{q}} = \mathbf{E}_{0\alpha\mathbf{q}} \exp\left[i(\mathbf{k}_0+\mathbf{q})\mathbf{r} - i(\omega_0+\alpha)t\right],$$

пишем:

$$\widehat{f}_{ik}\mathbf{E}_{\omega_0+\alpha,\mathbf{k}_0+\mathbf{q}} = f_{ik}(\omega_0+\alpha, \mathbf{k}_0+\mathbf{q})\mathbf{E}_{\omega_0+\alpha,\mathbf{k}_0+\mathbf{q}} \approx$$
$$\approx \left[f_{ik}(\omega_0, \mathbf{k}_0) + \alpha\frac{\partial f_{ik}(\omega_0, \mathbf{k}_0)}{\partial\omega_0} + \mathbf{q}\frac{\partial f_{ik}(\omega_0, \mathbf{k}_0)}{\partial\mathbf{k}_0}\right]\mathbf{E}_{\omega_0+\alpha,\mathbf{k}_0+\mathbf{q}}.$$

Произведя теперь обратное суммирование компонент Фурье, подставив $f_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = -i\omega\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ и опустив индекс 0 у ω_0 и $\mathbf{k}_0$, получим

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} = -i\omega\varepsilon_{ik}E_k + \left[\frac{\partial(\omega\varepsilon_{ik})}{\partial\omega}\frac{\partial E_{0k}}{\partial t} - \omega\frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial\mathbf{k}}\nabla E_{0k}\right]e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}. \qquad (3)$$

Второй член в квадратных скобках отличает это выражение от (80.10). Подставив (3) в равенство (1), приведем последнее к виду закона сохранения энергии

$$\frac{\partial\overline{U}}{\partial t} = -\operatorname{div}\overline{\mathbf{S}}$$

с $\overline{U}$ и $\overline{\mathbf{S}}$ из (103.14), (103.15).

§ 104. Естественная оптическая активность

Если пространственная дисперсия слаба, тензор $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ можно разложить по степеням $\mathbf{k}$. Для обычных конденсированных диэлектрических сред это есть разложение по степеням a/λ, где a — атомные размеры, λ — длина волны поля.

С точностью до членов первого порядка малости такое разложение имеет вид

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ik}^{(0)}(\omega) + i\gamma_{ikl}k_l, \qquad (104.1)$$

где $\varepsilon_{ik}^{(0)} = \varepsilon_{ik}(\omega, 0)$, а γ_{ikl} — некоторый тензор третьего ранга, зависящий от частоты (при $\omega \to 0$ компоненты этого тензора, не связанного с каким-либо разложением по ω, стремятся к постоянным значениям). Отвечающая проницаемости (104.1) связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в монохроматическом ($\backsim e^{-i\omega t}$) поле в координатном представлении имеет вид

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(0)}E_k + \gamma_{ikl}\frac{\partial E_k}{\partial x_l}. \qquad (104.2)$$

Применив к (104.1) требование симметрии (103.10), найдем (в отсутствие внешнего поля):

$$\gamma_{ikl}(\omega) = -\gamma_{kil}(\omega). \tag{104.3}$$

Условие же эрмитовости в отсутствие диссипации дает $\gamma^*_{ikl} = -\gamma_{kil}$; вместе с (104.3) отсюда находим, что $\gamma^*_{ikl} = \gamma_{ikl}$. Таким образом, условие отсутствия поглощения требует вещественности тензора γ_{ikl}.

Если, следуя введенным в § 97 обозначениям, представить волновой вектор плоской волны в виде $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$, выражение (104.1) запишется в виде

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}_{ik} + i\frac{\omega}{c}\gamma_{ikl}n_l. \tag{104.4}$$

Введем вместо антисимметричного тензора второго ранга $\gamma_{ikl}n_l$ дуальный ему аксиальный *вектор гирации* $\mathbf{g}$ согласно

$$\frac{\omega}{c}\gamma_{ikl}n_l = e_{ikl}g_l, \tag{104.5}$$

т. е. напишем ε_{ik} в виде

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}_{ik} + ie_{ikl}g_l, \tag{104.6}$$

формально совпадающем с использованной в § 101 формой записи. Разница заключается в том, что там вектор $\mathbf{g}$ зависел только от свойств среды (и приложенного магнитного поля), между тем как здесь вектор гирации зависит и от волнового вектора поля. Согласно (104.5) компоненты этого вектора являются линейными функциями компонент $\mathbf{n}$:

$$g_i = g_{ik}n_k. \tag{104.7}$$

Подставив (104.7) в (104.5), найдем

$$\frac{\omega}{c}\gamma_{ikl}n_l = e_{ikm}g_{ml}n_l,$$

откуда ввиду произвольности $\mathbf{n}$

$$\frac{\omega}{c}\gamma_{ikl} = e_{ikm}g_{ml}, \tag{104.8}$$

чем устанавливается связь между компонентами истинного тензора третьего ранга γ_{ikl} и псевдотензора второго ранга g_{ik} [1]).

Конкретная кристаллографическая симметрия тела накладывает определенные ограничения на компоненты тензора γ_{ikl}

[1]) В компонентах

$$g_{xx} = \frac{\omega}{c}\gamma_{yzx}, \quad g_{xy} = \frac{\omega}{c}\gamma_{yzy}, \quad g_{yx} = \frac{\omega}{c}\gamma_{zxx} \quad \text{и т. д.}$$

(или g_{ik}) и, в частности, может приводить к тождественному равенству нулю всех компонент. Так, тензор γ_{ikl} не может существовать у тел, обладающих центром симметрии. Действительно, при изменении знака всех трех координат (инверсии) все компоненты тензора третьего ранга (и соответственно псевдотензора второго ранга) меняют знак, между тем как симметрия тела требовала бы их неизменности при этом преобразовании.

О телах с отличным от нуля тензором g_{ik} говорят, что они обладают *естественной оптической активностью* или *естественной гиротропией*. Таким образом, существование оптической активности во всяком случае требует отсутствия у тела центра симметрии.

Рассмотрим сначала естественную оптическую активность изотропных тел. Если жидкость (или газ) состоит из вещества, не имеющего стереоизомеров, то она симметрична не только по отношению к любому повороту, но и по отношению к отражению (инверсии) в любой точке, и естественная активность в ней исключена. Оптически активными являются лишь жидкости из веществ с двумя стереоизомерными формами, причем оба изомера должны содержаться в жидкости в различных количествах; такая жидкость не обладает центром симметрии.

В изотропном теле (а также в кристаллах с кубической симметрией) псевдотензор g_{ik} сводится к псевдоскаляру:

$$g_{ik} = f\delta_{ik}, \quad \gamma_{ikl} = \frac{c}{\omega} f e_{ikl}. \tag{104.9}$$

Псевдоскаляр есть величина, меняющая знак при инверсии координат. Два стереоизомерных вещества формально переходят друг в друга в результате операции инверсии; поэтому их значения величины f имеют противоположные знаки.

Таким образом, у оптически активного изотропного тела вектор гирации $\mathbf{g} = f\mathbf{n}$, и связь между индукцией и напряженностью электрического поля волны дается формулой

$$\mathbf{D} = \varepsilon^{(0)}\mathbf{E} + if[\mathbf{En}]. \tag{104.10}$$

Так как $\mathbf{Dn} = 0$, то отсюда следует, что и $\mathbf{En} = 0$. Другими словами, в такой волне поперечна (по отношению к направлению $\mathbf{n}$) не только индукция $\mathbf{D}$, как во всякой среде, но и напряженность $\mathbf{E}$.

Изменение показателя преломления n при учете естественной активности вещества является малой величиной. Поэтому при ее определении можно положить в малом члене $[\mathbf{Eg}]$ в (104.10) $n = n_0 = \sqrt{\varepsilon^{(0)}}$. Тогда задача о вычислении разности $n - n_0$ формально совпадает с рассмотренной в § 101 задачей об изменении n под влиянием магнитного поля, отличаясь от нее лишь смыслом вектора $\mathbf{g}$ и тем, что он всегда параллелен направлению

n (ось z в § 101). Поэтому по аналогии с формулой (101.19) мы можем сразу написать

$$n_{\pm}^2 = n_0^2 \pm g = n_0^2 \pm f n_0. \tag{104.11}$$

Этим двум значениям соответствуют (ср. (101.21)) следующие отношения обеих компонент вектора **E** (или **D**):

$$E_x = \pm i E_y, \tag{104.12}$$

т. е. круговая левая и правая поляризация волн. Отметим также, что величина вектора **n** не зависит от его направления; поэтому направления **n** и лучевого вектора **s** совпадают.

Таким образом, мы видим, что оптические свойства естественно-активного изотропного тела имеют сходство со свойствами, приобретаемыми неактивным телом в магнитном поле: оно обладает двойным круговым преломлением, а при распространении в нем линейно поляризованной волны происходит вращение ее плоскости поляризации. Угол вращения на единицу длины пути луча равен $\omega f/2c$.

У двух стереоизомерных модификаций вещества знак постоянной f, а с нею и направления вращения, противоположен; в связи с этим говорят о *право-* и *левовращающих стереоизомерах.*

В отличие от вращения плоскости поляризации в магнитном поле, в естественно-активных веществах величина и знак вращения не зависят от направления распространения луча. Поэтому, если линейно поляризованный световой луч проходит дважды — туда и обратно — один и тот же путь в естественно-активной среде, то в результате он окажется поляризованным в первоначальной плоскости.

Перейдем к естественно-активным кристаллам. Не входя здесь в систематический разбор всех возможных случаев симметрии (см. задачу к этому параграфу), отметим, что естественная активность исключается наличием центра симметрии, но она возможна при существовании плоскости симметрии или зеркально-поворотной оси. Подчеркнем, что условия существования естественной активности у кристаллов не совпадают, следовательно, с условиями, допускающими существование кристаллов в двух зеркально-изомерных (*энантиоморфных*) формах; последние являются более жесткими и требуют отсутствия не только центра, но и плоскостей симметрии. Таким образом, кристалл может быть оптически активным и в то же время совпадать со своим зеркальным изображением.

В естественно-активном кристалле (одно- или двухосном) при распространении света с произвольным направлением волнового вектора мы имеем дело практически с обычным двойным преломлением линейно поляризованных волн; учет активности сводится в основном к замене строго линейной поляризации на эл-

липтическую с малым (первого порядка малости) отношением осей.

Исключение составляют лишь направления оптических осей, вдоль которых, без учета активности, оба корня уравнения Френеля совпадают. В этих направлениях явление естественной активности кристаллов аналогично активности изотропных тел: имеет место двойное круговое преломление первого порядка и соответственное вращение плоскости поляризации линейно поляризованных волн. При отклонении волнового вектора от направления оптической оси эти явления быстро спадают.

Для количественного расчета явлений естественной активности в кристаллах удобнее пользоваться не выражением $\mathbf{D}$ через $\mathbf{E}$, а обратными формулами, выражающими $\mathbf{E}$ через $\mathbf{D}$ (как мы это делали и в § 101). С точностью до величин первого порядка эти формулы гласят:

$$E_i = \varepsilon_{ik}^{(0)-1} D_k + i[\mathbf{DG}]_i, \tag{104.13}$$

где вектор $\mathbf{G}$ связан с ранее введенным вектором $\mathbf{g}$ соотношением

$$G_i = -\frac{1}{|\varepsilon^{(0)}|}\varepsilon_{ik}^{(0)} g_k$$

(см. (101.9)). Ввиду формального совпадения этого выражения с выражением (101.7) остаются без изменения также и уравнения (101.11), (101.12). В этих уравнениях G_z есть проекция вектора $\mathbf{G}$ на направление $\mathbf{n}$. Если представить $\mathbf{G}$ в виде

$$G_i = G_{ik} n_k \tag{104.14}$$

(аналогичном (104.7)), то эта проекция пропорциональна

$$\mathbf{nG} = G_{ik} n_i n_k. \tag{104.15}$$

Этой квадратичной формой определяются оптические свойства естественно-активного кристалла. Сам по себе тензор G_{ik} не должен обязательно быть симметричным, но если разделить его на симметричную и антисимметричную части, то при образовании формы (104.15) антисимметричная часть выпадает. Поэтому при исследовании оптических свойств естественно-активных кристаллов можно считать тензор G_{ik} симметричным.

Задача

Найти ограничения, налагаемые кристаллической симметрией на компоненты тензора G_{ik}.

Решение. При всяком повороте псевдотензор G_{ik} ведет себя как истинный тензор; в частности, наличие оси симметрии выше второго порядка приводит, как и для истинного симметричного тензора второго ранга, к полной изотропии в плоскости, перпендикулярной к оси. Поведение же псевдотензора G_{ik} при отражениях определяется тем, что он дуален истинному тензору третьего ранга: при всяком отражении, меняющем знак компоненты

истинного тензора второго ранга, такая же компонента G_{ik} остается неизменной, и наоборот. Так, при отражении в плоскости yz компоненты G_{xx}, G_{zz}, G_{yz} меняют знак, а G_{xy}, G_{xz} остаются неизменными.

Ниже указаны неисчезающие компоненты тензора G_{ik} для всех кристаллических классов, допускающих естественную активность. Ось z выбрана вдоль оси симметрии третьего, четвертого или шестого порядка или вдоль единственной оси второго порядка (в классах $\boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{C}_{2v}$), а в классе $\boldsymbol{C}_s$ — перпендикулярно к плоскости симметрии; при наличии трех взаимно перпендикулярных осей симметрии координатные оси совпадают с ними.

Класс $\boldsymbol{C}_1$: все компоненты G_{ik}.

Класс $\boldsymbol{C}_2$: G_{xx}, G_{yy}, G_{zz}, G_{xy}; надлежащим выбором осей x, y можно обратить G_{xy} в нуль.

Класс $\boldsymbol{C}_s$: G_{xz}, G_{yz}; надлежащим выбором осей x, y можно обратить одну из этих величин в нуль.

Класс $\boldsymbol{C}_{2v}$: G_{xy} (плоскости xz и yz совпадают с плоскостями симметрии).

Класс $\boldsymbol{D}_2$: G_{xx}, G_{yy}, G_{zz}.

Классы $\boldsymbol{C}_3$, $\boldsymbol{C}_4$, $\boldsymbol{C}_6$, $\boldsymbol{D}_3$, $\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{D}_6$: $G_{xx} = G_{yy}$, G_{zz}.

Класс $\boldsymbol{S}_4$: $G_{xx} = -G_{yy}$, G_{xy}; надлежащим выбором осей x, y можно обратить одну из этих величин в нуль.

Класс $\boldsymbol{D}_{2d}$: G_{xy} (оси x, y лежат в вертикальных плоскостях симметрии).

Классы $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{O}$: $G_{xx} = G_{yy} = G_{zz}$.

Отметим, что в одноосных кристаллах классов $\boldsymbol{S}_4$ и $\boldsymbol{D}_{2d}$ скаляр (104.15) обращается в нуль, если вектор $\mathbf{n}$ направлен вдоль оси z, поскольку $G_{zz} = 0$. Это значит, что в этих кристаллах отсутствуют эффекты естественной активности вдоль оптической оси.

В двухосном кристалле класса $\boldsymbol{C}_{2v}$ оптические оси лежат в одной из плоскостей симметрии. Но для векторов $\mathbf{n}$, лежащих в плоскостях xz или yz, скаляр (104.15) в данном случае тоже обращается в нуль, так что и здесь эффекты вдоль оптических осей отсутствуют. Единственным кристаллическим классом, допускающим явление вращения плоскости поляризации вдоль оптической оси и в то же время не допускающим энантиоморфизм, является моноклинный класс $\boldsymbol{C}_s$.

§ 105. Пространственная дисперсия в оптически неактивных средах

В кристаллах, симметрия которых не допускает естественной оптической активности, первые (после нулевого) члены разложения проницаемости $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ по степеням $\mathbf{k}$ оказываются квадратичными.

Как обычно в кристаллооптике, для дальнейшего использования удобнее писать это разложение для обратного тензора $\eta_{ik} = \varepsilon_{ik}^{-1}$. Напишем его в виде

$$\eta_{ik} = \eta_{ik}^{(0)}(\omega) + \beta_{iklm}(\omega) k_l k_m. \tag{105.1}$$

Тензор β_{iklm} можно считать симметричным по второй паре индексов, поскольку он умножается на симметричное произведение $k_l k_m$. В силу же (103.10) (с $\mathfrak{H} = 0$) тензор β_{iklm} симметричен и по первой паре индексов:

$$\beta_{iklm} = \beta_{kilm} = \beta_{ikml}. \tag{105.2}$$

Он, однако, не должен быть симметричным по отношению к перестановке обеих пар. В отсутствие поглощения из эрмитовости тензора η_{ik} и его симметричности следует, что тензор β_{iklm} вещественен, что и предполагается ниже.

В изотропной среде тензор β_{iklm} должен выражаться только через единичный тензор, т. е. имеет вид

$$\beta_{iklm} = \beta_1 \delta_{ik} \delta_{lm} + \frac{\beta_2}{2}(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{kl}\delta_{im});$$

он содержит только две независимые компоненты. В изотропном теле также и $\eta_{ik}^{(0)} = \eta^{(0)}\delta_{ik}$ и, таким образом, тензор (105.1) принимает вид

$$\eta_{ik} = (\eta^{(0)} + \beta_1 k^2)\delta_{ik} + \beta_2 k_i k_k, \tag{105.3}$$

в соответствии с общим выражением (103.12) диэлектрического тензора в изотропной среде с пространственной дисперсией. Распространение волн в среде определяется уравнениями (97.21). Но при подстановке (105.3) в эти уравнения анизотропный член с β_2 выпадает ввиду ортогональности векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{k}$ в плоской волне, т. е. среда остается, как и должно быть, оптически изотропной.

Но уже в кубических кристаллах тензор β_{iklm} не сводится к единичному тензору; в зависимости от кристаллического класса он имеет для этих кристаллов 3 или 4 независимые компоненты. Без учета пространственной дисперсии кубические кристаллы оптически изотропны; учет квадратичной по $\mathbf{k}$ дисперсии приводит к появлению в них нового свойства — оптической анизотропии (*H.A. Lorentz*, 1878).

В кубическом кристалле $\eta_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}\varepsilon^{(0)}$ и разложение (105.1) принимает вид

$$\eta_{ik} = \frac{1}{\varepsilon^{(0)}}\delta_{ik} + \delta_{iklm} k_l k_m. \tag{105.4}$$

Подставив это выражение в уравнения (97.21), получим

$$\left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)\delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\beta_{\alpha\beta\,33}\right] D_\beta = 0, \tag{105.5}$$

где $n_0^2 = \varepsilon^{(0)}$, а ось x_3 декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 направлена вдоль волнового вектора. По смыслу разложения (105.4), второй член в квадратных скобках в этих уравнениях надо рассматривать как малую поправку (об особом случае обращения $1/n_0^2$ в нуль см. § 106). Тогда в нем можно заменить n^2 на n_0^2:

$$\left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)\delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2 n_0^2}{c^2}\beta_{\alpha\beta\,33}\right] D_\beta = 0. \tag{105.6}$$

Эти уравнения — такого же вида, как и для волн в некубическом кристалле без учета пространственной дисперсии. Их определитель представляет собой квадратное по n^{-2} уравнение, определяющее показатели преломления двух волн с одинаковым направлением $\mathbf{k}$ и различными поляризациями. Таким образом, пространственная дисперсия в кубическом кристалле снимает «вырождение по поляризации» — скорости двух волн становятся различными и зависящими от направления.

В конце § 84 была упомянута возможность существования продольных электромагнитных волн в прозрачной изотропной среде. Последовательная формулировка условия, определяющего связь между частотой и волновым вектором (закон дисперсии) этих волн, требует учета пространственной дисперсии; оно гласит

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 0. \tag{105.7}$$

При малых k решение этого уравнения имеет вид

$$\omega(k) = \omega_{l0} + \frac{1}{2}\alpha k^2, \tag{105.8}$$

где α — постоянная, а ω_{l0} — значение частоты, обращающее в нуль проницаемость $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_l(\omega, 0)$. При этом скорость распространения волны

$$\mathbf{u} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \alpha\mathbf{k} \tag{105.9}$$

пропорциональна первой степени волнового вектора.

Задача

Найти соотношения между компонентами тензора β_{iklm} в негиротропных кристаллах кубической системы.

Решение. Естественная гиротропия отсутствует в кристаллических классах $\boldsymbol{T}_d$, $\boldsymbol{T}_h$, $\boldsymbol{O}_h$.

В классах $\boldsymbol{T}_d$ и $\boldsymbol{T}_h$ выбираем оси x, y, z по трем осям симметрии 2-го порядка. Отличные от нуля компоненты тензора:

$$\beta_1 \equiv \beta_{xxxx} = \beta_{yyyy} = \beta_{zzzz}, \quad \beta_2 \equiv \beta_{xxzz} = \beta_{yyxx} = \beta_{zzyy},$$
$$\beta_3 \equiv \beta_{xyxy} = \beta_{yzyz} = \beta_{zxzx}, \quad \beta_4 \equiv \beta_{zzxx} = \beta_{xxyy} = \beta_{yyzz}.$$

В классе $\boldsymbol{O}_h$ три оси C_2 становятся осями C_4, в результате чего дополнительно становится $\beta_2 = \beta_4$.

§ 106. Пространственная дисперсия вблизи линии поглощения

В двух предыдущих параграфах эффекты пространственной дисперсии рассматривались как малые поправки, как это обычно и имеет место. Ситуация меняется, однако, вблизи узкой линии поглощения в кристалле, где согласно (84.7) $\varepsilon^{(0)}(\omega)$ резко возрас-

тает. В этой области учет пространственной дисперсии меняет картину даже качественно.

Дело в том, что добавление в диэлектрическую проницаемость членов со степенями k повышает порядок алгебраического дисперсионного уравнения, определяющего зависимость $k(\omega)$. Поэтому при формальном его решении возникают дополнительные корни. Вдали от линии поглощения эти корни лежат в области больших k, т. е. вне области применимости теории, и потому должны быть отброшены. Но вблизи линии поглощения проницаемость меняется существенно уже при малых k и могут возникнуть дополнительные корни, имеющие реальный физический смысл, т. е. возникают новые поперечные волны.

Мы ограничимся, для простоты, рассмотрением изотропных сред и начнем со случая, когда среда не гиротропна — не обладает естественной оптической активностью (*С.И. Пекар*, 1957; *В.Л. Гинзбург*, 1958).

Как уже было указано в предыдущем параграфе, изотропная среда остается оптически изотропной и при учете пространственной дисперсии. Это значит, что закон дисперсии поперечных электромагнитных волн в такой среде дается обычным уравнением $n^2 = \varepsilon$, причем под ε надо понимать поперечную проницаемость ε_t:

$$n^2 = \varepsilon_t(\omega, k). \tag{106.1}$$

В § 103 было указано, что как функции частоты $\varepsilon_t(\omega, k)$ и $\varepsilon_l(\omega, k)$ удовлетворяют тем же соотношениям Крамерса–Кронига, что и функция $\varepsilon(\omega)$ без пространственной дисперсии. Поэтому можно утверждать, что вблизи линии поглощения функция $\varepsilon_t(\omega, k)$ имеет такой же вид, как и в (84.7), но с постоянными, зависящими от k; запишем ее в виде

$$\varepsilon_t(\omega, k) = \frac{A(k)}{\omega_t(k) - \omega}, \quad A(k) > 0.$$

Если величина A относительно мала[1]), то может иметь смысл учесть, наряду с полюсным членом, также и постоянный (не зависящий от ω) член в ε_t; обозначим его через $a(k)$ и будем считать, что $a > 0$, т. е. вдали от линии поглощения среда оптически прозрачна. Теоретическая допустимость одновременного учета постоянного и полюсного членов в ε_t требует, чтобы они сравнивались друг с другом в области частот $|\omega - \omega_t| \ll \omega_t$, где только и применимо полюсное выражение; другими словами, должно быть $A \ll a\omega_t$.

[1]) Например, в силу каких-либо приближенных правил отбора, уменьшающих матричные элементы, определяющие значение A.

Поскольку k по-прежнему предполагается малым, можно разложить функции по его степеням. При этом достаточно заменить $a(k)$ и $A(k)$ постоянными значениями $a \equiv a(0) > 0$, $A \equiv A(0) > 0$, оставив поправочный член лишь в разложении функции $\omega_t(k)$ в малой разности $\omega_t - \omega$:

$$\omega_t(k) \approx \omega_0 + \nu k^2.$$

Тогда проницаемость:

$$\varepsilon_t(\omega, k) = a + \frac{A}{\omega_0 + \nu k^2 - \omega}. \tag{106.2}$$

Отметим, что это выражение как функция частоты проходит через нуль в области $\omega > \omega_t$. При $k = 0$ это происходит при $\omega = \omega_{l0} = \omega_0 + A/a$. Поскольку при $k = 0$ проницаемости ε_t и ε_l совпадают, то ω_{l0} есть предельная (при $k \to 0$) частота продольной волны (ср. (105.8)). Корень же функции $\varepsilon_t(\omega, k)$ при $k \neq 0$ прямого физического смысла не имеет.

Дисперсионное уравнение (106.1) принимает теперь вид

$$(n^2 - a)(\beta n^2 - \omega + \omega_0) = A, \tag{106.3}$$

где введено обозначение $\beta = \nu\omega^2/c^2 \approx \nu\omega_0^2/c^2$; эта величина может иметь оба знака. Решения этого уравнения можно рассматривать как результат пересечения двух ветвей спектра — обычный световой волны с $n^2 = a$ и волны с $n^2 = (\omega - \omega_0)/\beta$, связанной с полюсом диэлектрической проницаемости; эти ветви показаны на рис. 58 штрихпунктирными прямыми. «Взаимодействие» этих ветвей, сила которого определяется величиной A, приводит к раздвижению линий [1]).

На рис. 58 сплошными линиями схематически показаны зависимости $n^2(\omega)$, определяемые корнями уравнения (106.3); штриховые линии — функции $n^2(\omega)$ без учета пространственной дисперсии ($\beta = 0$). Распространяющимся в среде волнам отвечают, конечно, лишь положительные [2]) корни n^2. При $\beta > 0$ (рис. 58 *а*) верхняя сплошная кривая проникает в область $\omega > \omega_0$, тем самым создавая здесь дополнительную волну, которой не было

[1]) В микроскопической теории полюс диэлектрической проницаемости отражает существование бозевских элементарных возбуждений в диэлектрике — *экситонов*; знак постоянной β совпадает со знаком эффективной массы экситона (см. IX, § 66). Соответствующую ветвь спектра волн называют *экситонной*. Область спектра вблизи виртуального пересечения обеих ветвей называют *поляритонной*.

[2]) Для наглядности на рисунке изображены также и отрицательные корни. Напомним, что чисто мнимые значения n отвечают волнам, для которых среда непрозрачна (хотя в ней и нет поглощения); можно сказать, что волна полностью отражается от среды.

бы без учета пространственной дисперсии; при $\omega > \omega_{l0}$ в среде возможно распространение двух различных электромагнитных волн. На рис. 58 *б* изображены кривые зависимости $n^2(\omega)$ для случая $\beta < 0$. Левее точки m с координатами

$$n_m^2 = a + \sqrt{\frac{A}{|\beta|}}, \quad \omega_m - \omega_0 = -|\beta| \left(a + 2\sqrt{\frac{A}{|\beta|}}\right)$$

(точка, в которой $dn^2/d\omega = \infty$ и два корня сливаются) имеется два положительных корня и в среде могут распространяться

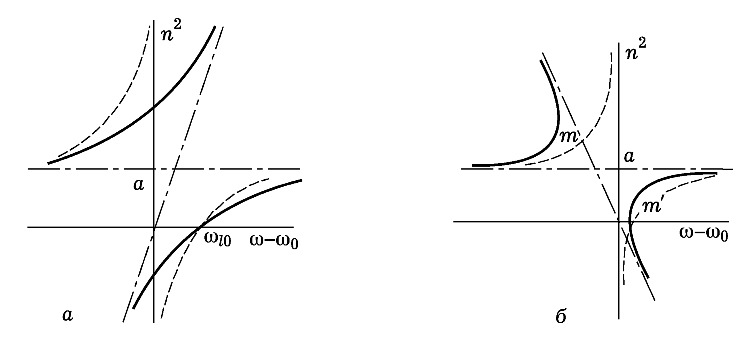


Рис. 58

две различные волны. То же самое относится к области между точкой m' с координатами

$$n_{m'}^2 = a - \sqrt{\frac{A}{|\beta|}}, \quad \omega_{m'} - \omega_0 = -|\beta| \left(a - 2\sqrt{\frac{A}{|\beta|}}\right)$$

и точкой

$$\omega = \omega_{0l}.$$

Если величина A недостаточно мала, сохранение постоянного члена в (106.2), строго говоря, не последовательно. Опустив этот член (т. е. положив в написанных формулах $a = 0$), мы придем к картине, отличающейся от рис. 58 тем, что горизонтальной асимптотой всех кривых становится сама ось абсцисс (вместо линии $n^2 = a$). Область $\omega \geqslant \omega_{l0}$ оказывается при этом вне рассмотрения.

Обратимся к изучению ситуации вблизи линии поглощения в гиротропной среде (*В.Л. Гинзбург*, 1958).

Диэлектрическую проницаемость $\varepsilon^{(0)}$ без учета пространственной дисперсии представим в виде полюсного выражения

$$\varepsilon^{(0)}(\omega) = \frac{A}{\omega_0 - \omega}. \tag{106.4}$$

Мы не будем теперь предполагать специальной малости коэффициента A и соответственно этому не пишем постоянного члена. Для связи между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ следует пользоваться формулой вида (104.13), выраженной через обратный тензор $\eta_{ik} = \varepsilon^{-1}_{ik}$. В изотропной среде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon^{(0)}}\mathbf{D} + iF[\mathbf{Dn}], \tag{106.5}$$

где вектор оптической активности записан в виде $\mathbf{G} = F\mathbf{n}$. Вблизи линии поглощения компоненты тензора η_{ik} проходят просто через нуль и нет оснований для нарушения сходимости его разложения по волновому вектору.

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)^2 = F^2 n^2, \tag{106.6}$$

где $n_0^2 = \varepsilon^{(0)}$ (ср. (101.12)) Подставив сюда $\varepsilon^{(0)}$ из (106.4), получим уравнение

$$\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\omega - \omega_0}{A}\right)^2 = F^2 n^2. \tag{106.7}$$

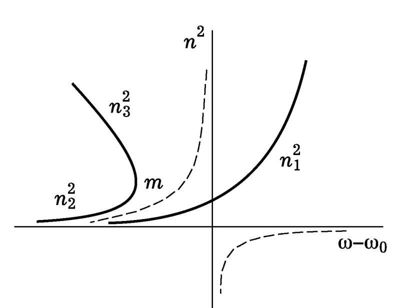


Рис. 59

На рис. 59 сплошными линиями схематически показана зависимость корней n^2 этого уравнения от $\omega - \omega_0$. Один из них существует как при $\omega < \omega_0$, так и при $\omega > \omega_0$, где без учета пространственной дисперсии веществвенных значений n нет (штриховая кривая на рисунке — функция $n_0^2(\omega)$). Два других существуют лишь при $\omega < \omega_m$ — левее точки m, в которой

$$\omega_0 - \omega_m = 3A\left(\frac{F}{2}\right)^{2/3}, \qquad n_m^2 = \left(\frac{2}{F}\right)^{2/3}.$$

Кривые функций $n_2^2(\omega)$ и $n_3^2(\omega)$ проходят над линией $n_0^2(\omega)$, а кривая функции $n_1^2(\omega)$ — под ней. Поэтому (как это ясно из уравнений (101.11), определяющих индукцию $\mathbf{D}$ в волне) волны *2* и *3* обладают круговой поляризацией одного, а волна *1* — другого знака.

Подчеркнем в заключение, что сами формулы (106.2) и (106.4) для проницаемости, а потому и основанные на них результаты, относятся лишь к частотам, достаточно далеким от центра линии: $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$, где γ — ширина линии. При $|\omega - \omega_0| \lesssim \gamma$ необходимо учитывать поглощение, т. е. мнимую часть проницаемости. Это может существенно изменить картину.

ГЛАВА XIII

НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА

§ 107. Преобразование частот в нелинейных средах

Изложенная в предыдущих главах теория распространения электромагнитных волн в диэлектрических средах основана на предположении о линейной связи индукции электрического поля **D** с его напряженностью **E**. Это приближение справедливо с достаточной точностью, если (как это фактически имеет место) напряженность **E** мала по сравнению со значениями, характерными для внутриатомных полей. Но даже в этих условиях существующие малые нелинейные поправки в зависимости **D**(**E**) приводят к качественно новым эффектам и потому могут быть существенны.

Наиболее важной особенностью нелинейной среды является генерация в ней колебаний с новыми частотами. Так, если на такую среду падает монохроматическая волна с частотой ω_1, то по мере ее распространения в среде генерируются волны с частотами $m\omega_1$ (где m — целые числа); если первоначально имеется совокупность монохроматических сигналов с частотами ω_1 и ω_2, то с течением времени возникнут также и комбинационные частоты $m\omega_1 + m\omega_2$ и т. п.

Если среда бездиссипативна, то процесс преобразования частот подчиняется некоторым весьма общим соотношениям — помимо очевидного условия сохранения суммарной энергии колебаний на всех частотах. При этом предполагается, что нелинейность является слабой; смысл понятия этой слабости будет уточнен ниже.

Происхождение и смысл искомых соотношений наиболее ясен с квантовой точки зрения, из которой мы и будем исходить. Для упрощения рассуждений будем считать, что все частоты системы можно представить как линейные комбинации двух несоизмеримых основных частот ω_1 и ω_2:

$$\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2, \tag{107.1}$$

где m, n — положительные или отрицательные целые числа.

Полную энергию излучения в среде можно представить как сумму энергий всех квантов:

$$\mathscr{U} = \sum_{m,n} N_{mn}\hbar\omega_{mn},$$

где N_{mn} — число квантов с частотой ω_{mn}. Суммирование производится по всем числам m, n, для которых $\omega_{mn} > 0$ (поскольку физическим смыслом обладают, конечно, только положительные частоты).

Процессы преобразования частот приводят к изменению чисел N_{mn} со временем при сохранении полной энергии. Поэтому

$$\frac{d\mathscr{U}}{dt} = \hbar\omega_1 \sum_{m,n} m\frac{dN_{mn}}{dt} + \hbar\omega_2 \sum_{m,n} n\frac{dN_{mn}}{dt} = 0.$$

Но ввиду предположенной несоизмеримости ω_1 и ω_2 и целочисленности чисел квантов и их изменений это равенство требует обращения в нуль каждой из двух сумм в отдельности [1]:

$$\sum_{m,n} m\frac{dN_{mn}}{dt} = 0, \quad \sum_{m,n} n\frac{dN_{mn}}{dt} = 0. \tag{107.2}$$

Введем вместо чисел квантов соответствующие интенсивности — полные энергии $\overline{\mathscr{U}}_{mn}$, заключенные в излучении соответствующих частот:

$$\overline{\mathscr{U}}_{mn} = \hbar\omega_{mn}N_{mn}. \tag{107.3}$$

Тогда соотношения (107.2) примут вид

$$\sum_{m,n} \frac{m}{\omega_{mn}}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_{mn}}{dt} = 0, \quad \sum_{m,n} \frac{n}{\omega_{mn}}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_{mn}}{dt} = 0. \tag{107.4}$$

Здесь надо отметить обстоятельство, особенно ясное с точки зрения классической картины колебаний. Говоря об изменении $\mathscr{U}_{mn}$ со временем, мы имеем в виду только систематический ход этого изменения; другими словами, рассматривается энергия, усредненная по интервалам времени, большим по сравнению с периодами $1/\omega_1$, $1/\omega_2$ (что и отмечено чертой над $\mathscr{U}_{mn}$ в (107.4)). Именно здесь требуется слабость нелинейных эффектов: характерное время τ вызванного ими систематического нарастания возбуждающихся колебаний должно быть велико по сравнению с указанными периодами. Только в таких условиях может иметь смысл рассмотрение временного хода величин, усредненных по интервалам Δt, таким, что

$$\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2} \ll \Delta t \ll \tau.$$

Равенства (107.4) и представляют собой искомые соотношения; они известны как *теорема Мэнли–Роу* (*J.M. Manley*,

---

[1]) Запись скоростей изменения целочисленных величин в виде производных имеет, конечно, условный характер.

H.E. Rowe, 1956)[1]). Остается придать им более определенный вид, избавившись от ограничения $\omega_{mn} > 0$ при суммированиях. Это легко сделать, заметив, что каждой паре чисел m, n, для которой $\omega_{mn} > 0$, отвечает пара чисел $-m$, $-n$, для которой частота отрицательна при том же $|\omega_{mn}|$. Положив по определению

$$\overline{\mathscr{U}}_{-m,-n} = \overline{\mathscr{U}}_{mn} \tag{107.5}$$

и распространив суммирование по всем целым числам от $-\infty$ до ∞, мы, следовательно, удвоим суммы, что не нарушит их равенства нулю. После этого можно произвести еще одно упрощение. В первом равенстве (107.4) разбиваем сумму по m на две суммы — от 0 до ∞ и от $-\infty$ до 0, и во второй заменяем m, $n \to -m$, $-n$; аналогичное преобразование во втором равенстве (107.4) производим в сумме по n. В результате получим окончательно:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{m}{m\omega_1+n\omega_2}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_{mn}}{dt} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{n}{m\omega_1+n\omega_2}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_{mn}}{dt} = 0. \tag{107.6}$$

Обобщение теоремы на случай большего числа исходных несоизмеримых частот очевидно.

Конкретные свойства колебательной системы могут запрещать те или иные процессы преобразования частот. Суммирования в (107.6) производятся фактически лишь по разрешенным процессам.

Так, в простейшем случае системы, допускающей лишь генерирование комбинационной частоты $\omega_1 + \omega_2$, числа m, n пробегают значения 0, 1 и мы находим

$$-\frac{1}{\omega_1}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_{10}}{dt} = -\frac{1}{\omega_2}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_{01}}{dt} = \frac{1}{\omega_1+\omega_2}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_{11}}{dt}. \tag{107.7}$$

Смысл этих равенств очевиден: убыль чисел квантов $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$ равна прибыли числа генерируемых квантов $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$.

§ 108. Нелинейная проницаемость

При слабой нелинейности первая поправка к линейной зависимости **D** от **E** квадратична по полю. При наличии временной дисперсии[2]) она может быть представлена в произвольной ани-

[1]) Ее квантовая интерпретация указана *Вейссом* (*M.T. Weiss*, 1957).

[2]) Пространственной дисперсией везде в этой главе мы пренебрегаем.

зотропной среде выражением

$$D_i^{(2)}(t) = \iint\limits_0^\infty f_{i,kl}(\tau_1, \tau_2) E_k(t - \tau_1) E_l(t - \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2, \qquad (108.1)$$

аналогичным (77.3). Разумеется, существование такого члена налагает определенные ограничения на допустимую симметрию среды; в частности, он отсутствует, если среда инвариантна относительно инверсии.

Хотя ниже мы будем рассматривать как типичный именно квадратичный по $\mathbf{E}$ член вида (108.1), необходимо отметить, что в квадратичном приближении электрическая индукция $\mathbf{D}$ может содержать также и билинейные по компонентам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и квадратичные по $\mathbf{H}$ члены; эти члены обычно играют меньшую роль и мы не будем их рассматривать. Мы не будем также обсуждать нелинейную зависимость магнитной индукции $\mathbf{B}$ от $\mathbf{H}$ ввиду аналогии с вопросом о зависимости $\mathbf{D}(\mathbf{E})$.

Введем величину

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega_1, \omega_2) = \iint\limits_0^\infty e^{i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} f_{i,kl}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2, \qquad (108.2)$$

которую естественно назвать *нелинейной проницаемостью* второго порядка (по аналогии с линейной проницаемостью $\varepsilon_{ik}(\omega)$, определяемой выражением вида (77.5)). Она лишь множителем отличается от величин $\chi_{ikl} = \varepsilon_{ikl}/(4\pi)$, которые называют *нелинейной восприимчивостью*. Ввиду симметрии, с которой входят E_k и E_l в определение (108.1), тензор $f_{i,kl}$ симметричен по индексам kl при одновременной перестановке его аргументов: $f_{i,kl}(\tau_1, \tau_2) = f_{i,lk}(\tau_2, \tau_1)$. Поэтому такой же симметрией обладает и тензор $\varepsilon_{i,kl}$:

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega_1, \omega_2) = \varepsilon_{i,lk}(\omega_2, \omega_1). \qquad (108.3)$$

В частности, при $\omega_1 = \omega_2$ тензор симметричен по последней паре индексов:

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega, \omega) = \varepsilon_{i,lk}(\omega, \omega). \qquad (108.4)$$

Кроме того, в силу вещественности функций $f_{i,kl}$ (в свою очередь следующей из определения (108.1) с вещественными $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$) имеем

$$\varepsilon_{i,kl}(-\omega_1, -\omega_2) = \varepsilon^*_{i,kl}(\omega_1, \omega_2). \qquad (108.5)$$

Проницаемость (108.2) естественно появляется при рассмотрении монохроматических полей или их суперпозиций. В нелинейных выражениях такие поля должны, конечно, быть представлены

в вещественном виде. Так, если $\mathbf{E}$ — монохроматическое поле с одной частотой ω, то надо писать $\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\}$, и его подстановка в (108.1) приводит к выражению

$$D_i^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\varepsilon_{i,kl}(\omega,\omega)e^{-2i\omega t}E_{0i}E_{0k} + \varepsilon_{i,kl}(\omega,-\omega)E_{0i}E_{0k}^*\}. \tag{108.6}$$

Оно содержит колебания с удвоенной частотой (наряду с постоянным членом, отвечающим разности частот $\omega - \omega = 0$). В общем случае $\varepsilon_{i,kl}(\omega_1, \omega_2)$ описывает вклад в индукцию, пропорциональный $\exp(-i\omega_3 t)$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

Мы будем рассматривать ниже лишь бездиссипативные среды и будем называть их прозрачными, хотя они и не являются таковыми в буквальном смысле (для волн заданной частоты) ввиду возможности перехода энергии в другие частоты. Будем также считать, что среда не обладает магнитной структурой.

Прежде всего покажем, что в таких условиях нелинейная проницаемость вещественна. Это можно было бы увидеть непосредственно, если выразить компоненты тензора нелинейной восприимчивости через матричные элементы электрического дипольного взаимодействия среды с полем, играющего роль малого возмущения; восприимчивость второго порядка появляется в третьем приближении теории возмущений [1]). Но понять происхождение вещественности результата такого вычисления можно и без его фактического проведения. Действительно, полную систему волновых функций, по которым вычисляются матричные элементы, можно выбрать (для среды без магнитной структуры и потому инвариантной по отношению к обращению времени!) вещественной. Веществен также и оператор взаимодействия поля с электрическим дипольным моментом среды. Поэтому мнимые члены могли бы появиться лишь в результате обходов полюсов энергетических знаменателей теории возмущений. Но отсутствие диссипации в среде означает, что ни одна из частот поля не совпадает с разностью энергетических уровней системы (или же, что вычеты в полюсах равны нулю в силу тех или иных правил отбора); поэтому фактически обходить полюса не приходится.

Прозрачность среды приводит также к появлению определенных соотношений симметрии для тензора $\varepsilon_{i,kl}$. И эти соотношения можно было бы усмотреть из конкретных выражений, полученных по теории возмущений. Но и здесь можно прийти к требуемому результату более простым путем.

---

[1]) Эти вычисления аналогичны (хотя и значительно более громоздки) вычислению линейной обобщенной восприимчивости во втором порядке теории возмущений (см. V, § 126).

Для этого предположим, что поле в среде есть сумма трех почти монохроматических полей с несоизмеримыми частотами ω_1, ω_2, ω_3:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3 = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{01}e^{-i\omega_1 t}+\mathbf{E}_{02}e^{-i\omega_2 t}+\mathbf{E}_{03}e^{-i\omega_3 t}\}, \quad (108.7)$$

причем $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Будем считать, что поля на частотах ω_1, ω_2, ω_3 были созданы внешними источниками, впоследствии выключенными; под влиянием же слабой нелинейности среды их амплитуды $\mathbf{E}_{01}$, ... становятся медленно меняющимися функциями времени.

Эта медленность позволяет писать уравнения Максвелла для полей каждой из основных частот в отдельности. В свою очередь, из этих уравнений обычным образом следует закон сохранения энергии в виде

$$\frac{1}{4\pi}(\overline{\mathbf{E}_1\dot{\mathbf{D}}_1} + \overline{\mathbf{H}_1\dot{\mathbf{H}}_1}) + \operatorname{div}\frac{c}{4\pi}\overline{[\mathbf{E}_1\mathbf{H}_1]} = 0$$

(и аналогично для величин с индексами 2 и 3); $\mathbf{D}_1$ обозначает ту часть индукции $\mathbf{D}$, которая содержит множители $e^{\pm i\omega_1 t}$, а черта — усреднение по времени (нужное для дальнейшего). При интегрировании по всему объему поля член с дивергенцией исчезает и остается

$$\frac{1}{4\pi}\int(\overline{\mathbf{E}_1\dot{\mathbf{D}}_1} + \overline{\mathbf{H}_1\dot{\mathbf{H}}_1})\,dV = 0.$$

Если теперь в явном виде выделить в $\mathbf{D}_1$ линейные и нелинейные по $\mathbf{E}$ члены,

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_1^{(1)} + \mathbf{D}_1^{(2)},$$

то первые, вместе с $\mathbf{H}_1\dot{\mathbf{H}}_1$, дадут $d\overline{\mathscr{U}}_1/dt$ — изменение со временем энергии поля на частоте ω_1. Это изменение, таким образом, определяется уравнением

$$\frac{d\overline{\mathscr{U}}_1}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\int \overline{\operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{01}e^{-i\omega_1 t}\}\dot{\mathbf{D}}_1^{(2)}}\,dV. \quad (108.8)$$

Здесь производную $\partial\mathbf{D}_1^{(2)}/\partial t$ следует выразить через напряженность поля с помощью (108.1), (108.2). Усреднение по времени обращает в нуль все члены, кроме тех, в которых экспоненциальные множители взаимно сокращаются. Повторяя вычисления для остальных частот, находим окончательно:

$$\frac{d\overline{\mathscr{U}}_1}{dt} = -\frac{i\omega_1}{16\pi}\int \varepsilon_{k,il}(-\omega_3,\omega_2)E_{03i}^*E_{01k}E_{02l}\,dV + \text{к. с.},$$

$$\frac{d\overline{\mathscr{U}}_2}{dt} = -\frac{i\omega_2}{16\pi}\int \varepsilon_{i,ki}(\omega_1,-\omega_3)E_{03i}^*E_{01k}E_{02l}\,dV + \text{к. с.}, \quad (108.9)$$

$$\frac{d\overline{\mathscr{U}}_3}{dt} = \frac{i\omega_3}{16\pi}\int \varepsilon_{i,kl}(\omega_1,\omega_2)E_{03i}^*E_{01k}E_{02l}\,dV + \text{к. с.},$$

где к. с. означает комплексно-сопряженное выражение. При вычислении использовано свойство (108.3).

Суммарное изменение энергии на всех трех частотах равно

$$\frac{d\overline{\mathscr{U}}}{dt} = \frac{d\overline{\mathscr{U}}_1}{dt} + \frac{d\overline{\mathscr{U}}_2}{dt} + \frac{d\overline{\mathscr{U}}_3}{dt}. \tag{108.10}$$

В нелинейной среде эта сумма, вообще говоря, не должна точно обращаться в нуль ввиду возможности перехода энергии еще и в другие комбинационные частоты: $\omega_1 - \omega_2$, $\omega_3 + \omega_2$ и т. д. Но величина полей на частотах ω_1, ω_2, ω_3, созданных внешними источниками, не имеет отношения к степени нелинейности; она не должна быть малой в противоположность полям на других частотах, появляющихся лишь в силу нелинейности среды. Поэтому вклад последних в баланс энергии можно считать отсутствующим и потребовать обращения суммы (108.10) в нуль. Более того, поскольку такая среда представляет собой нелинейную систему всего с тремя частотами, можно применить к ней теорему Мэнли–Роу в ее простейшей форме (107.7). В используемых нами здесь обозначениях эти соотношения гласят:

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_1}{dt} + \frac{1}{\omega_3}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_3}{dt} = 0, \qquad \frac{1}{\omega_2}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_2}{dt} + \frac{1}{\omega_3}\frac{d\overline{\mathscr{U}}_3}{dt} = 0.$$

Подставив сюда (108.9), найдем, что нелинейная проницаемость удовлетворяет следующим важным соотношениям симметрии [1]):

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega_1, \omega_2) = \varepsilon_{k,il}(-\omega_3, \omega_2) = \varepsilon_{l,ki}(\omega_1, -\omega_3) \tag{108.11}$$

(*J.A. Armstrong*, *N. Bloembergen*, *J. Ducuing*, *P.S. Pershan*, 1962). Выражаемая этими равенствами симметрия становится более наглядной, если приписать компонентам тензора еще и третий аргумент так, чтобы сумма всех трех была равна нулю:

$$\varepsilon_{i,kl}(-\omega_3; \omega_1, \omega_2) = \varepsilon_{k,il}(\omega_1; -\omega_3, \omega_2) = \\ = \varepsilon_{l,ki}(\omega_3; \omega_1, -\omega_3) = \varepsilon_{i,lk}(-\omega_3; \omega_2, \omega_1)$$

(последнее равенство — (108.3)). Если условиться связывать три последовательных аргумента (частоты) с тремя последовательными индексами тензора, то можно произвольным образом переставлять эти индексы при условии одновременной такой же перестановки аргументов.

Отметим, что само по себе требование отсутствия диссипации привело бы лишь к более слабому условию — равенству нулю

[1]) Существенно, что комплексные амплитуды произвольны; поэтому комплексно-сопряженные члены в (108.9), (108.10) независимы и их можно приравнивать по отдельности.

суммы (108.10), т. е.

$$\omega_3\varepsilon_{i,kl}(\omega_1,\omega_2) - \omega_1\varepsilon_{k,il}(-\omega_3,\omega_2) - \omega_2\varepsilon_{l,ki}(\omega_1,-\omega_3) = 0. \quad (108.22)$$

Изложенный вывод неприменим непосредственно при $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$, поскольку соотношения Мэнли–Роу сводятся при этом к одному лишь сохранению полной энергии. Но о равенстве

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega,\omega) = \varepsilon_{k,il}(-2\omega,\omega) = \varepsilon_{l,ki}(\omega,-2\omega) \quad (108.13)$$

можно заключить просто из соображений непрерывности при предельном переходе из (108.11).

Если обе частоты, ω_1 и ω_2, стремятся к нулю, тензор $\varepsilon_{i,kl}$ оказывается полностью симметричным. Эта симметрия выражает собой просто тот факт, что в статическом случае индукция $\mathbf{D}$ может быть получена дифференцированием свободной энергии по $\mathbf{E}$:

$$D_i = -4\pi\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial E_i},$$

так что

$$\frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \frac{\partial D_k}{\partial E_i}.$$

Отсюда следует симметричность тензора $\varepsilon_{i,kl}$ по индексам ik, а тем самым — по всем трем индексам.

Если же равна нулю лишь одна из частот, то соотношения (108.11) приводят к равенству

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega,0) = \varepsilon_{l,ki}(\omega,-\omega), \quad (108.14)$$

а также

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega,0) = \varepsilon_{k,il}(-\omega,0) = \varepsilon_{k,il}(\omega,0) \quad (108.15)$$

(в силу (108.5) вещественные функции $\varepsilon_{k,il}(\omega,0)$ четны по ω). Тензор $\varepsilon_{i,kl}(\omega,0)$ описывает линейный электрооптический эффект — изменение проницаемости кристалла под влиянием постоянного электрического поля, и, следовательно, совпадает с определенным в (100.4) тензором α_{ikl}:

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega,0) = \alpha_{ikl}(\omega);$$

как и должно быть, в силу (108.15) он симметричен по индексам ik. Тензор же $\varepsilon_{l,ki}(\omega,-\omega)$ описывает другой эффект — появление в среде статической диэлектрической поляризации, пропорциональной квадрату приложенного слабого переменного периодического поля (ср. второй член в (108.6)). Равенство (108.14) устанавливает, таким образом, связь между этими двумя эффектами.

Аналогичными соображениями, используя нелинейную восприимчивость, «перекрестную» между электрическими и магнитными величинами, можно было бы вновь прийти к связи между магнитооптическим эффектом Фарадея и намагничением среды вращающимся по направлению электрическим полем; это — связь, устанавливаемая формулами (101.15) и (101.25).

Как уже было указано, для сред, инвариантных относительно пространственной инверсии, нелинейность второго порядка отсутствует. В таких случаях нелинейные эффекты начинаются с кубических членов в разложении зависимости $\mathbf{D}(\mathbf{E})$. Соответствующая нелинейная проницаемость третьего порядка есть тензор четвертого ранга, зависящий от трех независимых частот:

$$\varepsilon_{i,klm}(\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Его свойства симметрии полностью аналогичны свойствам тензора проницаемости второго порядка: если ввести еще и четвертую частоту

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

и записать тензор в виде

$$\varepsilon_{i,klm}(-\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

то можно любым образом переставлять индексы вместе с такой же перестановкой четырех аргументов.

Нелинейность третьего порядка может быть существенна даже при наличии квадратичной нелинейности ввиду специфичности вызываемых ею эффектов.

§ 109. Самофокусировка

Как уже говорилось, везде в этой главе напряженность электрического поля будет предполагаться достаточно малой, так что будут относительно малы соответствующие нелинейные члены в уравнениях. В таких условиях представляют интерес те нелинейные эффекты, которые «накапливаются» с течением времени и за достаточно большое время приводят к существенному изменению характера явления. В качестве первого примера такого рода в этом параграфе будут рассмотрены оптические эффекты, связанные с нелинейным изменением поля на частоте первичной волны. Другими словами, рассматривается нелинейный вклад в $\mathbf{D}$ той же частоты ω, которую имеет монохроматическое поле $\mathbf{E}$. В квадратичных членах такой вклад отсутствует: они содержат только частоты 2ω и 0. Первый отличный от нуля эффект возникает от кубической нелинейности и содержится в членах вида EEE^* (частота $\omega + \omega - \omega = \omega$).

Ниже в этом параграфе будем считать среду изотропной (жидкость или газ). Тогда интересующие нас члены третьего порядка в индукции имеют в общем случае вид

$$\mathbf{D}^{(3)} = \alpha(\omega)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + \beta(\omega)\mathbf{E}^2\mathbf{E}^*; \tag{109.1}$$

они содержат два независимых коэффициента; в прозрачной среде эти коэффициенты — вещественные четные функции частоты. Такое число независимых коэффициентов находится в соответствии со свойствами симметрии тензора $\varepsilon_{i,klm}(-\omega; -\omega, \omega, \omega)$. При указанных значениях аргументов этот тензор симметричен по парам индексов ik и lm; в изотропной среде такой тензор имеет две независимые компоненты. В пределе малых частот, как указано в предыдущем параграфе, тензор должен быть симметричен по всем индексам, т. е. в изотропной среде пропорционален комбинации

$$\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}.$$

Это означает, что

$$\alpha(0) = 2\beta(0). \tag{109.2}$$

Выражение (109.1) упрощается для линейно поляризованного поля $\mathbf{E}$. При такой поляризации комплексный вектор $\mathbf{E}$ сводится к вещественному вектору, умноженному на общий фазовый множитель; тогда выражения $|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}^2\mathbf{E}^*$ совпадают и

$$\mathbf{D}^{(3)} = (\alpha + \beta)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}. \tag{109.3}$$

Такое же упрощение возникает при круговой поляризации поля $\mathbf{E}$; в этом случае $\mathbf{E}^2 = 0$ и (109.1) сводится к

$$\mathbf{D}^{(3)} = \alpha|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}. \tag{109.4}$$

В обоих случаях индукция поляризована так же, как и $\mathbf{E}$. В общем же случае эллиптической поляризации направления и отношения главных осей эллипсов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}^{(3)}$ не совпадают.

Связь

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(3)} = \varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{D}^{(3)}$$

($\varepsilon(\omega)$ — обычная, линейная проницаемость) должна быть подставлена в уравнения Максвелла, которые при этом следует записать (исключив из них магнитное поле $\mathbf{H}$) в виде

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2} = 0, \tag{109.5}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0. \tag{109.6}$$

Существенно, что эта нелинейная система уравнений допускает точное решение в виде монохроматической плоской волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} \tag{109.7}$$

с линейной или круговой поляризацией. Действительно, для таких волн $|\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}_0|^2$, так что формулы (109.3) или (109.4) имеют тот же характер, что и в линейном случае с проницаемостью, зависящей от амплитуды поля; поэтому можно брать вещественную часть после решения уравнений. Связь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в этих случаях будем записывать в виде

$$\mathbf{D} = \left(\varepsilon + \frac{2c^2}{\omega^2}\eta|\mathbf{E}_0|^2\right)\mathbf{E}, \tag{109.8}$$

введя удобное для дальнейшего обозначение: $\eta = \omega^2(\alpha+\beta)/(2c^2)$ для линейно поляризованной или $\eta = \omega^2\alpha/(2c^2)$ для поляризованной по кругу волны.

Подстановка (109.8) в (109.6) дает $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ — поле остается поперечным, как в линейной теории. С учетом этого подстановка (109.7) в (109.5) приводит к дисперсионному соотношению

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon + 2\eta|\mathbf{E}_0|^2. \tag{109.9}$$

Фазовая скорость ω/k оказывается зависящей теперь не только от частоты, но и от амплитуды волны. Если $\eta > 0$, фазовая скорость убывает с увеличением амплитуды; такую среду называют *фокусирующей* (смысл этого названия выяснится ниже). Если же $\eta < 0$, то фазовая скорость растет при увеличении амплитуды, и среду называют *дефокусирующей*.

Использование нелинейной связи (109.1) предполагает, конечно, лишь слабую нелинейность — члены более высоких порядков должны быть малы по сравнению с членами $\mathbf{D}^{(3)}$. При этом качественно новые явления могут возникнуть в результате «накопления» эффектов нелинейности за большие промежутки времени и на больших расстояниях. Естественной постановкой вопроса является при этом рассмотрение почти монохроматической волны вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})e^{i(k_0x-\omega t)}, \tag{109.10}$$

где $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$ — медленно меняющаяся функция времени и координат (мало́ ее относительное изменение на интервалах времени $\sim 1/\omega$ и расстояниях $\sim 1/k_0$). Входящие в фурье-разложение этого поля волновые векторы распределены в небольшом интервале значений вокруг вектора $\mathbf{k}_0$, направленного вдоль оси x; его величину условимся считать связанной с ω равенством

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega), \tag{109.11}$$

отвечающим линейной теории. Выведем уравнение для функции $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$.

Прежде всего замечаем, что в уравнении (109.5) в члене

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}$$

можно пренебречь величиной $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}$. Действительно, в силу уравнения (109.6) дивергенция напряженности

$$\operatorname{div}\mathbf{E} \approx -\eta\frac{2c^2}{\varepsilon\omega^2}\mathbf{E}_0\operatorname{grad}|\mathbf{E}_0|^2,$$

т. е. отлична от нуля только за счет производных от медленно меняющейся функции $\mathbf{E}_0$ и дополнительно мала в силу малости нелинейных членов; такими величинами мы пренебрегаем. Таким образом, имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} \approx -\Delta\mathbf{E} \approx \left[k_0^2\mathbf{E}_0 - 2ik_0\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial x} - \Delta_\perp\mathbf{E}_0\right]e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r}-\omega t)},$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ (опущен член со второй производной $\partial^2\mathbf{E}_0/\partial x^2$, не имеющий большого множителя k_0; поперечные же производные могут быть велики по сравнению с продольными).

Вычисление $\partial^2\mathbf{D}^{(1)}/\partial t^2$ производится аналогично выводу формулы (80.10) и дает [1])

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}^{(1)}}{\partial t^2} \approx -\frac{1}{c^2}\left(\omega^2\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0 + i\frac{\partial(\omega^2\varepsilon)}{\partial\omega}\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}\right)e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r}-\omega t)} = \\ = -\left(k_0^2\mathbf{E}_0 + 2i\frac{k_0}{u}\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}\right)e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r}-\omega t)},$$

где введена групповая скорость u по определению

$$\frac{1}{u} = \frac{dk_0}{d\omega} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\omega\sqrt{\varepsilon})}{\partial\omega}. \tag{109.12}$$

В производной же от $\mathbf{D}^{(3)}$ достаточно оставить член

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}^{(3)}}{\partial t^2} = -2\eta(\omega)|\mathbf{E}_0|^2\mathbf{E},$$

пренебрегая здесь членом с малой производной $\partial\mathbf{E}_0/\partial t$.

Подставив полученные выражения в (109.5), получим окончательно следующее уравнение:

$$ik_0\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{2}\Delta_\perp\mathbf{E}_0 - \eta(\omega)|\mathbf{E}_0|^2\mathbf{E}_0. \tag{109.13}$$

[1]) Отличие от вывода (80.10) лишь в том, что теперь $\widehat{f} = \partial^2\widehat{\varepsilon}/\partial t^2$, $f(\omega) = -\omega^2\varepsilon(\omega)$.

Комбинация производных в левой части равенства выражает собой тот факт, что возмущения амплитуды переносятся в направлении распространения волны с групповой скоростью.

С помощью этого уравнения можно исследовать устойчивость неограниченной плоской волны, описываемой точным решением (109.7), (109.8) (*В.И. Беспалов*, *В.И. Таланов*, 1966). Мы увидим, что в фокусирующей среде волна оказывается неустойчивой [1]).

Согласно (109.9) в точном решении (109.7)

$$k \approx k_0 + \frac{\eta E_0^2}{k_0}$$

с k_0 из (109.11); в линейно поляризованной волне амплитуда $\mathbf{E}_0$ может быть определена как вещественный вектор. Поэтому если записать волну (109.7) в виде (109.10), в последнем надо положить

$$\mathbf{E}_0(x) = \mathbf{E}_0 \exp\left(ix\frac{\eta E_0^2}{k_0}\right).$$

Это выражение играет роль амплитуды невозмущенной волны. Мы будем рассматривать стационарную задачу о пространственном развитии возмущений вдоль направления распространения волны. Соответственно, амплитуду волны, подвергнутой малому возмущению, пишем как

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \{\mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}(\mathbf{r})\} \exp\left(ix\frac{\eta E_0^2}{k_0}\right). \qquad (109.14)$$

Будем считать, что $\delta\mathbf{E}$ направлено вдоль $\mathbf{E}_0$.

Подстановка (109.14) в (109.13) приводит к уравнению

$$ik_0\frac{\partial\,\delta E}{\partial x} = -\frac{1}{2}\Delta_\perp \delta E - \eta E_0^2(\delta E + \delta E^*). \qquad (109.15)$$

Положим

$$\delta E = Ae^{i(\mathbf{qr}+\gamma x)} + B^* e^{-i(\mathbf{qr}+\gamma x)}, \qquad (109.16)$$

где $\mathbf{q}$ — вектор в плоскости yz. Подставив это выражение в (109.15) и собрав по отдельности члены с $\exp\{\pm i(\mathbf{qr}+\gamma x)\}$, получим два уравнения

$$\left(\frac{q^2}{2} - \eta E_0^2 + k_0\gamma\right) A - \eta E_0^2 B = 0,$$

$$-\eta E_0^2 A + \left(\frac{q^2}{2} - \eta E_0^2 - k_0\gamma\right) B = 0.$$

[1]) Это обстоятельство было еще ранее отмечено *Р.В. Хохловым* (1965).

Условие равенства нулю их определителя дает

$$\gamma = \pm\frac{q}{2k_0}\sqrt{q^2 - 4\eta E_0^2}.$$

При $\eta > 0$ и

$$q^2 < 4\eta E_0^2 \tag{109.17}$$

γ мнимо, так что δE из (109.16) содержит экспоненциально возрастающий член, т. е. волна неустойчива. Отметим, что максимальный инкремент неустойчивости оказывается порядка величины нелинейной поправки к волновому вектору.

Одно из проявлений этой неустойчивости — *самофокусировка* ограниченного по ширине светового пучка, распространяющегося в фокусирующей среде. Происхождение этого явления связано с тем, что если амплитуда поля убывает от оси пучка к его периферии, то зависящая от этой амплитуды диэлектрическая проницаемость среды тоже убывает (при $\eta > 0$) в том же направлении и среда ведет себя как фокусирующая линза (*Г.А. Аскарьян*, 1962). Поведение пучка определяется игрой двух противоположных тенденций — такой фокусировкой и расширением пучка из-за дифракции.

Покажем, прежде всего, что эти тенденции могут взаимно компенсироваться в том смысле, что уравнение (109.13) допускает (при $\eta > 0$) решение в виде стационарного нерасширяющегося пучка. Такое *самоканалирование* — специфический нелинейный эффект. В линейной теории всякий ограниченный по сечению пучок расходится из-за дифракции. Мы ограничимся одномерным случаем, когда поле $\mathbf{E}$ зависит только от одной поперечной координаты y, будучи поляризовано вдоль оси z; волна распространяется вдоль оси x [1]). В этом случае можно получить аналитическое решение задачи (*В.И. Таланов*, 1965). При этом мы отвлекаемся от того обстоятельства, что пучок бесконечной (в направлении оси z) ширины заведомо неустойчив, поскольку в нем возможны возмущения с малыми значениями q_z, неустойчивые согласно (109.17).

Положим

$$E_{0z} = F(y)e^{i\varkappa x} \tag{109.18}$$

с малой величиной $\varkappa$, играющей роль поправки к волновому вектору k_0; функция $F(y)$ вещественна. Подстановка в (109.13) дает для этой функции уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dy^2} = k_0\varkappa F - \eta F^3. \tag{109.19}$$

[1]) Отметим, что в этих условиях член $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}$, которым мы пренебрегли выше как малым, обращается в нуль тождественно.

Оно имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 - k_0\varkappa F^2 + \frac{\eta}{2}F^4 = \text{const}.$$

Нас интересует решение, в котором F и dF/dy стремятся к нулю при $|y| \to \infty$. Соответственно этому полагаем $\text{const} = 0$, после чего простое интегрирование дает

$$F = \left(\frac{2k_0\varkappa}{\eta}\right)^{1/2} \frac{1}{\operatorname{ch}\left[(2k_0\varkappa)^{1/2}y\right]} \tag{109.20}$$

(начало отсчета y выбрано в центре пучка). Ширина пучка по оси y:

$$\delta \sim (k_0\varkappa)^{-1/2} \sim \frac{1}{\sqrt{\eta}\,F(0)}.$$

Поскольку протекающий по пучку поток энергии $W \sim E^2(0)\delta$, то δ пропорционально $1/W$ — пучок тем у́же, чем больше переносимая им мощность.

Такой самоканалированный пучок представляет особый случай, когда фокусирующие свойства среды точно компенсируются дифракцией. Другие пучки будут либо расходиться, либо сходиться. Напишем, прежде всего, качественный критерий самофокусировки для реального пучка ограниченного сечения (*R.Y. Chiao*, *E. Garmire*, *C.H. Townes*, 1964). Это можно сразу сделать исходя из условия неустойчивости (109.17). В пучке с характерным радиусом R возможны возмущения с поперечными к оси пучка длинами волн, меньшими R, т. е. с $q \gtrsim 1/R$. Условие же (109.17) определяет верхнюю границу значений q, приводящих к неустойчивости. Поэтому пучок будет неустойчив относительно фокусировки при

$$E_0^2R^2\eta \gtrsim 1. \tag{109.21}$$

Переносимая вдоль пучка мощность определяется произведением $E_0^2R^2$. Отметим, что критическое значение этой мощности, за которым начинается самофокусировка, не зависит от площади сечения пучка.

Оказывается возможным также установить точный (не по порядку величины) достаточный критерий самофокусировки пучка (*С.Н. Власов*, *В.А. Петрищев*, *В.И. Таланов*, 1971).

Для стационарного линейно поляризованного светового пучка, но без предварительных предположений о характере зависимости от x, уравнение для функции $E_0(x, \boldsymbol{\rho})$ имеет вид

$$ik_0\frac{\partial E_0}{\partial x} = -\frac{1}{2}\Delta_\perp E_0 - \eta|E_0|^2E_0 \tag{109.22}$$

($\boldsymbol{\rho}$ — двумерный радиус-вектор в плоскости yz; в этой же плоскости действуют дифференциальные операторы $\Delta_\perp$ и $\nabla_\perp$). Легко проверить, что из этого уравнения следует равенство

$$\frac{\partial |E_0|^2}{\partial x} + \operatorname{div}_\perp \mathbf{j} = 0, \qquad (109.23)$$

где

$$\mathbf{j} = \frac{i}{2k_0}(E_0 \nabla_\perp E_0^* - E_0^* \nabla_\perp E_0).$$

Отсюда, в свою очередь, следует «сохранение» (т. е. независимость от x) интеграла

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |E_0|^2 \, d^2\rho. \qquad (109.24)$$

Сохраняется также и интеграл

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \{|\nabla_\perp E_0|^2 - \eta |E_0|^4\} \, d^2\rho, \qquad (109.25)$$

в чем легко убедиться прямым дифференцированием по x с использованием уравнения (109.22). Предполагается, конечно, что E_0 достаточно быстро убывает при $\rho \to \infty$, так что оба интеграла (равно как и интеграл (109.26) ниже) сходятся [1]).

Покажем, что поведение пучка определяется знаком интеграла $\mathscr{E}$: при $\mathscr{E} > 0$ пучок в среднем расходится, а при $\mathscr{E} < 0$ — фокусируется. Доказательство основано на простом уравнении, которое можно получить для среднего радиуса пучка R, определенного согласно

$$R^2(x) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 |E_0|^2 \, d^2\rho. \qquad (109.26)$$

Для вывода этого уравнения пишем, используя (109.23):

$$\frac{d}{dx} \int |E_0|^2 \rho^2 \, d^2\rho = -\int \operatorname{div}_\perp \mathbf{j} \cdot \rho^2 \, d^2\rho = 2 \int \mathbf{j}\boldsymbol{\rho} \, d^2\rho.$$

Дифференцируя еще раз по x, подставив $\partial E_0/\partial x$ из (109.22) и интегрируя два раза по частям, получим в результате уравнение

$$N \frac{d^2}{dx^2} R^2 = 4\mathscr{E}.$$

[1]) По характеру входящих в него производных уравнение (109.22) аналогично двумерному уравнению Шредингера (причем роль времени играет координата x). В этой аналогии интегралы N и $\mathscr{E}$ играют роль «числа частиц» и «энергии»; нелинейность уравнения на выводе этих законов сохранения не отражается.

Отсюда

$$R^2(x) = \frac{2\mathscr{E}}{N}(x - x_0)^2 + R_0^2, \tag{109.27}$$

где x_0, R_0 — постоянные. Мы видим, что при $\mathscr{E} < 0$ на конечном расстоянии вдоль направления распространения достигается полная фокусировка пучка — его радиус R обращается в нуль [1]).

Этот результат, полученный в рамках приближенного уравнения (109.13), не может иметь буквального физического смысла вблизи самого фокуса, где нарушаются предположения, сделанные при выводе уравнения. Достаточно сказать, что при неограниченном увеличении плотности энергии поля при точной фокусировке уже нет оснований ограничиваться низшей степенью нелинейности — кубической. Но существенна уже самая возможность самофокусировки пучка до такой степени, когда нелинейность перестает быть малой. Подчеркнем, что установленный критерий носит достаточный, но не необходимый характер. Пучок с $\mathscr{E} < 0$ заведомо фокусируется целиком, но расходимость пучка в среднем при $\mathscr{E} \geqslant 0$ не противоречит тому, что некоторая внутренняя его часть сфокусируется.

§ 110. Генерация второй гармоники

В § 107 были рассмотрены лишь некоторые общие соотношения, относящиеся к характерным для нелинейной оптики процессам преобразования частот. Теперь мы изложим количественную теорию типичного такого процесса — генерации второй гармоники, т. е. возбуждения электромагнитного поля с частотой 2ω полем частоты ω (*Р.В. Хохлов*, 1960; *J.A. Armstrong*, *N. Bloembergen*, *J. Ducuing*, *P.S. Pershan*, 1962).

Генерация второй гармоники — нелинейный эффект второго порядка. Он содержится в тензоре нелинейной восприимчивости

$$\varepsilon_{i,kl}(-2\omega; \omega, \omega) \tag{110.1}$$

и потому отсутствует в средах, допускающих пространственную инверсию. Тензор (110.1) симметричен по индексам kl; его свойства симметрии в различных кристаллах — те же, что и у пьезоэлектрического тензора (§ 17). Мы будем считать среду непоглощающей, так что $\varepsilon_{i,kl}$ — вещественные величины.

Задача о генерации второй гармоники может быть поставлена следующим образом. Пусть на плоскую поверхность кри-

[1]) Отметим, что если распределение $|E_0|^2$ по сечению пучка не меняется вдоль его длины, то $R^2 = \text{const}$ и $\mathscr{E} = 0$. Обратное, однако, не обязательно: могут существовать решения, в которых $\mathscr{E} = 0$, так что $R = \text{const}$, но распределение зависит от x.

сталлической среды падает плоская монохроматическая волна с частотой ω. Наряду с отраженной и двумя преломленными (в двупреломляющем кристалле) волнами той же частоты возникают также отраженная и преломленные волны частоты 2ω. Волны этой частоты в кристалле представляют собой решение уравнений (109.5), (109.6), в которых нелинейный член в индукции, $\mathbf{D}^{(2)}$, должен быть выражен через поле основной волны. Амплитуды всех этих волн выражаются через амплитуду падающей волны с помощью граничных условий, на которых мы не будем останавливаться. Разумеется, амплитуда волн частоты 2ω будет мала в меру малости нелинейной восприимчивости [1]).

Преломленные волны распространяются далее в глубь кристалла как в неограниченной среде. По мере их распространения эффекты нелинейности накапливаются и интенсивность гармоник может достичь больших значений — происходит перекачка энергии из основной частоты в гармонику. Именно этот процесс и будет интересовать нас здесь. Условия же на поверхности кристалла играют при этом лишь роль «начальных» условий, задающих некоторую малую, но отличную от нуля, амплитуду поля второй гармоники. Эти же условия задают (для данного направления падающей волны) волновые векторы первой $\mathbf{k}_1$ и второй $\mathbf{k}_2$ гармоник в кристалле.

Как будет видно из дальнейшего, эффективная перекачка энергии происходит, только если выполняется *условие синхронизма* основной волны и гармоники [2]):

$$\mathbf{k}_2 \approx 2\mathbf{k}_1. \qquad (110.2)$$

Подчеркнем, что для самой постановки задачи о генерации одной лишь второй гармоники принципиальное значение имеет наличие дисперсии. В отсутствие дисперсии условие (110.2) выполняется при преломлении автоматически вместе с аналогичными условиями и для более высоких гармоник ($\mathbf{k}_3 \approx 3\mathbf{k}_1$ и т. п.). При наличии дисперсии это уже не так и можно считать, что условие синхронизма, выполняясь для второй гармоники, не выполняется для других. Подчеркнем, что уже само условие (110.2) фактически может быть выполнено, только если основная волна и гармоника относятся к различным поляризационным типам и, соответственно, имеют различные законы дисперсии.

---

[1]) Расчет условий отражения и преломления на границе нелинейной среды для некоторых частных случаев — см. статью *Bloembergen N.*, *Pershan P.S.* // Phys. Rev. 1962. V. 128. P. 606 (русский перевод в кн. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966).

[2]) Природа этого условия особенно ясна с квантовой точки зрения, когда генерация второй гармоники рассматривается как «слияние» двух фотонов в один. Равенство $\hbar\mathbf{k}_2 = 2\hbar\mathbf{k}_1$ выражает сохранение импульса в этом процессе.

Запишем поле в среде как суперпозицию двух волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \operatorname{Re}\left(\mathbf{e}_1 E_{10} e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega t)} + \mathbf{e}_2 E_{20} e^{i(\mathbf{k}_2\mathbf{r}-2\omega t)}\right], \qquad (110.3)$$

причем, в силу условия (110.2)

$$\mathbf{k}_2 = 2\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}, \qquad (110.4)$$

где $q \ll k_1$. Амплитуды волн представлены в виде произведений $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}E_0$, где $\mathbf{e}$ — единичный ($\mathbf{e}\mathbf{e}^* = 1$) вектор поляризации. В линейном приближении эти амплитуды были бы постоянны, а с учетом нелинейности они — медленно (т. е. мало на расстояниях $\sim 1/k_1$) меняющиеся функции координат.

Уравнения для амплитуд обеих волн получаются путем подстановки (110.3) в уравнения Максвелла (109.5), (109.6) и отделения в них членов с одинаковой зависимостью от времени. Мы не станем подробно приводить здесь эти простые, но громоздкие вычисления и ограничимся лишь некоторыми принципиальными указаниями.

Мы будем искать решения уравнений, описывающие стационарную генерацию второй гармоники в кристалле бегущей основной волной; такие решения не зависят от времени. При точном синхронизме ($\mathbf{q} = 0$) уравнения для амплитуд не содержали бы вовсе координат в явном виде; при неточном синхронизме координаты входят в уравнение только в комбинации $\mathbf{qr}$ (в множителе $\exp(-i\mathbf{qr})$). Выбрав направление вектора $\mathbf{q}$ в качестве оси z, можно поэтому искать решения уравнений, зависящие только от z. Если исходить из указанной выше постановки вопроса о падении волны ω на поверхность кристалла, то задача однородна в плоскостях, параллельных этой поверхности. Поэтому ось z ей перпендикулярна (перпендикулярность вектора $\mathbf{q}$ поверхности кристалла выполняется автоматически в силу граничных условий).

В линейном приближении волны в анизотропной (негиротропной) среде линейно поляризованы (см. § 97); для них $\mathbf{e}$ может быть определен как вещественный вектор, и именно эти значения для обеих волн будут подразумеваться ниже под $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Если разложить амплитуду $\mathbf{E}_0$ каждой волны по направлениям $\mathbf{e}$, $\mathbf{k}$, $[\mathbf{ek}]$, то составляющие вдоль двух последних направлений будут малы в меру малости производных dE_0/dz, появляющихся как эффект нелинейности. Составляющие же вдоль $\mathbf{e}$ приближенно совпадают с абсолютными величинами E_0 векторов $\mathbf{E}_0$. Уравнения для них получаются умножением уравнения (109.5) на вектор $\mathbf{e}_1$ или $\mathbf{e}_2$. Поскольку волны с $E_0 = \text{const}$ предполагаются точными решениями уравнений Максвелла в линейном приближении, то все линейные члены в уравнениях, не содержащие производных по z, взаимно сокращаются. Члены же с

составляющими $\mathbf{E}_0$ по направлениям $\mathbf{k}$ и $[\mathbf{ek}]$ (которые могли бы быть того же порядка величины, что и члены с производными dE_0/dz), как оказывается, выпадают при указанном умножении; это обстоятельство связано с ортогональностью индукции $\mathbf{D}$ направлениям как $\mathbf{k}$, так и $[\mathbf{ek}]$ (см. (97.3)).

Ввиду предполагаемой медленности зависимости амплитуд от координат, в уравнениях можно пренебречь вторыми производными от $\mathbf{E}_0$ по z. Поэтому, например, имеющееся в уравнении для $\mathbf{E}_2$ (умноженном на $\mathbf{e}_2$) выражение

$$e_{2i}\left\{(\operatorname{rot}\operatorname{rot})_{ik}-\frac{4\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ik}(2\omega)\right\}e_{2k}E_{20}e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}}$$

с учетом всего сказанного приближенно сводится к

$$2i\mathbf{e}_2[\mathbf{k}_2[\mathbf{l}\mathbf{e}_2]]\frac{dE_{20}}{dz}$$

(где $\mathbf{l}$ — орт оси z), и аналогично для $\mathbf{E}_1$.

Окончательные уравнения, получающиеся в результате описанных действий, гласят:

$$\alpha_2\frac{dE_{20}}{dz}=-i\eta e^{-iqz}E_{10}^2,$$
$$\alpha_1\frac{dE_{10}^*}{dz}=i\eta e^{-iqz}E_{10}E_{20}^*, \tag{110.5}$$

где введены обозначения [1]):

$$\eta=\frac{\omega^2}{2c^2}\varepsilon_{i,kl}(\omega,\omega)e_{2i}e_{1k}e_{1l}, \tag{110.6}$$

$$\alpha_1=\mathbf{l}[\mathbf{e}_1[\mathbf{k}_1\mathbf{e}_1]],\quad \alpha_2=\frac{1}{2}\mathbf{l}[\mathbf{e}_2[\mathbf{k}_2\mathbf{e}_2]]\approx\mathbf{l}[\mathbf{e}_2[\mathbf{k}_1\mathbf{e}_2]]. \tag{110.7}$$

Умножив первое уравнение (110.5) на E_{20}^*, а второе — на E_{10} и сложив их, найдем первый интеграл этой системы:

$$\alpha_1|E_{10}|^2+\alpha_2|E_{20}|^2=\text{const}\equiv P. \tag{110.8}$$

Он выражает собой постоянство суммарного (в обеих волнах) потока энергии вдоль оси z [2]).

---

[1]) Первое из уравнений (110.5) получается из членов с $e^{-2i\omega t}$, а второе — из членов с $e^{i\omega t}$. В правых частях этих уравнений использованы соотношения (108.13).

[2]) Усредненная по времени плотность потока энергии в волне $\mathbf{E}_1$:

$$\overline{S}_{1z}=\frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}\mathbf{l}[\mathbf{E}_{10}^*\mathbf{H}_{10}]=\frac{c^2}{8\pi\omega}\mathbf{l}[\mathbf{E}_{10}^*[\mathbf{k}_1\mathbf{E}_{10}]]=\frac{c^2\alpha_1}{8\pi\omega}|E_{10}|^2,$$

и аналогично для волны $\mathbf{E}_2$.

От комплексных величин удобно перейти к вещественным — абсолютным значениям и фазам величин E_{10} и E_{20}. Для максимального упрощения уравнений введем новые неизвестные ρ_1, ρ_2, φ_1, φ_2 как безразмерные величины, определив их согласно

$$E_{10} = \sqrt{\frac{P}{\alpha_1}}\rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad E_{20} = \sqrt{\frac{P}{\alpha_2}}\rho_2 e^{i\varphi_2}. \tag{110.9}$$

Система уравнений (110.5) инвариантна относительно преобразования

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + c, \quad \varphi_2 \to \varphi_2 + 2c.$$

Поэтому фактически в ней отделяются уравнения для функций ρ_1, ρ_2 и для инвариантной комбинации $2\varphi_1 - \varphi_2$, образующие вместе замкнутую систему уравнений:

$$\frac{d\rho_1}{d\zeta} = -\rho_1\rho_2 \sin\theta, \quad \frac{d\rho_2}{d\zeta} = \rho_1^2 \sin\theta, \tag{110.10}$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -s - \left(2\rho_2 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2}\right)\cos\theta, \tag{110.11}$$

где

$$\theta = 2\varphi_1 - \varphi_2 - s\zeta \tag{110.12}$$

и введены безразмерная переменная

$$\zeta = z\eta\sqrt{\frac{P}{\alpha_1^2\alpha_2}} \tag{110.13}$$

и безразмерный параметр

$$s = \frac{q}{\eta}\sqrt{\frac{\alpha_1^2\alpha_2}{P}}. \tag{110.14}$$

Первый интеграл (110.8) в этих переменных принимает вид

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1. \tag{110.15}$$

Рассмотрим случай точного синхронизма: $q=0$, т. е. $s=0$. Тогда уравнения (110.10), (110.11) имеют еще один первый интеграл:

$$\rho_1^2\rho_2 \cos\theta = \text{const} \equiv \delta \tag{110.16}$$

(причем постоянная $\delta^2 \leqslant 4/27$; это следует, как легко убедиться, из равенств (110.15), (110.16) в силу условия $|\cos\theta| \leqslant 1$). С использованием обоих этих интегралов решение уравнений (110.10) приводится к квадратурам — к эллиптическому интегралу

$$\zeta = \pm\frac{1}{2}\int\limits_{\rho_2^2(0)}^{\rho_2^2(\zeta)} \frac{du}{[u(1-u)^2 - \delta^2]^{1/2}}; \tag{110.17}$$

выбор знака перед интегралом определяется знаком начального (при $\zeta = 0$) значения $\sin\theta$. Кубическое уравнение

$$u(1-u)^2 - \delta^2 = 0 \tag{110.18}$$

имеет (при $\delta^2 \leqslant 4/27$) три вещественных положительных корня, из которых два меньше единицы; обозначим последние как ρ_a^2 и ρ_b^2, причем $\rho_a^2 < \rho_b^2$ [1]). Определяемая формулой (110.17) функция $\rho_2^2(\zeta)$ периодически меняется в пределах между этими значениями с периодом, равным интегралу

$$\int\limits_{\rho_a^2}^{\rho_b^2} \frac{du}{[u(1-u)^2 - \delta^2]^{1/2}}. \tag{110.19}$$

Аналогичным образом меняется и функция $\rho_1^2(\zeta) = 1 - \rho_2^2(\zeta)$, причем, когда одна из них максимальна, другая минимальна.

Величину ρ_a^2 надо отождествить со значением интенсивности второй гармоники, $\rho_2^2(0)$, задаваемой граничными условиями на поверхности кристалла ($z = 0$). Мы видим, что в направлении оси z в глубь кристалла происходит периодическая перекачка энергии из основной частоты во вторую гармонику и обратно. При уменьшении $\rho_2(0)$ период этого процесса возрастает, и при $\rho_2(0) \to 0$ стремится к бесконечности по логарифмическому закону. Предельному значению $\rho_2(0) = \rho_a = 0$ отвечает решение

$$\rho_1 = \frac{1}{\operatorname{ch}\zeta}, \qquad \rho_2 = \operatorname{th}\zeta, \tag{110.20}$$

получающееся из (117.17) при $\delta = 0$ элементарным интегрированием; в нем амплитуда второй гармоники монотонно возрастает и асимптотически при $\zeta \to \infty$ вся энергия переходит из основной частоты в гармонику.

Рассмотрим теперь обратный случай, когда амплитуда ρ_2 остается везде малой по сравнению с ρ_1. Мы увидим, что этот случай отвечает значительной расстройке синхронизма волн.

При $\rho_2 \ll \rho_1$ можно, в первом приближении, считать ρ_1 постоянным ($\rho_1 = \rho_1(0)$), а уравнения для ρ_2 и θ записать в виде

$$\frac{d\rho_2}{d\zeta} = \rho_1^2(0)\sin\theta, \qquad \frac{d\theta}{d\zeta} = -s + \frac{\rho_1^2(0)}{\rho_2}\cos\theta.$$

---

[1]) Между этими корнями полином в левой части (110.18) имеет максимум в точке $u = 1/3$, равный $4/27 - \delta^2$; при $\delta^2 = 4/27$ этот максимум обращается в нуль, два вещественных корня сливаются, а затем исчезают.

Решение этих уравнений, равное нулю в начальной точке $\zeta = 0$:

$$\rho_2(\zeta) = \frac{2}{s}\rho_1^2(0)\sin\frac{s\zeta}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{s\zeta}{2}. \tag{110.21}$$

Эти формулы определяют изменение поля на протяжении одного интервала $0 \leqslant \zeta \leqslant 2\pi/s$ (т. е. $0 \leqslant x \leqslant 2\pi/q$), после чего процесс повторяется периодически [1]). Условие $\rho_2 \ll \rho_1$ означает, что должно быть $\rho_1^2(0)/s \ll \rho_1(0)$, т. е. $s \gg \rho_1(0)$ или

$$qz_0 \gg 1, \qquad z_0 \sim \frac{1}{\eta\rho_1(0)\sqrt{P}}.$$

Это — условие сравнительно большой расстройки синхронизма. Вообще, величина параметра q определяет, какой эффект ограничивает генерацию гармоники (т. е. рост амплитуды ρ_2) — линейный эффект нарушения синхронизма при $qz_0 \gg 1$ или нелинейные эффекты при $qz_0 \ll 1$ [2]).

Выше в этом параграфе мы говорили везде о генерации второй гармоники за счет основной частоты. Но рассмотренные уравнения описывают и обратное явление: усиление (его называют *параметрическим*) слабого сигнала частоты ω в поле интенсивного излучения частоты 2ω; этот процесс, рассмотрением которого мы здесь ограничимся, представляет собой простейший случай более общего явления — усиления сигналов с различными частотами ω_2 и $\omega_1 - \omega_2$ в поле интенсивной волны с частотой ω_1 (*С.А. Ахманов*, *Р.В. Хохлов*, 1962; *R.H. Kingston*, 1962).

Прежде всего, подчеркнем следующее отличие этого процесса от генерации второй гармоники. Последняя могла начинаться с нулевой интенсивности гармоники. Возможность же усиления основной частоты во всяком случае требует хотя бы малой ее начальной интенсивности: если в начальной точке $\rho_1(0) = 0$, то так останется везде; из уравнений (110.10) видно, что вместе с ρ_1 обращаются в нуль также и производные всех порядков от ρ_1 и ρ_2.

Снова рассмотрим случай точного синхронизма и, сверх того, пусть начальное значение фазовой переменной $\theta(0) = -\pi/2$; при точном синхронизме это значение будет сохраняться. Тогда параметр $\delta = 0$ в силу равенства $\cos\theta = 0$, хотя начальные значения ρ_1 и ρ_2 отличны от нуля. Решение уравнений (110.10) в

---

[1]) В каждом последующем периоде к постоянному члену в фазовой переменной θ надо добавлять по π. В точке, где $\rho_2 = 0$, фаза φ_2 теряет смысл и разность фаз θ может испытывать скачок.

[2]) Напомним, что все проведенное рассмотрение основано на предположении $q \ll k_1$. Это условие уже полностью использовано при выводе уравнений (110.5) и малого параметра q/k_1 в них не осталось. Говоря о случае $qz_0 \gg 1$, мы предполагаем, конечно, что он совместим с условием $q \ll k_1$.

этом случае есть

$$\rho_1 = \frac{1}{\operatorname{ch}(\zeta - \zeta_0)}, \qquad \rho_2 = -\operatorname{th}(\zeta - \zeta_0), \tag{110.22}$$

где $\zeta_0 > 0$ — постоянная. При большом значении этой постоянной начальное значение $\rho_1(0) = 1/\operatorname{ch}\zeta_0$ мало. Мы видим, что вдоль оси z в глубь кристалла происходит усиление волны основной частоты за счет интенсивности гармоники. Последняя убывает до нуля (при $\zeta = \zeta_0$), а затем снова возрастает, пока асимптотически вся интенсивность не окажется сосредоточенной в ней [1]).

§ 111. Сильные электромагнитные волны

Возможность постановки рассмотренной в предыдущем параграфе задачи о генерации всего одной определенной гармоники была связана с наличием дисперсии. Теперь мы рассмотрим обратный случай, когда во всем существенном интервале частот дисперсию можно считать отсутствующей, так что индукция $\mathbf{D}(t)$ в каждой точке определяется значением $\mathbf{E}(t)$ в тот же момент времени [2]). Мы будем считать среду изотропной; тогда направления $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ совпадают. Нелинейность же в этом параграфе не предполагается малой, так что зависимость $D(E)$ — произвольная функция.

Пренебрежение поглощением и дисперсией имеет принципиальное значение в том отношении, что после этого из уравнений поля исчезают какие-либо параметры размерности частоты (или, тем самым, размерности длины). Это обстоятельство делает возможным построение точного решения, обобщающего обычную одномерную плоскую волну линейного приближения (*А.В. Гапонов, Г.И. Фрейдман*, 1959) [3]).

Пусть волна распространяется в направлении оси x, электрическое поле направлено по оси y, а магнитное — по оси z (E_y и H_z обозначаем просто как E и H). Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

[1]) При $\zeta > \zeta_0$ фазовой переменной надо приписать значение $\theta = \pi/2$ и изменить знак перед th в $\rho_2(\zeta)$.

[2]) Для единообразия изложения в этой главе мы и здесь будем говорить о нелинейной связи между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, предполагая среду немагнитной. В действительности о рассматриваемых явлениях обычно идет речь для сред с нелинейной зависимостью $\mathbf{B}$ от $\mathbf{H}$.

[3]) Это решение аналогично так называемым *простым волнам* одномерной гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости (см. VI, § 101).

принимают вид

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{111.1}$$

где по определению

$$\varepsilon(E) = \frac{dD}{dE} \tag{111.2}$$

(при $E \to 0$ функция $\varepsilon(E)$ стремится к значению ε_0 — обычной диэлектрической проницаемости).

Ищем решение, в котором функции $E(t,x)$ и $H(t,x)$ могут быть выражены как функция одна другой: $H = H(E)$. Тогда уравнения (111.1) можно переписать как

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{dE}{dt} + \frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial x} = 0, \qquad \frac{1}{c}\frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0. \tag{111.3}$$

Для того чтобы эти два уравнения могли удовлетворяться отличными от нуля значениями неизвестных $\partial E/\partial t$ и $\partial E/\partial x$, должен быть равен нулю их определитель. Это условие дает

$$\left(\frac{dH}{dE}\right)^2 = \varepsilon(E),$$

откуда

$$H = \pm\int\limits_0^E \sqrt{\varepsilon(E)}\,dE. \tag{111.4}$$

Подставив теперь dH/dE из (111.4) в одно из уравнений (111.3), имеем

$$-\frac{(\partial E/\partial t)_x}{(\partial E/\partial x)_t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_E = \pm\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Отсюда следует, что

$$x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}t$$

может быть произвольной функцией от E. Обозначив обратную функцию как f, имеем

$$E = f\left(x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}}t\right); \tag{111.5}$$

два знака здесь отвечают двум направлениям распространения волны. После выбора функции f формула (111.5) определяет в неявном виде зависимость $E(t,x)$. В слабых полях, когда можно положить $\varepsilon = \varepsilon_0$, (111.5) переходит в обычную плоскую волну с фазовой скоростью $c/\sqrt{\varepsilon_0}$. Отметим, что полученное решение

существует только при $\varepsilon > 0$ — в соответствии с условием устойчивости (18.8) [1]).

По мере распространения волны заданный в начальный момент ее профиль искажается, поскольку разные участки бегут с различными скоростями. Обычно $\varepsilon(E)$ убывает с ростом E (функция $\varepsilon(E)$ стремится к насыщению). Тогда точки профиля с бо́льшими значениями E бегут с бо́льшими скоростями, в результате чего увеличивается крутизна переднего фронта профиля (как это иллюстрирует рис. 60, на котором показана форма профиля в несколько последовательных моментов). В некоторый момент возникает перегиб профиля, после чего он должен был

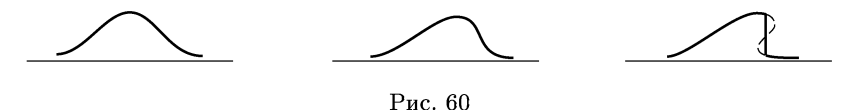


Рис. 60

бы стать неоднозначным. В действительности, в этот момент в волне возникает *электромагнитная ударная волна* — разрыв величин E и H. Граничные условия на разрыве имеют тот же вид (76.13), что и на любой движущейся поверхности. Для плоской поперечной волны имеем:

$$H_2 - H_1 = \frac{v}{c}(D_2 - D_1),\qquad E_2 - E_1 = \frac{v}{c}(H_2 - H_1), \tag{111.6}$$

где индексы 1 и 2 относятся к значениям величин соответственно впереди и позади фронта. Перемножив эти два равенства, найдем для скорости ударной волны:

$$v^2 = c^2\frac{E_2 - E_1}{D_2 - D_1}. \tag{111.7}$$

В ударной волне происходит диссипация энергии. Пусть Q — скорость диссипации, отнесенная к единице площади поверхности разрыва. Для ее вычисления пишем закон сохранения энергии, примененный к цилиндрическому элементу объема среды, одно основание которого находится позади, а другое — впереди разрыва:

$$\frac{c}{4\pi}(E_2H_2 - E_1H_1) = v(U_2 - U_1) + Q. \tag{111.8}$$

Слева стоит разность потоков энергии через оба основания, а справа — сумма скорости изменения внутренней энергии за счет

[1]) В изложенном выводе предполагается, что плотность, температура и т. д. среды не затрагиваются колебаниями поля. Это оправдывается как малостью стрикционных эффектов, так и большой (по сравнению со скоростью звука) скоростью распространения волн.

перемещения границы между областями *1* и *2* и диссипируемой в ней энергии. Разность внутренних энергий (при неизменных плотности и температуре):

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{D_1}^{D_2} E\,dD + \frac{1}{8\pi}(H_2^2 - H_1^2).$$

Используя также равенства (111.6), (111.7), можно привести (111.8) к виду

$$Q = \frac{v}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}(D_2 - D_1)(E_2 + E_1) - \int\limits_{D_1}^{D_2} E\,dD\right\}.$$

Если ударная волна слабая (т. е. скачки величин в ней малы), то при вычислении Q можно представить связь D с E в виде разложения

$$D(E) = D_1 + \varepsilon(E_1)(E - E_1) + \frac{1}{2}\varepsilon'(E_1)(E - E_1)^2,$$

где $\varepsilon'(E) = d^2D/dE^2$. Простое вычисление приводит к результату

$$Q = -\frac{1}{48\pi}v\varepsilon'(E_1)(E_2 - E_1)^3. \qquad (111.9)$$

Таким образом, диссипация энергии в слабой электромагнитной ударной волне — третьего порядка по величине скачка поля в ней. Поскольку должно быть $Q > 0$, то при $\varepsilon' < 0$ будет $E_2 > E_1$ — в соответствии с рис. 60.

Появление ударной волны нарушает применимость полученного решения: выражения (111.4), (111.5) для поля противоречат граничным условиям (111.6). Существенно, однако, что волна остается приближенно (с точностью до величин второго порядка включительно) простой, пока ударную волну можно считать слабой[1]). С этой точностью выражение для скорости разрыва может быть представлено в виде

$$v = c\left[\varepsilon\left(\frac{E_1 + E_2}{2}\right)\right]^{-1/2}. \qquad (111.10)$$

В этом же приближении положение разрыва на профиле волны определяется условием равенства двух площадей между вертикальной прямой и штриховой кривой на рис. 60.

[1]) Ситуация здесь вполне аналогична возникновению обычных гидродинамических ударных волн в сильной звуковой волне (см. VI, § 102), и мы не будем повторять всех соответствующих рассуждений.

Задача

Из вакуума на границу среды падает нормально плоская волна вида $E = f_i(t - x/c)$. Определить отраженную волну (*L.J. Broer*, 1963).

Решение. Поле в вакууме (полупространство $x < 0$) складывается из падающей и отраженной (индекс r) волн:

$$E = f_i\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_r\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

$$H = f_i\left(t - \frac{x}{c}\right) - f_r\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

(в вакууме уравнения поля линейны и два решения можно складывать!). В среде, $x > 0$, имеется лишь прошедшая волна, в которой

$$E = f_t\left(t - \frac{\sqrt{\varepsilon(E)}}{c}x\right), \quad H = \int_0^E \sqrt{\varepsilon}\, dE.$$

Из условия непрерывности при $x = 0$ электрического поля имеем

$$f_t(t) = f_i(t) + f_r(t).$$

Условие же непрерывности H на той же границе дает затем соотношение

$$f_i(t) - f_r(t) = \int_0^{f_i(t)+f_r(t)} \sqrt{\varepsilon(E)}\, dE,$$

которым и определяется, в неявном виде, функция f_r.

§ 112. Вынужденное комбинационное рассеяние

К числу нелинейных эффектов третьего порядка относится влияние, оказываемое излучением некоторой частоты ω_1 (*волна накачки*) на распространение в той же среде волны другой частоты ω_2. Эти эффекты заключены в нелинейной проницаемости

$$\varepsilon_{i,klm}(\omega_2, \omega_1, -\omega_1), \tag{112.1}$$

дающей вклад в индукцию с частотой ω_2 [1]).

[1]) Условие вещественности для проницаемости третьего порядка $\varepsilon_{i,klm}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ требует, чтобы с разностями энергетических уровней системы не совпадали не только частоты ω_1, ω_2, ω_3 и их сумма ω_4, но и их попарные суммы; для восприимчивости (112.1) это: $\omega_1 + \omega_2$ и $|\omega_1 - \omega_2|$. В этом можно убедиться, проследив за происхождением энергетических знаменателей в упомянутом на с. 536 выражении нелинейной восприимчивости через матричные элементы взаимодействия среды с полем; это выражение приведено в статье *Armstrong J.A.*, *Bloembergen N.*, *Ducuing J.*, *Pershan P.S.* // Phys. Rev. 1962. V. 127. P. 1918 (русский перевод в кн. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. — М.: Мир, 1966).

В изотропной среде индукция $\mathbf{D}_2$ на частоте ω_2 с учетом указанного вклада дается выражением

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2\mathbf{E}_2 + \alpha_2(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1^*)\mathbf{E}_2 + \beta_2\mathbf{E}_1(\mathbf{E}_1^*\mathbf{E}_2) + \gamma_2\mathbf{E}_1^*(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2), \quad (112.2)$$

где

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10}e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega_1 t)}, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20}e^{i(\mathbf{k}_2\mathbf{r}-\omega_2 t)}. \quad (112.3)$$

В первом члене в (112.2) $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\omega_2)$ — обычная линейная проницаемость; в остальных членах α_2, β_2, γ_2 — три независимые компоненты тензора (112.1) (их число очевидно из самого способа построения выражения (112.2) из трех векторов $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_1^*$, $\mathbf{E}_2$). Мы видим, что нелинейное воздействие поля $\mathbf{E}_1$ на поле с частотой ω_2 может быть описано путем введения анизотропной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{2ik} = (\varepsilon_2 + \alpha_2\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1^*)\delta_{ik} + \beta_2 E_{1i}E_{1k}^* + \gamma_2 E_{1i}^* E_{1k}. \quad (112.4)$$

В недиссипативной среде коэффициенты α_2, β_2, γ_2 (как и ε_2) вещественны и тензор (112.4) эрмитов. Как частный случай, при $\omega_1 \to 0$ и соответственно вещественном $\mathbf{E}_1$, он содержит в себе двойное преломление в статическом электрическом поле, описываемое формулой (100.1). При $\omega_1 \neq 0$ выражение (112.4) описывает также наведенную полем $\mathbf{E}_1$ гиротропию среды. Сравнив (112.2) со (101.8), найдем вектор гирации

$$\mathbf{g} = \frac{i}{2}(\beta_2 - \gamma_2)[\mathbf{E}_1^*\mathbf{E}_1]. \quad (112.5)$$

Он обращается в нуль, если поле $\mathbf{E}_1$ линейно поляризовано.

Более разнообразные явления могут происходить, если нелинейные взаимодействия поля со средой сопровождаются диссипацией. В таком случае коэффициенты α_2, β_2, γ_2 комплексны (линейную же проницаемость по-прежнему будем считать вещественной). Оказывается, что такая диссипация может приводить как к ослаблению, так и к усилению поля $\mathbf{E}_2$. В последнем случае говорят о *вынужденном комбинационном рассеянии* [1]).

Вещественность линейных проницаемостей $\varepsilon(\omega_1)$, $\varepsilon(\omega_2)$ означает, что на самих частотах ω_1 и ω_2 в среде нет диссипации: кванты $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$ сами по себе не поглощаются средой. Пусть в области частот, где среда способна к поглощению, лежит разность $\omega_1 - \omega_2$, но не сумма $\omega_1 + \omega_2$. Диссипация осуществляется лишь путем превращения квантов большей энергии в кванты меньшей

[1]) С квантовой, микроскопической, точки зрения речь идет об испускании фотона $\hbar\omega_2$ при падении фотона $\hbar\omega_1$ на атомы, находящиеся в поле фотонов $\hbar\omega_2$. При этом энергия $\hbar(\omega_1 - \omega_2)$ передается среде — рождается элементарное возбуждение среды определенного типа (фонон, экситон и т. п.). В специальной литературе существуют особые названия для процессов рассеяния различных типов. В нашем чисто феноменологическом описании мы используем указанный в тексте термин как условное общее название.

энергии с отдачей освобождающегося избытка среде. Таким образом, при $\omega_1 > \omega_2$ волна накачки усиливает волну меньшей частоты ω_2. Усредненная по времени энергия, получаемая полем $\mathbf{E}_2$ (в единицу времени в единице объема) за счет слабых нелинейных эффектов, непосредственно дается взятым с обратным знаком выражением (96.5):

$$\frac{d\overline{U}_2}{dt} = -\frac{i\omega_2}{8\pi}(\varepsilon_{2ik}^* - \varepsilon_{2ki})E_{2i}E_{2k}^* =$$
$$= -\frac{\omega^2}{4\pi}\{\alpha_2''|\mathbf{E}_1|^2|\mathbf{E}_2|^2 + \beta_2''|\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2|^2 + \gamma_2''|\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^*|^2\} \quad (112.6)$$

(ср. вывод формул (108.9)). Аналогичным выражением дается изменение энергии поля $\mathbf{E}_1$:

$$\frac{d\overline{U}_1}{dt} = -\frac{\omega_1}{4\pi}\{\alpha_1''|\mathbf{E}_1|^2|\mathbf{E}_2|^2 + \beta_1''|\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2|^2 + \gamma_1''|\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^*|^2\}, \quad (112.7)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — независимые компоненты тензора проницаемости

$$\varepsilon_{i,klm}(\omega_1, \omega_2, -\omega_2),$$

описывающей влияние поля частоты ω_2 на поле частоты ω_1.

Соображения, подобные использованным в § 107 при выводе теоремы Мэнли–Роу, позволяют утверждать, что

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{d\overline{U}_1}{dt} = -\frac{1}{\omega_2}\frac{d\overline{U}_2}{dt} \quad (112.8)$$

— на каждый рождающийся квант $\hbar\omega_2$ приходится по одному исчезающему кванту $\hbar\omega_1$. Отсюда следует, что

$$\alpha_1'' = -\alpha_2'', \quad \beta_1'' = -\beta_2'', \quad \gamma_1'' = -\gamma_2''. \quad (112.9)$$

Диссипируемая энергия определяется по убыли суммарной энергии обоих полей:

$$Q = -\frac{d\overline{U}_1}{dt} - \frac{d\overline{U}_2}{dt} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}\frac{d\overline{U}_2}{dt}. \quad (112.10)$$

При $\omega_1 > \omega_2$ из условия $Q > 0$ следует, что $d\overline{U}_2/dt > 0$ — волна меньшей частоты усиливается в соответствии со сказанным выше. Условие положительности выражения (112.6) дается неравенствами [1])

$$\alpha_2'' < 0, \quad \alpha_2'' + \beta_2'' < 0, \quad \alpha_2'' + \gamma_2'' < 0, \quad \alpha_2'' + \beta_2'' + \gamma_2'' < 0. \quad (112.11)$$

[1]) В этом можно убедиться, рассмотрев значения выражения (112.6) при различных поляризациях полей $\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 E_1$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 E_2$: линейные поляризации совпадающих или взаимно перпендикулярных направлений, круговые поляризации одинакового или разных знаков. В первых двух случаях $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ вещественны, причем $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 1$ или $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0$. Во вторых двух случаях $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ комплексны, причем $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* = 1$ или $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 1$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* = 0$.

Обратим внимание на то, что рассмотренный эффект не зависит от фазовых соотношений между полями. Это связано с тем, что поле волны накачки входит в уравнения в виде билинейных $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_1^*$ выражений, из которых фазовые множители выпадают. В конечном счете это приводит к тому, что для усиления поля ω_2 не требуется синхронизма полей — в противоположность рассмотренным в § 110 явлениям генерации гармоники и параметрического усиления сигнала.

Оказывается возможным связать характеристики вынужденного комбинационного рассеяния с характеристиками обычного (спонтанного) рассеяния, о котором будет идти речь в гл. XV. Соответствующие вычисления приведены в задаче к § 118.

Приведенные выше соотношения справедливы, как уже было указано, если поглощение энергии средой происходит лишь на разностной частоте $\omega_1 - \omega_2$. Другая ситуация имеет место, если в области поглощения лежит не разностная, а суммарная частота $\omega_1 + \omega_2$. В этом случае на каждый поглощенный квант $\hbar\omega_2$ поглощается также квант $\hbar\omega_1$, и среде отдается энергия, равная $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$ (*двухфотонное поглощение*). Естественно, что в этом случае ослабляются волны обеих частот.

Г Л А В А XIV

ПРОХОЖДЕНИЕ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

§ 113. Ионизационные потери быстрых частиц в веществе. Нерелятивистский случай

Быстрая заряженная частица, проходя через вещество, ионизует его атомы и тем самым теряет свою энергию [1]). В газах ионизационные потери могут быть определены как результат столкновений быстрой частицы с отдельными атомами. В конденсированной же среде во взаимодействие с пролетающей частицей может вовлекаться одновременно много атомов. Влияние этого обстоятельства на потерю энергии частицей является, с макроскопической точки зрения, результатом диэлектрической поляризации среды ее зарядом. Мы рассмотрим этот эффект сначала для случая нерелятивистских скоростей частицы. Как выясняется из результатов, в этом случае поляризация среды мало отражается на величине потерь. Соответствующий вывод, однако, представляет методический интерес ввиду дальнейших применений аналогичного метода.

Выясним прежде всего условия, допускающие макроскопическое рассмотрение этого явления. В спектральное разложение поля, создаваемого движущейся (со скоростью v) частицей на расстоянии r от ее пути, входят главным образом частоты порядка v/r (обратное «время столкновения»). Ионизацию же атома могут производить компоненты поля с частотами $\omega \gtrsim \omega_0$, где ω_0 — некоторая средняя частота, отвечающая движению большинства электронов в атоме. Поэтому частица будет взаимодействовать одновременно со многими атомами, если длина v/ω_0 велика по сравнению с междуатомными расстояниями; в конденсированных телах последние совпадают (по порядку величины) с размерами a самих атомов. Таким образом, мы приходим к условию $v \gg a\omega_0$, т. е. скорость ионизующей частицы должна быть велика по сравнению со скоростями атомных электронов (или по крайней мере большинства из них) [2]).

---

[1]) Мы говорим, как это принято, об «ионизационных» потерях, но в них включаются, разумеется, также и потери на возбуждение дискретных атомных уровней.

[2]) Для энергии E частицы отсюда получается условие $E \gg IM/m$, где M — масса частицы, m — масса электрона, I — некоторая средняя энергия ионизации для большинства электронов в атоме.

Определим поле, создаваемое заряженной частицей, движущейся в материальной среде. В нерелятивистском случае достаточно рассмотреть лишь электрическое поле, определяющееся одним только скалярным потенциалом φ. Последний удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\widehat{\varepsilon}\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \tag{113.1}$$

в котором диэлектрическая проницаемость понимается в операторном смысле, а выражение $e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$ в правой части равенства есть плотность, создаваемая точечным зарядом e, движущимся с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ [1]).

Разложим φ в интеграл Фурье по координатам:

$$\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{113.2}$$

Применив к обеим частям этого равенства оператор Лапласа, найдем, что компонента Фурье от $\Delta\varphi$ равна

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}}.$$

С другой стороны, взяв компоненту Фурье от обеих частей уравнения (113.1), имеем

$$\widehat{\varepsilon}(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\int 4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)e^{-i\mathbf{kr}}\, dV = -4\pi e e^{-it\mathbf{vk}}.$$

Сравнив обе формулы, получаем

$$\widehat{\varepsilon}\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2} e^{-it\mathbf{vk}}.$$

Отсюда видно, что $\varphi_{\mathbf{k}}$ зависит от времени посредством множителя $\exp(-it\mathbf{vk})$. Но оператор $\widehat{\varepsilon}$, действуя на функцию $\exp(-i\omega t)$, умножает ее на $\varepsilon(\omega)$. Поэтому окончательно имеем для φ_k следующее выражение:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2\varepsilon(\mathbf{kv})} e^{-it\mathbf{vk}}.$$

Компонента Фурье напряженности поля связана с компонентой Фурье потенциала соотношением

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} = -\operatorname{grad}(\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}) = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}.$$

[1]) Предполагая движение частицы прямолинейным, мы тем самым пренебрегаем рассеянием, что в рассматриваемой задаче всегда законно.

Если частица обладает зарядом ze, то все формулы для торможения в этом и следующем параграфах должны быть умножены на z^2.

Таким образом,

$$\mathbf{E}_\mathbf{k} = -i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k} = -\frac{4\pi i e\mathbf{k}}{k^2\varepsilon(\mathbf{kv})}e^{-it\mathbf{kv}}. \tag{113.3}$$

Полная напряженность поля получается обратным суммированием ее компонент Фурье:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{113.4}$$

Интересующая нас потеря энергии движущейся частицей есть не что иное, как работа, производимая обратной силой торможения $e\mathbf{E}$, действующей на частицу со стороны создаваемого ею поля. Взяв значение поля в той точке $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, в которой находится частица, мы получим в подынтегральном выражении в (113.4) множитель $\exp(it\mathbf{vk})$, который сокращается с множителем $\exp(-it\mathbf{vk})$ в выражении (113.3) для $\mathbf{E}_\mathbf{k}$. Поэтому сила торможения $\mathbf{F}$ дается следующим интегралом:

$$\mathbf{F} = -4\pi i e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{k}}{k^2\varepsilon(\mathbf{kv})} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Заранее очевидно, что сила $\mathbf{F}$ направлена против скорости $\mathbf{v}$; направление последней выберем в качестве оси x. Введя обозначения $k_x v = \omega$, $q = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ и заменив $dk_y\,dk_z$ на $2\pi q\,dq$, перепишем абсолютную величину F в виде

$$F = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{q_0} \frac{q\omega\,dq\,d\omega}{\varepsilon(\omega)(q^2v^2 + \omega^2)} \tag{113.5}$$

(о выборе верхнего предела интегрирования по q см. ниже).

Необходимо сделать еще следующее замечание по поводу интегрирования по $d\omega$ в формуле (113.5). При $\omega \to \infty$ функция $\varepsilon(\omega) \to 1$ и интеграл расходится (логарифмически). Это обстоятельство связано с тем, что из поля $\mathbf{E}$ в действительности надо было бы вычесть то поле, которое имелось бы при движении частицы в пустоте (т. е. при $\varepsilon = 1$); ясно, что это поле не имеет отношения к торможению частицы в веществе. Такое вычитание привело бы к замене в подынтегральном выражении (113.5) $1/\varepsilon$ на $1/\varepsilon - 1$, после чего интеграл будет сходиться. Можно, однако, достичь того же результата без указанной замены, если условиться понимать интегрирование в пределах от $-\infty$ до ∞ как интегрирование в симметричных пределах от $-\Omega$ до Ω, после чего $\Omega \to \infty$. Ввиду четности функции $\varepsilon'(\omega)$ вещественная часть

подынтегрального выражения есть нечетная функция частоты и при таком способе интегрирования дает нуль; интеграл же от мнимой части подынтегрального выражения сходится.

Ниже нам будет иногда удобно пользоваться обозначением

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega)} = \eta(\omega) = \eta' + i\eta'', \tag{113.6}$$

где $\eta'(\omega)$, $\eta''(\omega)$ — соответственно четная и нечетная функции, причем $\eta'' = -\varepsilon''/|\varepsilon|^2 < 0$. Формулу (113.5) можно переписать в явно вещественном виде:

$$F = \frac{2e^2}{\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{q_0} \frac{q\omega|\eta''(\omega)|}{q^2v^2 + \omega^2}\, dq\, d\omega. \tag{113.7}$$

Потери энергии частицей на единице длины ее пути есть работа силы торможения на этом пути, т. е. как раз совпадает с величиной F.

Согласно общим правилам квантовой механики фурье-компонента поля с волновым вектором $\mathbf{k}$ передает ионизационному электрону (δ-электрону) импульс $\hbar\mathbf{k}$. При достаточно больших значениях q ($q \gg \omega_0/v$) имеем $k^2 = q^2 + \omega^2/v^2 \approx q^2$, так что передаваемый импульс приближенно совпадает с $\hbar\mathbf{q}$. Заданному значению $\mathbf{q}$ соответствуют столкновения с прицельным расстоянием $\sim 1/q$. Поэтому условие применимости рассматриваемого макроскопического метода требует $1/q \gg a$. В соответствии с этим выберем в качестве верхнего предела интегрирования значение q_0, удовлетворяющее условию $\omega_0/v \ll q_0 \ll 1/a$; величина $F(q_0)$ есть торможение быстрой частицы с передачей атомному электрону импульса, не превышающего $\hbar q_0$.

Произведя в (113.7) интегрирование по dq, получим

$$F(q_0) = \frac{2e^2}{\pi v^2} \int\limits_0^\infty \omega|\eta''(\omega)| \ln\frac{q_0 v}{\omega}\, d\omega. \tag{113.8}$$

Эта формула в своем общем виде уже не может быть преобразована дальше, но ее можно представить в более удобной форме путем введения соответствующих обозначений.

Предварительно вычислим интеграл

$$\int\limits_0^\infty \omega\eta''(\omega)\, d\omega = -\frac{i}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\varepsilon}\, d\omega.$$

Для этого замечаем, что если производить интегрирование в комплексной плоскости ω по контуру, состоящему из вещественной

оси и бесконечно удаленной верхней полуокружности σ, то интеграл обратится в нуль, так как подынтегральное выражение не имеет полюсов в верхней полуплоскости. При больших значениях аргумента функция $\varepsilon(\omega)$ определяется формулой (78.1):

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}. \qquad (113.9)$$

Интегрирование по бесконечно удаленной полуокружности σ производится с помощью этой формулы, и в результате получаем [1])

$$-\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\,d\omega = -i\frac{2\pi N e^2}{m}\int_\sigma \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2\pi^2 N e^2}{m}. \qquad (113.10)$$

Введем некоторое среднее значение частоты движения атомных электронов, определяемое равенством

$$\ln\overline{\omega} = \int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\ln\omega\,d\omega \Bigg/ \int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\,d\omega = \\ = \frac{m}{2\pi^2 N e^2}\int_0^\infty \omega|\eta''(\omega)|\ln\omega\,d\omega. \qquad (113.11)$$

С помощью этого обозначения формула (113.8) будет иметь вид

$$F(q_0) = \frac{4\pi N e^4}{mv^2}\ln\frac{q_0 v}{\overline{\omega}}. \qquad (113.12)$$

Сделаем в этом месте следующее замечание. По виду формулы (113.7) или (113.11) можно было бы думать, что заметный вклад в ионизационное торможение (113.12) вносят только те области частот, в которых имеется существенное поглощение. Это, однако, необязательно, и в указанных формулах может содержаться заметный вклад также от областей, в которых ε'' мало́. Дело в том, что в таких областях функция $\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon'(\omega)$ может проходить через нуль, а нули $\varepsilon(\omega)$ являются полюсами подынтегрального выражения в (113.5). В действительности, конечно, $\varepsilon''(\omega)$ не равно нулю строго, и потому нуль функции $\varepsilon(\omega)$ расположен не на самой вещественной оси, а чуть ниже ее. Это значит, что при использовании проходящего через нуль вещественного выражения для $\varepsilon(\omega)$ полюс подынтегрального выражения должен быть обойден сверху, и это дает соответствующий вклад в интеграл. Так, если функция $\varepsilon(\omega)$ дается формулой (84.5), то

[1]) Этот результат совпадает с (82.12), как и должно было быть, поскольку при $|\omega| \to \infty$ имеем $|\varepsilon| \to 1$, и потому $\eta'' \to -\varepsilon''$.

вклад в торможение (113.12), возникающий от обхода полюсов $\pm\omega_1$ (где $\varepsilon(\omega_1) = 0$), равен, как легко убедиться прямым вычислением по (113.7),

$$\frac{4\pi Ne^4}{mv^2a^2}\ln\frac{q_0 v}{\omega_1}.$$

Для того чтобы найти торможение $F(q_1)$ с передачей импульса, не превышающего некоторого значения $q_1 > q_0$, надо «сшить» формулу (113.12) с формулой квантовомеханической теории столкновений, соответствующей торможению при столкновениях с отдельными атомами. Это можно сделать благодаря тому, что области применимости обеих формул перекрываются. Как известно из теории столкновений, торможение с передачей импульса в интервале $\hbar\, dq$ есть

$$dF = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\frac{dq}{q}, \tag{113.13}$$

причем эта формула применима (в нерелятивистском случае) для любых значений $q \gg \omega_0/v$, допускаемых законами сохранения импульса и энергии, при условии лишь, чтобы передаваемая энергия была мала по сравнению с первоначальной энергией быстрой частицы [1]). Торможение же со всеми значениями q между q_0 и q_1 есть соответственно

$$\frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\ln\frac{q_1}{q_0}.$$

При прибавлении этой величины к формуле (113.12) в последней q_0 просто заменяется на q_1, так что

$$F(q_1) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\ln\frac{q_1 v}{\overline{\omega}}. \tag{113.14}$$

Если атомному электрону передается большой (по сравнению с атомными) импульс $\hbar q_1$, то получаемая им энергия равна $E_1 = \hbar^2 q_1^2/(2m)$. Введя эту величину, напишем

$$F(E_1) = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2}\ln\frac{2mv^2E_1}{\hbar^2\overline{\omega}^2}. \tag{113.15}$$

[1]) См. III, § 149; величина F отличается от введенного там «эффективного торможения» множителем $N_a = N/Z$ — плотностью числа атомов. Формула (113.13) отвечает столкновениям со свободными электронами. Однако ее область применимости ($q \gg \omega_0/v$) начинается от таких значений q, при которых атомные электроны фактически еще нельзя рассматривать как свободные. Последнее требовало бы значений $q \gg \omega_0/v_0$ (v_0 — порядок величины скоростей большинства атомных электронов), когда энергия δ-электрона $\hbar^2q^2/(2m)$ была бы велика по сравнению с атомными энергиями.

Формулы (113.14), (113.15) определяют торможение быстрой частицы путем ионизации с передачей энергии, не превышающей определенного значения E_1, малого по сравнению с первоначальной энергией частицы. Подчеркнем, что при таком условии формулы справедливы в равной степени для торможения как быстрых электронов, так и быстрых тяжелых частиц.

Формула (113.15) отличается от результата микроскопической теории, не учитывающей взаимодействия между атомами (см. III, § 149, формула (149.14)), лишь определением «энергии ионизации» I, роль которой играет теперь $\hbar\overline{\omega}$. Однако средняя (по электронам) энергия ионизации атома обычно вообще мало зависит от его взаимодействия с другими атомами, так как основную роль в ней играют электроны внутренних оболочек, почти не затрагиваемых этим взаимодействием. К тому же в данном случае эта величина входит под знаком логарифма, и потому способ ее точного определения тем более слабо сказывается на величине торможения.

При столкновении тяжелой частицы с электроном даже максимальный передаваемый импульс $\hbar q_{\max}$ мал по сравнению с импульсом частицы Mv. Поэтому изменение энергии тяжелой частицы равно $\mathbf{v}\cdot\hbar\mathbf{q}$; приравнивая эту величину энергии электрона, получим

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} = \hbar\mathbf{q}\mathbf{v} \leqslant \hbar q v,$$

откуда $\hbar q_{\max} = 2mv$ и затем $E_{1\,\max} = 2mv^2$. Подставив это значение в (113.15) вместо E_1, получим полное ионизационное торможение тяжелой частицы:

$$F = \frac{4\pi N e^4}{mv^2} \ln \frac{2mv^2}{\hbar\overline{\omega}}. \tag{113.16}$$

Эта формула отличается от обычно используемой (см. III, (150.10)) лишь определением ионизационной энергии $\hbar\overline{\omega}$.

Проследим, каким образом определенная согласно (113.11) величина $\hbar\overline{\omega}$ переходит в разреженной среде в среднюю энергию ионизации отдельного атома, определенную согласно формуле III, (149.11). Для этого замечаем, что в разреженном газе (который для простоты полагаем состоящим из одинаковых атомов) диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N_a \alpha(\omega),$$

где N_a — число атомов в единице объема, $\alpha(\omega)$ — поляризуемость одного атома; при этом $|\varepsilon - 1| \ll 1$. Для мнимой части величины $\eta = 1/\varepsilon$ имеем

$$|\eta''| \approx 4\pi N_a \alpha''(\omega).$$

Поляризуемость атома дается формулой IV, (85.13); отделив в ней мнимую часть (с помощью формулы IV, (75.19)), получим при $\omega > 0$:

$$|\eta''| = \frac{4\pi}{3} N_a \sum_n |\mathbf{d}_{0n}|^2 \delta(E_n - E_0 - \hbar\omega),$$

где E_0 и E_n — энергии основного и возбужденных состояний атома. Подставив это выражение в (113.11), произведя интегрирование и заменив $N = N_a Z$, придем к определению III, (149.11).

§ 114. Ионизационные потери быстрых частиц в веществе. Релятивистский случай

При скоростях, сравнимых со скоростью света, влияние поляризации среды на торможение быстрой частицы может стать, как мы увидим, весьма существенным, причем не только в конденсированных веществах, но даже и в газах [1]).

Для вывода соответствующих формул применим метод, аналогичный использованному в предыдущем параграфе. При этом, однако, надо исходить из полных уравнений Максвелла. При наличии сторонних зарядов (с пространственной плотностью $\rho_{\text{ст}}$) и сторонних токов (с плотностью $\mathbf{j}_{\text{ст}}$) эти уравнения имеют вид [2]):

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{114.1}$$

$$\operatorname{div} \hat{\varepsilon}\mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{ст}}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \hat{\varepsilon}\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ст}}. \tag{114.2}$$

В данном случае распределение сторонних зарядов и токов дается формулами

$$\rho_{\text{ст}} = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{j}_{\text{ст}} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \tag{114.3}$$

Вводим скалярный и векторный потенциалы согласно обычным определениям:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \tag{114.4}$$

в результате которых уравнения (114.1) удовлетворяются тождественно. На потенциалы $\mathbf{A}$ и φ накладываем дополнительное

---

[1]) Этот эффект был указан *Ферми* (*E. Fermi*, 1940) и рассчитан им для специальной модели газа из атомов, рассматриваемых как гармонические осцилляторы. Излагаемый ниже общий вывод принадлежит *Л. Ландау.*

[2]) Мы полагаем везде $\mu(\omega) = 1$, так как при тех частотах, которые существенны для ионизационных потерь, вещество ведет себя как немагнитное.

условие

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\widehat{\varepsilon}\varphi}{\partial t} = 0, \tag{114.5}$$

являющееся обобщением налагаемого в теории излучения *условия Лоренца.* Тогда подстановка (114.4) в (114.2) приводит к следующим уравнениям для потенциалов:

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{A} - \frac{\widehat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t),\\ \widehat{\varepsilon}\left(\Delta\varphi - \frac{\widehat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) = -4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t).\end{gathered} \tag{114.6}$$

Разложим $\mathbf{A}$ и φ в интегралы Фурье по координатам. Взяв компоненты Фурье от обеих частей уравнений (114.6), получим

$$\begin{gathered}k^2\mathbf{A}_\mathbf{k} + \frac{\widehat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_\mathbf{k}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}e\mathbf{v}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t},\\ \widehat{\varepsilon}\left(k^2\varphi_\mathbf{k} + \frac{\widehat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_\mathbf{k}}{\partial t^2}\right) = 4\pi e e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}.\end{gathered}$$

Отсюда видно, что зависимость $\mathbf{A}_\mathbf{k}$ и $\varphi_\mathbf{k}$ от времени дается множителями $\exp(-it\mathbf{k}\mathbf{v})$. Снова вводим обозначение $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v} = k_x v$ и получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\mathbf{k} &= \frac{4\pi e}{c}\frac{\mathbf{v}}{k^2-\omega^2\varepsilon(\omega)/c^2}e^{-i\omega t}.\\ \varphi_\mathbf{k} &= \frac{4\pi e}{\varepsilon(\omega)}\frac{1}{k^2-\omega^2\varepsilon(\omega)/c^2}e^{-i\omega t}.\end{aligned} \tag{114.7}$$

Компонента Фурье напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}_\mathbf{k} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}_\mathbf{k} - i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}. \tag{114.8}$$

С помощью полученных формул действующая на частицу сила торможения $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$[1]) находится так же, как это было сделано в предыдущем параграфе. С теми же обозначениями получим теперь для величины этой силы следующую формулу:

$$F = \frac{ie^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{q_0}\frac{\left(\frac{1}{v^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)\omega q\,dq\,d\omega}{\varepsilon\left[q^2+\omega^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)\right]} \tag{114.9}$$

(при $c\to\infty$ эта формула переходит, разумеется, в (114.5)).

---

[1]) Что касается магнитной силы $e[\mathbf{v}\mathbf{H}]/c$, то из соображений симметрии очевидно, что она обращается в нуль (не говоря уже о том, что эта сила, будучи перпендикулярна к скорости частицы, вообще не производила бы над ней работы).

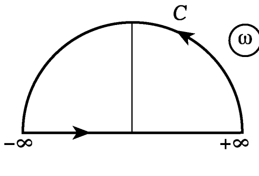
Начнем с интегрирования по частотам. Имея в виду производить интегрирование в комплексной плоскости ω, выясним предварительно, в каких точках верхней полуплоскости подынтегральное выражение имеет полюсы. Функция $\varepsilon(\omega)$ не имеет в этой области ни особых точек, ни нулей; поэтому искомыми полюсами могут быть только нули выражения

$$\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)-q^2.$$

Покажем, что при всяком значении положительного вещественного числа q^2 это выражение обращается в нуль только при одном значении ω.

Для доказательства[1]) воспользуемся известной теоремой теории функций комплексной переменной, согласно которой интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{df(\omega)}{d\omega}\frac{d\omega}{f(\omega)-a}, \tag{114.10}$$



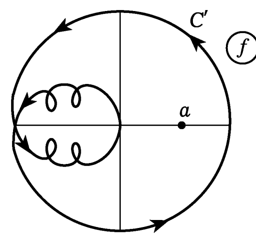


Рис. 61

взятый по замкнутому контуру C, равен разности между числом нулей и числом полюсов функции $f(\omega)-a$ в области, ограниченной контуром C. Пусть

$$f(\omega)=\omega^2\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right),$$

$a=q^2$ — положительное вещественное число, а в качестве C выберем контур, состоящий из вещественной оси и бесконечно удаленной полуокружности (рис. 61). Функция $f(\omega)$ не имеет полюсов нигде в верхней полуплоскости (и на самой вещественной оси[2])); поэтому интеграл (114.10) прямо дает число нулей функции $f(\omega)-a$ в верхней полуплоскости. Для вычисления запишем этот интеграл в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \frac{df}{f-a}, \tag{114.11}$$

причем интегрирование производится по контуру C' в плоскости комплексной переменной f, являющемуся отображением контура C из плоскости ω. При $\omega=0$ функция $f=0$. При положительных вещественных ω имеем $\operatorname{Im} f>0$, а при отрицательных

[1]) Следующие ниже рассуждения аналогичны доказательству отсутствия нулей у функции $\varepsilon(\omega)$ в верхней полуплоскости, изложенному в V, § 123.

[2]) У металлов $\varepsilon(\omega)$ имеет полюс при $\omega=0$, но $\omega^2\varepsilon$ все равно стремится к нулю.

$\operatorname{Im} f < 0$. На бесконечности же $f \to -\omega^2(v^{-2} - c^{-2})$; поэтому f пробегает бесконечно удаленную окружность, когда ω пробегает полуокружность. Отсюда видно, что контур интегрирования C' в плоскости f выглядит так, как это схематически показано на рис. 61. При положительном вещественном a (как на рис. 61) при обходе вдоль C' аргумент комплексного числа $f - a$ меняется на 2π и интеграл (114.11) равен единице. Тем самым наше утверждение доказано [1]).

Более того, легко видеть, что единственный корень уравнения $f(\omega) - q^2 = 0$ лежит на мнимой оси ω. Действительно, при чисто мнимых ω функция $f(\omega)$ (вместе с функцией $\varepsilon(\omega)$) вещественна и пробегает все значения от 0 до ∞, в том числе все положительные значения q^2.

Вернемся к интегралу по $d\omega$ в (114.9)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[1/(\varepsilon v^2) - 1/c^2]\omega\, d\omega}{q^2 - \omega^2(\varepsilon/c^2 - 1/v^2)}.$$

Его можно представить в виде разности между интегралом по контуру C и интегралом по бесконечно удаленной полуокружности. Второй из них равен $\int \frac{d\omega}{\omega} = i\pi$, а первый равен умноженному на $2\pi i$ вычету подынтегрального выражения относительно его единственного полюса. Будем понимать под $\omega(q)$ функцию, определяемую равенством

$$\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right) = q^2. \qquad (114.12)$$

Тогда согласно известному правилу нахождения вычетов [2]) найдем, что интеграл по C равен

$$2\pi i \frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2} - \frac{1}{c^2}\right)}{-\frac{d}{d\omega}\left[\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right)\right]} = 2\pi i \frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2} - \frac{1}{c^2}\right)}{-\frac{dq^2}{d\omega}}.$$

Собрав полученные выражения и подставив в (114.9), найдем

$$F = e^2 \int_0^{q_0} \left[\frac{\omega\,[1/(\varepsilon v^2) - 1/c^2]}{q\, dq/d\omega} + 1\right] q\, dq$$

---

[1]) Если же a — отрицательное число, то при обходе вдоль C' аргумент $f - a$ меняется на 4π, так что интеграл (114.11) равен 2; другими словами, уравнение $f(\omega) = -|a|$ имеет два нуля в верхней полуплоскости.

[2]) Вычет выражения $f(z)/\varphi(z)$ относительно полюса $z = z_0$ равен $f(z_0)/\varphi'(z_0)$.

или, заменив в первом члене интегрирование по dq интегрированием по $d\omega$,

$$F = e^2 \int\limits_{\omega(0)}^{\omega(q_0)} \left(\frac{1}{v^2\varepsilon(\omega)} - \frac{1}{c^2} \right) \omega\, d\omega + \frac{1}{2} e^2 q_0^2 =$$

$$= \frac{e^2}{v^2} \int\limits_{\omega(0)}^{\omega(q_0)} \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right) \omega\, d\omega + \frac{e^2 q_0^2}{2} + \frac{e^2}{2} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) [\omega^2(q_0) - \omega^2(0)]. \tag{114.13}$$

Большим значениям q соответствуют большие по абсолютной величине ω корни уравнения (114.12). Воспользовавшись соответственно этому выражением (113.9) для $\varepsilon(\omega)$, найдем

$$\omega^2(q_0) = -v^2\gamma^2 \left(q_0^2 + \frac{4\pi N e^2}{mc^2} \right),$$

где введено обозначение

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

Подставив в (114.13), получим

$$F = \frac{e^2}{v^2} \int\limits_{\omega(0)}^{ivq_0\gamma} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right] \omega\, d\omega - \frac{2\pi N e^4}{mc^2} - \frac{e^2\omega^2(0)}{2v^2\gamma^2} \tag{114.14}$$

(в интеграле достаточно оставить в $\omega(q_0)$ главный член $ivq_0\gamma$).

Интегрирование в (114.14) производится по мнимым значениям ω. Введем вещественную переменную согласно $\omega = i\omega''$, обозначим нижний предел интеграла через $\omega(0) = i\xi$ и снова введем обозначение (113.6) $1/\varepsilon = \eta$. Мы должны вычислить интеграл

$$-\int\limits_{\xi}^{vq_0\gamma} [\eta(i\omega'') - 1]\omega''\, d\omega''.$$

Значения функции $\eta(\omega)$ на мнимой оси могут быть выражены через значения ее мнимой части на вещественной оси по формуле

$$\eta(i\omega'') - 1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{x\eta''(x)}{x^2 + \omega''^2}\, dx$$

(ср. формулу (82.15)). Поэтому для рассматриваемого интеграла получаем (пренебрегая x по сравнению с vq_0)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{\xi}^{vq_0}\frac{x|\eta''(x)|\omega''\,d\omega''\,dx}{x^2+\omega''^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}x|\eta''(x)|\ln\frac{v^2q_0^2\gamma^2}{x^2+\xi^2}\,dx.$$

Подставим этот результат в (114.14), причем для упрощения записи введем обозначение

$$\ln\Omega=\frac{1}{2}\,\overline{\ln\left(\omega^2+\xi^2\right)},\tag{114.15}$$

где черта обозначает усреднение с весом $\omega|\eta''(\omega)|$, как это было сделано в (113.11). Тогда получим

$$F(q_0)=\frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\ln\frac{q_0v\gamma}{\Omega}-\frac{2\pi Ne^4}{mc^2}+\frac{e^2\xi^2}{2v^2\gamma^2}.\tag{114.16}$$

При дальнейшем исследовании этой формулы надо отдельно рассмотреть два случая. Предположим сначала, что среда является диэлектриком, а скорость частицы удовлетворяет условию

$$v^2<\frac{c^2}{\varepsilon_0},\tag{114.17}$$

где $\varepsilon_0=\varepsilon(0)$ — электростатическое значение диэлектрической проницаемости. На мнимой оси функция $\varepsilon(\omega)$ монотонно убывает от значения $\varepsilon_0>1$ при $\omega=0$ до 1 при $\omega=i\infty$. Выражение же в левой части уравнения (114.12) при этом монотонно возрастает от 0 до ∞. Поэтому при $q=0$ уравнение (114.12) дает и $\omega=0$. Таким образом, в (114.16) надо положить $\xi=0$; при этом Ω переходит в среднюю атомную частоту $\overline{\omega}$ (113.11):

$$F(q_0)=\frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\left[\ln\frac{q_0v\gamma}{\overline{\omega}}-\frac{v^2}{2c^2}\right]\tag{114.18}$$

(при $v\ll c$ эта формула, как и должно быть, переходит в (113.12)).

Значение q_0 удовлетворяет условию $q_0\ll 1/a$, где a — порядок величины межатомных расстояний (в конденсированной среде — размеров атомов). Для того чтобы продлить эту формулу в область бо́льших значений передачи импульса и энергии, надо произвести ее «сшивку» с формулами обычной теории столкновений, подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе. Здесь, однако, сшивка должна быть произведена в два этапа. Сначала с помощью формулы (113.13) переходим к области значений q, соответствующих передачам энергии, большим по сравнению с атомными энергиями, но все еще нерелятивистским.

Вид формулы (114.18) при этом не изменится, но в нее можно будет ввести энергию δ-электрона, как $\hbar^2 q_1^2/(2m)$. Обозначив ее через E_1, получим

$$F(E_1) = \frac{2\pi N e^4}{mv^2}\left[\ln\frac{2mE_1 v^2\gamma^2}{\hbar^2\overline{\omega}^2} - \frac{v^2}{c^2}\right]. \tag{114.19}$$

Далее, можно перейти в область релятивистских значений E_1, воспользовавшись формулой релятивистской теории столкновений, согласно которой торможение с передачей энергии в интервале между E' и $E' + dE'$ равно

$$\frac{2\pi N e^4}{mv^2}\frac{dE'}{E'}, \tag{114.20}$$

если E' мало по сравнению с максимальной передачей $E_{1\,\max}$, допускаемой законами сохранения импульса и энергии при столкновении данной быстрой частицы со свободным электроном [1]). Поскольку при интегрировании выражение (114.20) дает $\ln E'$, то ясно, что вид формулы (114.19) в результате не изменится, так что она относится ко всем значениям $E_1 \ll E_{1\,\max}$.

При торможении быстрой тяжелой частицы (с массой $M \gg m$ и энергией E хотя и релятивистской, но такой, что $E \ll M^2c^2/m$) максимальная передача энергии электрону составляет $E_{1\,\max} \approx 2mv^2\gamma^2$ и все еще мала по сравнению с E (см. IV, § 82, формула (82.23)). Для таких частиц дифференциальное выражение торможения на свободных электронах имеет вид

$$\frac{2\pi N e^4}{mv^2}\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{2mc^2\gamma^2}\right) dE'$$

при любых значениях E' (см. IV, § 82, формула (82.24)). Дополнительное (по отношению к (114.19)) торможение с передачей энергии от E_1 до $E_{1\,\max}$ (причем $E_1 \ll E_{1\,\max}$) составляет в этом случае

$$\frac{2\pi N e^4}{mv^2}\left(\ln\frac{E_{1\,\max}}{E_1} - \frac{E_{1\,\max}}{2mc^2\gamma^2}\right) = \frac{2\pi N e^4}{mv^2}\left(\ln\frac{2mv^2\gamma^2}{E_1} - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{114.21}$$

Прибавив это выражение к (114.19), найдем полное торможение быстрой тяжелой частицы:

$$F = \frac{4\pi N e^4}{mv^2}\left(\ln\frac{2mv^2\gamma^2}{\hbar\overline{\omega}} - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{114.22}$$

Эта формула отличается от результата обычной теории лишь определением «энергии ионизации» $\hbar\overline{\omega}$ (ср. IV, формула (82.26)).

---

[1]) См. IV, формулы (81.15) и (82.24). Торможение F получается умножением этих выражений для сечения рассеяния на потерю энергии $m\Delta$ и на N.

Перейдем теперь ко второму случаю, когда скорость частицы удовлетворяет условию

$$v^2 > \frac{c^2}{\varepsilon_0} \tag{114.23}$$

(этот случай, в частности, всегда имеет место для металлов, так как у них $\varepsilon(0) = \infty$). Выражение $\omega^2(\varepsilon/c^2 - 1/v^2)$ в левой части уравнения (114.12) в этом случае проходит (на мнимой оси ω) через нуль дважды — при $\omega = 0$ и при $\omega = i\xi$, где ξ определяется равенством

$$\varepsilon(i\xi) = \frac{c^2}{v^2}. \tag{114.24}$$

В интервале между 0 и $i\xi$ это выражение отрицательно, а при $|\omega| > \xi$ принимает все положительные значения от 0 до ∞. Поэтому при $q \to 0$ корень уравнения (114.12) стремится в этом случае к значению ξ, которое и должно быть подставлено в (114.15) и (114.16).

Здесь можно различать два предельных случая. Если значение ξ оказывается малым по сравнению с атомными частотами ω_0, то в (114.16) можно пренебречь последним членом, а $\Omega \approx \overline{\omega}$. В результате мы снова приходим к формуле (114.18). В особенности же интересен обратный предельный случай, когда $\xi \gg \omega_0$. Поскольку при больших значениях ξ функция $\varepsilon(i\xi)$ стремится к 1, то из (114.24) ясно, что этот случай соответствует ультрарелятивистским скоростям частицы. Воспользовавшись для $\varepsilon(\omega)$ формулой (113.9), найдем из (114.24):

$$\xi^2 = \frac{4\pi N e^2 v^2 \gamma^2}{mc^2} \approx \frac{4\pi N e^2 \gamma^2}{m}.$$

При увеличении скорости частицы условие $\xi \gg \omega_0$ в конце концов выполнится в любой среде, т. е. при любом значении электронной плотности N (в том числе и в газе). Однако необходимые скорости тем выше, чем меньше N, т. е. чем более разрежена среда.

Из (114.15) имеем теперь просто $\Omega \approx \xi$; положив также $v \approx c$, найдем, что последние два члена в (114.16) взаимно сокращаются и остается

$$F(q_0) = \frac{2\pi N e^4}{mc^2} \ln \frac{mc^2 q_0^2}{4\pi N e^2}.$$

Продлив эту формулу в область больших значений передачи импульса и энергии таким же образом, как это было сделано выше, найдем следующее выражение для торможения ультрарелятивистской частицы с передачей энергии, не превышающей E_1 (причем $E_1 \ll E_{1\,\max}$):

$$F(E_1) = \frac{2\pi N e^4}{mc^2} \ln \frac{m^2 c^2 E_1}{2\pi N e^2 \hbar^2}. \tag{114.25}$$

Этот результат существенно отличается от даваемого обычной теорией, не учитывающей поляризации среды. Согласно последней (см. IV, § 82) в ультрарелятивистском случае торможение $F(E_1)$ продолжает возрастать при увеличении энергии частицы, хотя и сравнительно медленно — по логарифмическому закону [1])

$$F(E_1) = \frac{2\pi N e^4}{mc^2} \ln\left(\frac{2mc^2\gamma^2 E_1}{I^2} - 2\right).$$

Поляризация же среды приводит к такому экранированию заряда, в результате которого рост торможения в конце концов прекращается и оно стремится к конечному пределу, даваемому формулой (114.25), не содержащей γ.

Для тяжелых частиц можно написать формулу и для полного торможения с любой передачей энергии вплоть до $E_{1\,\max}$ (при условии, что $E_{1\,\max}$ мало по сравнению с энергией самой частицы). Используя снова выражение (114.21) (в котором можно теперь положить $v = c$), найдем

$$F = \frac{2\pi N e^4}{mc^2}\left[\ln\frac{m^3c^4\gamma^2}{\pi N e^2\hbar^2} - 1\right]. \tag{114.26}$$

Мы видим, что полное торможение все же продолжает возрастать со скоростью частицы — за счет близких столкновений с большой передачей энергии, в которых экранирующее влияние поляризации среды не проявляется. Это возрастание, однако, несколько более медленное, чем согласно теории, не учитывающей поляризацию. Согласно последней

$$F = \frac{4\pi N e^4}{mc^2}\left[\ln\frac{2mc^2\gamma^2}{I} - 1\right]$$

(см. IV, формула (82.28)); коэффициент при члене с $\ln\gamma$ здесь вдвое больше, чем в (114.26).

Отметим также, что наличие электронной плотности N в аргументе логарифма в формулах (114.25), (114.26) приводит к следующему свойству торможения ультрарелятивистских частиц: при прохождении такой частицей слоев различных веществ, содержащих одинаковое число электронов (на 1 см^2 их поверхности), торможение оказывается меньшим в веществе с большим N.

---

[1]) Эта формула получается сложением выражений IV, (82.20) и IV, (82.25), причем в последнем под $m\Delta_{\max}$ надо понимать E_1. Напомним, что при малой передаче энергии E_1 формулы относятся к быстрым как электронам, так и тяжелым частицам.

§ 115. Излучение Черенкова

Заряженная частица, движущаяся в прозрачной среде, в определенных условиях испускает своеобразное излучение; оно было впервые наблюдено *С.И. Вавиловым* и *П.А. Черенковым* и теоретически истолковано и рассчитано *И.Е. Таммом* и *И.М. Франком* (1937). Подчеркнем, что это излучение не имеет ничего общего с фактически всегда имеющим место (при движении быстрого электрона) тормозным излучением. Последнее испускается самим движущимся электроном при его столкновениях с атомами. В явлении же Черенкова мы имеем по существу дело с излучением, испускаемым средой под влиянием поля движущейся в ней частицы. Различие между обоими типами излучений особенно ясно проявляется при переходе к пределу сколь угодно большой массы частицы: тормозное излучение при этом исчезает вовсе, а излучение Черенкова вообще не меняется.

Волновой вектор и частота электромагнитной волны, распространяющейся в прозрачной среде, связаны соотношением $k = n\omega/c$, где $n = \sqrt{\varepsilon}$ — вещественный показатель преломления; мы по-прежнему считаем среду немагнитной и изотропной. С другой стороны, мы видели, что частота фурье-компоненты поля равномерно движущейся в среде частицы связана с x-компонентой волнового вектора (ось x — в направлении скорости частицы) соотношением $\omega = k_x v$. Для того чтобы такая компонента представляла собой свободно распространяющуюся волну, соотношения $k = n\omega/c$ и $k_x = \omega/v$ не должны противоречить друг другу. Поскольку должно быть $k > k_x$, то необходимо выполнение условия

$$v > \frac{c}{n(\omega)}. \tag{115.1}$$

Таким образом, излучение с частотой ω происходит, если скорость частицы превосходит фазовую скорость волн этой частоты в данной среде[1]).

Пусть θ — угол между направлением движения частицы и направлением излучения. Имеем $k_x = k\cos\theta = (n\omega/c)\cos\theta$ и, сравнив с равенством $k_x = \omega/v$, найдем, что

$$\cos\theta = \frac{c}{nv}. \tag{115.2}$$

Таким образом, излучению данной частоты соответствует вполне определенное значение угла θ. Другими словами, излучение каждой частоты происходит вперед по направлению движения ча-

[1]) До появления теории относительности формальная задача об излучении электроном, равномерно движущимся в пустоте со скоростью $v > c$, была рассмотрена *Зоммерфельдом* (*A. Sommerfeld*, 1904).

стицы и распределяется по поверхности конуса с углом раствора θ, определяемым формулой (115.2). Угловое распределение излучения и его распределение по частотам находятся, следовательно, в определенной связи друг с другом.

Излучение электромагнитных волн (в тех случаях, когда оно имеет место) связано с определенной потерей энергии движущейся частицей. Эта потеря составляет часть, хотя и незначительную, того полного торможения, которое было вычислено в предыдущем параграфе (тормозное излучение в него не входит). В этом смысле название полных потерь «ионизационные» в данном случае не вполне точно. Выделим теперь эту часть из полных потерь; тем самым мы определим интенсивность излучения Черенкова.

Согласно (114.9) потеря энергии в интервале частот $d\omega$ дается выражением

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2\varepsilon}\right) \int \frac{q\,dq}{q^2 - \omega^2\left(\dfrac{\varepsilon}{c^2} - \dfrac{1}{v^2}\right)},$$

где знак $\sum$ означает, что надо взять сумму выражений с $\omega = \pm|\omega|$. Введем новую переменную

$$\xi = q^2 - \omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right).$$

Тогда

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{2\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2\varepsilon}\right) \int \frac{d\xi}{\xi}.$$

При интегрировании вдоль вещественной оси ξ особая точка $\xi = 0$ (как раз соответствующая выполнению соотношения $q^2 + k_x^2 = k^2$) должна быть обойдена определенным образом. Направление обхода определяется тем, что хотя мы и считаем $\varepsilon(\omega)$ вещественной величиной (среда прозрачна!), но в действительности она обладает некоторой, хотя и малой, мнимой частью, положительной при $\omega > 0$ и отрицательной при $\omega < 0$. Соответственно ξ обладает малой отрицательной (положительной) мнимой частью, и интегрирование должно было бы производиться по пути, проходящему под (над) вещественной осью. Это значит, что, когда мы сместим путь интегрирования на вещественную ось, особая точка должна быть обойдена снизу (сверху). Именно эти обходы и дают вклад в dF, а вещественные части полностью аннулируются при взятии суммы. Произведя обходы по бесконечно малым полуокружностям, получим

$$\sum \omega \int \frac{d\xi}{\xi} = \omega \left(\int\limits_{\smile} \frac{d\xi}{\xi} - \int\limits_{\frown} \frac{d\xi}{\xi} \right) = 2i\pi\omega.$$

Таким образом, приходим к окончательной формуле

$$dF = \frac{e^2}{c^2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right)\omega\, d\omega, \tag{115.3}$$

определяющей интенсивность излучения в частотном интервале $d\omega$. Согласно (115.2) это излучение сконцентрировано в интервале углов

$$d\theta = \frac{c}{vn^2 \sin\theta}\frac{dn}{d\omega}\, d\omega. \tag{115.4}$$

Полная интенсивность излучения дается интегралом от выражения (115.3), взятым по всем частотам в области прозрачности среды.

Легко выяснить также вопрос о поляризации излучения Черенкова. Как видно из (114.7), векторный потенциал поля излучения направлен вдоль оси скорости $\mathbf{v}$. Магнитное поле $\mathbf{H_k} = i[\mathbf{kA_k}]$ направлено, следовательно, перпендикулярно к плоскости, проходящей через $\mathbf{v}$ и направление луча $\mathbf{k}$. Электрическое же поле (в волновой зоне излучения) перпендикулярно к магнитному и потому лежит в указанной плоскости.

Задача

Найти конус волновых векторов черенковского излучения частицей, равномерно движущейся в одноосном немагнитном кристалле: а) в направлении оптической оси; б) перпендикулярно к оптической оси (*В.Л. Гинзбург*, 1940).

Решение. а) При движении заряда в одноосном кристалле излучение Черенкова происходит, вообще говоря, по двум конусам, отвечающим обыкновенной и необыкновенной волнам. Но при движении вдоль оптической оси обыкновенная волна не излучается (хотя условие типа (115.1) могло бы быть выполнено!): обыкновенная волна всегда линейно поляризована с вектором $\mathbf{E}$, перпендикулярным главному сечению (т. е. плоскости, проходящей через оптическую ось — ось z — и направление данного $\mathbf{k}$); невозможность испускания такой волны в данном случае очевидна уже из того, что работа $e\mathbf{Ev} = 0$, т. е. потеря энергии частицей отсутствует. Конус необыкновенного излучения получается подстановкой в (78.5) значения n из равенства (115.2), справедливость которого не связана с изотропией среды (угол θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}$ совпадает в данном случае с углом между $\mathbf{k}$ и оптической осью). Находим

$$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\left(\frac{v^2}{c^2}\varepsilon_\perp - 1\right),$$

причем должно быть $v > c/\sqrt{\varepsilon_\perp}$. Этот конус — круговой, с равномерным распределением интенсивности по его образующим (как это заранее очевидно из соображений симметрии). Раствор ϑ конуса лучевых векторов связан с θ равенством $\operatorname{tg}\vartheta = \varepsilon_\perp \operatorname{tg}\theta/\varepsilon_\parallel$.

б) В этом случае существует два черенковских конуса. Направление $\mathbf{v}$ выбираем в качестве оси x, оптическую ось — в качестве оси z; θ — угол между $\mathbf{k}$ и осью x, φ — азимут направления $\mathbf{k}$, отсчитываемый от плоскости xy (рис. 62). Раствор конуса обыкновенных волн дается равенством

$$\cos\theta = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon_\perp}},$$

причем должно быть $v > c/\sqrt{\varepsilon_\perp}$. Этот конус — круговой, но интенсивность излучения зависит от азимута [1]); в частности, излучение отсутствует в плоскости xz, $\varphi = \pi/2$ (в силу равенства $\mathbf{vE} = 0$). Конус необыкновенных волн не круговой и его раствор зависит от φ:

$$\cos^2\theta = \frac{(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)\sin^2\varphi + \varepsilon_\perp}{(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)\sin^2\varphi + \varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel v^2/c^2},$$

причем должно быть $v > c/\sqrt{\varepsilon_\parallel}$. Необыкновенное излучение поляризовано с вектором $\mathbf{D}$ в главном сечении, перпендикулярно к $\mathbf{k}$. Если $\mathbf{k}$ лежит в плоскости xy ($\varphi = 0$), то вектор $\mathbf{D}$, а с ним и $\mathbf{E}$ направлены вдоль оси z; при этом $\mathbf{vE} = 0$, так что интенсивность необыкновенного излучения в плоскости xy обращается в нуль.

Рис. 62

§ 116. Переходное излучение

Излучение Черенкова характерно тем, что оно имеет место при равномерном движении заряженной частицы (между тем как заряд, равномерно движущийся в пустоте, не излучает). Другую категорию аналогичных в этом смысле явлений представляет *переходное излучение* — излучение при равномерном движении заряженной частицы в пространственно неоднородной среде, в том числе при переходе из одной среды в другую (*В.Л. Гинзбург, И.М. Франк*, 1945). Оно принципиально отличается от излучения Черенкова в том отношении, что оно имеет место при любых скоростях частицы, а не только при скоростях, превышающих фазовую скорость света в среде. Как и излучение Черенкова, оно не имеет ничего общего с тормозным излучением (которое тоже возникает при падении заряженных частиц на поверхность раздела двух сред). Как и для излучения Черенкова, разница особенно наглядна при переходе к пределу сколь угодно большой массы частиц — тормозное излучение при этом исчезает, а переходное остается.

Рассмотрим переходное излучение при прохождении заряженной частицы (с постоянной скоростью $\mathbf{v}$) через границу между вакуумом и диэлектрической (немагнитной) средой с комплексной проницаемостью ε. Движение происходит вдоль оси x, перпендикулярной к плоскости раздела (плоскость $x = 0$, рис. 63).

---

[1]) Нахождение распределения интенсивности требовало бы вычисления силы торможения, аналогичного произведенному в § 114 для изотропной среды. Изложение этих вычислений (а также некоторых других вопросов, связанных с излучением Черенкова) можно найти в обзорных статьях *Болотовского Б.М.* // УФН. 1957. Т. 62. С. 201; 1961. Т. 75. С. 295.

Электромагнитное поле определяется уравнениями (114.1)—(114.3) или эквивалентными им (114.6). Все величины в уравнениях разлагаем в интегралы Фурье по времени и по координатам y, z, по которым среда однородна:

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}(x) e^{i(\mathbf{qr}-\omega t)} \frac{d\omega\, d^2q}{(2\pi)^3} \tag{116.1}$$

1 2 v x ε₁=1 ε₂=ε

Рис. 63

и т. д., где $\mathbf{q}$ — волновой вектор в плоскости yz. В каждом из двух полупространств ищем поле в виде суммы частного решения неоднородных уравнений (114.6) (поле заряда, индекс (e)) и общего решения однородных уравнений — уравнений (114.6) без правых частей (поле свободного излучения, индекс (r)). Первое дается формулами, аналогичными (114.7):

$$\varphi^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} = \frac{4\pi e}{\varepsilon v}\left[q^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\right]^{-1} e^{i\omega x/v},$$
$$\mathbf{A}^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} = \frac{\varepsilon\mathbf{v}}{c}\varphi^{(e)}_{\omega\mathbf{q}}. \tag{116.2}$$

Отсюда напряженность электрического поля

$$\mathbf{E}^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} = i\left[\omega\mathbf{v}\left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right) - \mathbf{q}\right]\varphi^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} \tag{116.3}$$

(выражение для $\mathbf{H}^{(e)}_{\omega\mathbf{q}}$ нам не понадобится и мы его не выписываем).

Вторую часть решения, отвечающую полю свободного излучения, пишем сразу в виде напряженности. Продольную компоненту напряженности $\mathbf{E}^{(r)}_{\omega\mathbf{q}}$ записываем как

$$(\mathbf{E}^{(r)}_{\omega\mathbf{q}})_x = iae^{\pm ik_x x}$$

с неизвестным пока коэффициентом a; для k_x имеем теперь

$$k_x^2 + q^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}. \tag{116.4}$$

Поперечная компонента (о которой заранее известно, что она направлена вдоль $\mathbf{q}$ — единственного выделенного в этой плоскости направления) определяется затем уравнением $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, т. е. $\varepsilon(\mathbf{q} \pm k_x\mathbf{n})\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}} = 0$ ($\mathbf{n}$ — орт оси x):

$$\mathbf{E}^{(r)}_{\omega\mathbf{q}} = ia\left[\mathbf{n} \mp \frac{\mathbf{q}}{q^2}\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - q^2}\right]\exp\left[\pm ix\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - q^2}\right]. \tag{116.5}$$

Знаки + и − в показателях относятся соответственно к полупространствам $x > 0$ и $x < 0$: волны распространяются в направлениях от границы раздела[1]).

Постоянные a_1 и a_2 в обоих полупространствах определяются из условий непрерывности на границе раздела нормальных компонент индукции, $\varepsilon \mathbf{n}\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}$, и тангенциальных компонент напряженности электрического поля, $\mathbf{q}\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}$ (условие же непрерывности напряженности магнитного поля не дает, разумеется, ничего нового). Выпишем результат для коэффициента в области $x < 0$ (вакуум):

$$a_1 = \frac{4\pi e\beta\varkappa^2(\varepsilon-1)(1-\beta^2+\beta\sqrt{\varepsilon-\varkappa^2})}{\omega(1-\beta^2+\beta^2\varkappa^2)(1+\beta\sqrt{\varepsilon-\varkappa^2})(\sqrt{\varepsilon-\varkappa^2}+\varepsilon\sqrt{1-\varkappa^2})}, \qquad (116.6)$$

где $\beta = v/c$, $\varkappa = qc/\omega$.

Вычислим теперь полную энергию $\mathscr{U}_1$, излучаемую частицей в вакуум, т. е. назад по направлению движения электрона. Простой способ сделать это состоит в том, чтобы рассматривать излученный волновой цуг при больших временах t, когда он уже ушел далеко налево; поле излучения и собственное поле заряда оказываются при этом уже разделенными. Энергия $\mathscr{U}_1$ получается интегрированием плотности энергии поля излучения по всему пространству. Если перенести начало координат вдоль оси x в область волнового цуга, то ввиду затухания его поля в обе стороны по x интегрирование по этой координате можно распространить от $-\infty$ до ∞.

В волновой зоне плотности электрической и магнитной энергии одинаковы. Поэтому

$$\mathscr{U}_1 = \frac{1}{4\pi}\int dy\,dz \int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\mathbf{E}_1^2.$$

Подставив сюда $\mathbf{E}_1$ в виде разложения (116.1), пишем квадрат интеграла в виде двойного интеграла:

$$\mathbf{E}^2(t,\mathbf{r}) = \int \mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}(x)\mathbf{E}^*_{\omega'\mathbf{q}'}(x)\times \\ \times \exp\{i[\mathbf{r}(\mathbf{q}-\mathbf{q}') - t(\omega-\omega')]\}\frac{d\omega\,d\omega'\,d^2q\,d^2q'}{(2\pi)^6}.$$

Интегрирование этого выражения по $dy\,dz$ дает δ-функцию $(2\pi)^2\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$, которая затем устраняется интегрированием по d^2q'. Таким образом,

$$\mathscr{U}_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int \mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}(x)\mathbf{E}^*_{\omega'\mathbf{q}}(x)e^{-it(\omega-\omega')}\frac{d\omega\,d\omega'\,d^2q}{(2\pi)^4}. \qquad (116.7)$$

[1]) В формулах (116.2)–(116.5) под ε надо понимать $\varepsilon_1 = 1$ в области $x < 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ в области $x > 0$. В последующих формулах везде $\varepsilon \equiv \varepsilon_2$.

Подставив сюда для $\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}$ выражение (116.5) (с $\varepsilon = 1$, $a = a_1$) и произведя интегрирование по x, получим

$$\mathscr{U}_1 = \frac{1}{2}\int |a_1|^2 \frac{\omega^2}{q^2c^2}\delta\left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - q^2} - \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2} - q^2}\right]\frac{d^2q\,d\omega\,d\omega'}{(2\pi)^4};$$

здесь уже учтено, что ввиду наличия δ-функции будет $\omega = \omega'$; по этой же причине в произведении $a_1(\omega, \mathbf{q})a_1^*(\omega', \mathbf{q})$ исчезают фазовые множители, возникающие в a_1 при смещении начала координат в (116.5). Интегрирования по ω и ω' производятся от $-\infty$ до ∞; устранив δ-функцию интегрированием по ω', получим

$$\mathscr{U}_1 = \int_0^\infty\!\!\int |a_1(\omega, \mathbf{q})|^2 \frac{\omega^2}{cq^2}\sqrt{1 - \frac{cq^2}{\omega^2}}\frac{d^2q\,d\omega}{(2\pi)^4}; \qquad (116.8)$$

ввиду четности подынтегрального выражения по ω интеграл по ω представлен как удвоенный интеграл от 0 до ∞.

Интегрирование по d^2q должно производиться по области $q^2 < \omega^2/c^2$, в которой k_x вещественно, так что поле (116.5) действительно описывает распространяющуюся волну [1]). Введем угол θ между волновым вектором излучения $\mathbf{k} = (k_x, \mathbf{q})$ и направлением вектора $-\mathbf{v}$ (так что $\theta = 0$ отвечает излучению строго назад по отношению к направлению движения частицы). Тогда $q = (\omega/c)\sin\theta$; перейдя от интегрирования по d^2q к интегрированию по $2\pi q\,dq = (2\pi\omega^2/c^2)\sin\theta\cos\theta\,d\theta$, имеем

$$\mathscr{U}_1 = \frac{1}{c(2\pi)^3}\int_0^\infty\!\!\int_0^{\pi/2} |a_1|^2\omega^2\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta\,d\omega \equiv \int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\mathscr{U}_1(\omega,\theta)\cdot 2\pi\sin\theta\,d\theta\,d\omega.$$

Функция $\mathscr{U}_1(\omega, \theta)$ дает спектральное и угловое распределение излучения. Взяв a_1 из (116.6), получим окончательно:

$$\mathscr{U}_1(\omega,\theta) = \frac{e^2\beta^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\pi^2c(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}\left|\frac{(\varepsilon-1)(1-\beta^2+\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}{(1+\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}\right|^2 \qquad (116.9)$$

(*В.Л. Гинзбург*, *И.М. Франк*, 1945). Переходное излучение линейно поляризовано, причем электрический вектор лежит (как

[1]) При $q^2 > \omega^2/c^2$ экспоненциальные множители в выражении (116.5) должны быть написаны как $\exp(\pm x\sqrt{q^2 - \omega^2/c^2})$, что соответствует затухающим от границы поверхностным волнам. Такие волны обязательно присутствуют при переходном излучении; мы их здесь не рассматриваем.

это видно из (116.5)) в плоскости, проходящей через **k** и **v**. Для нерелятивистских скоростей интенсивность излучения пропорциональна v^2, т. е. энергии частицы.

На границе с идеальным проводником ($\varepsilon = \infty$) формула (116.9) сводится к

$$\mathscr{U}_1(\omega,\theta) = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}.$$

В ультрарелятивистском случае ($\beta \approx 1$) излучение имеет максимум в области малых углов, $\theta \sim \sqrt{1-\beta^2}$. Действительно, формула (116.9) принимает здесь вид

$$\mathscr{U}_1(\omega,\theta) = \frac{e^2}{\pi^2c}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right|^2\frac{\theta^2}{[\theta^2+(1-\beta^2)]^2}.$$

С логарифмической точностью имеем отсюда для полной спектральной плотности излучения

$$\mathscr{U}_1(\omega) \approx \int\limits_0^{\sim 1}\mathscr{U}_1(\omega,\theta)\cdot 2\pi\theta\,d\theta \approx \frac{c^2}{\pi c}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right|^2\ln\frac{1}{1-\beta^2}. \quad (116.10)$$

Если воспользоваться, при достаточно больших частотах, предельным выражением диэлектрической проницаемости (78.1),

$$\varepsilon = 1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}, \quad (116.11)$$

то мы найдем, что при $\omega \gg \omega_0$ спектральное распределение излучения убывает как ω^{-4}. Это значит, что в действительности основной вклад в переходное излучение (в направлении назад) дают частоты $\omega \lesssim \omega_0$.

Наконец, остановимся на переходном излучении при прохождении частицы из среды в вакуум. Эта задача отличается от предыдущей лишь изменением знака скорости **v**. Поэтому дифференциальная интенсивность излучения в вакуум при выходе заряженной частицы из среды дается формулой, получающейся из (116.9) заменой $v \to -v$, причем θ будет теперь углом между направлением **k** и **v** (так что $\theta = 0$ отвечает излучению строго вперед по движению частицы) [1]):

[1]) Для прозрачной среды (ε можно считать вещественной) ограничиваемся скоростями $v < c/\sqrt{\varepsilon}$. В противном случае возникает вопрос об отделении вклада черенковского излучения, испускаемого частицей в среде вперед по направлению ее движения и выходящего через границу в вакуум. Этому выходу отвечает полюс интенсивности (116.12) в точке, где $\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta} = 1$. Определяемый этим равенством угол θ есть как раз угол выхода преломленного на границе луча черенковского конуса в среде.

$$\mathscr{U}_1(\omega,\theta) = \frac{e^2\beta^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\pi^2 c(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}\left|\frac{(\varepsilon-1)(1-\beta^2-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}{(1-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta})}\right|^2. \tag{116.12}$$

В ультрарелятивистском случае излучение имеет максимум интенсивности в области малых углов, $\theta\sim\sqrt{1-\beta^2}$. Формула (116.12) принимает здесь вид

$$\mathscr{U}_1(\omega,\theta) = \frac{e^2\theta^2}{\pi^2 c}\frac{|\sqrt{\varepsilon}-1|^2}{(1-\beta^2+\theta^2)^2|1-\beta\sqrt{\varepsilon^2-\theta^2}|^2}. \tag{116.13}$$

Если ε не слишком близко к единице, последний множитель в знаменателе заменяется на $|1-\sqrt{\varepsilon}|^2$ и для спектрального распределения получается, с логарифмической точностью,

$$\mathscr{U}_1(\omega) = \frac{e^2}{\pi c}\ln\frac{1}{1-\beta^2}.$$

Для больших частот снова используем выражение (116.11) и заменяем в (116.13)

$$1-\beta\sqrt{\varepsilon-\theta^2}\approx\frac{1}{2}\left(1-\beta^2+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}+\theta^2\right),\quad \sqrt{\varepsilon}-1\approx-\frac{\omega_0^2}{2\omega^2}.$$

Интегрирование по углам дает

$$\mathscr{U}_1(\omega) = \frac{e^2}{\pi c}\ln\frac{\omega_0^2}{\omega^2(1-\beta^2)}\quad \text{при}\quad \omega_0\ll\omega\ll\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$\mathscr{U}_1(\omega) = \frac{e^2}{6\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\frac{1}{(1-\beta^2)^2}\quad \text{при}\quad \omega\gg\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Из этих формул видно, что основной вклад в излучение вперед дают высокие частоты, $\omega\sim\omega_0/\sqrt{1-\beta^2}$ (*Г.М. Гарибян*, 1959). Интегральная по частотам энергия излучения оказывается при этом пропорциональной энергии частицы [1]):

$$\mathscr{U}_1 = \frac{e^2\omega_0}{3c\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{116.14}$$

[1]) Более подробное изложение связанных с переходным излучением вопросов можно найти в обзорных статьях: *Басс Ф.Г.*, *Яковленко В.М.* // УФН. 1965. Т. 86. С. 189. *Гинзбург В.Л.*, *Цытович В.Н.* // УФН. 1978. Т. 126. С. 553; Phys. Rep. 1979. V. 49. P. 1.

ГЛАВА XV

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 117. Общая теория рассеяния в изотропных средах

В изложенной в предыдущих главах теории распространения электромагнитных волн в прозрачных средах совершенно не рассматривалось сравнительно слабое, но в то же время принципиально важное явление *рассеяния*. Это явление заключается в возникновении слабых (рассеянных) волн с частотами и направлениями, отличающимися от частоты и направления распространения основной волны.

Происхождение рассеяния сводится к изменению движения входящих в состав среды зарядов под влиянием поля падающей волны; это изменение приводит к излучению новых — рассеянных — волн. Исследование микроскопического механизма рассеяния должно производиться на основе квантовой механики; оно, однако, не требуется для развития излагаемой ниже макроскопической теории. Поэтому мы ограничимся лишь краткими замечаниями о характере процессов, приводящих к изменению частоты волн при рассеянии.

Основной тип элементарных актов рассеяния заключается в поглощении первоначального кванта $\hbar\omega$ рассеивающей системой с одновременным испусканием ею другого кванта $\hbar\omega'$. Частота ω' рассеянного кванта может быть как меньше, так и больше частоты ω (эти случаи называют соответственно *стоксовым* и *антистоксовым*). В первом случае энергия $\hbar(\omega - \omega')$ поглощается системой, а во втором энергия $\hbar(\omega' - \omega)$ отдается ею за счет перехода в энергетичсски более низкое состояние. Так, в простейшем случае газа рассеяние происходит на отдельных молекулах, и изменение частоты может произойти как за счет перехода молекулы на другой уровень энергии, так и за счет изменения кинетической энергии ее движения как целого.

Другой тип элементарного акта заключается в том, что первоначальный квант $\hbar\omega$ остается неизменным, но под его влиянием рассеивающая система излучает сразу два кванта: еще один квант $\hbar\omega$ с неизменной частотой и направлением и «рассеянный» квант $\hbar\omega'$. Энергия $\hbar(\omega + \omega')$ отбирается при этом у рассеивающей системы. Процессы этого типа, однако, в обычных

условиях чрезвычайно редки по сравнению с процессами второго типа[1]).

Переходя к изложению макроскопической теории рассеяния, прежде всего необходимо уточнить смысл производимых в ней усреднений. Усреднение величин в макроскопической электродинамике можно представить как совокупность двух операций. Если исходить, для наглядности, из классической точки зрения, то можно различать усреднение по физически бесконечно малому объему при заданном расположении всех частиц в нем и затем усреднение полученной величины по движению частиц. В теории рассеяния, однако, такое усреднение с самого начала не может быть произведено, так как усреднение по движению частиц приведет к исчезновению самого интересующего нас явления. Поэтому, например, фигурирующие в теории рассеяния напряженность и индукцию поля рассеянной волны надо понимать как результат лишь первой стадии усреднения.

Следует заметить, что при квантовом рассмотрении говорить об усреднении по объему можно, разумеется, не для самой физической величины, а лишь для ее оператора; вторая же стадия усреднения заключается в определении математического ожидания этого оператора с помощью квантовомеханических вероятностей. Поэтому, строго говоря, фигурирующие ниже электромагнитные величины надо понимать как квантовомеханические операторы. Это обстоятельство, однако, не отражается на окончательных результатах излагаемой в этом параграфе теории, и для упрощения записи формул мы рассматриваем все величины как классические.

Монохроматические компоненты понимаемых в указанном смысле величин поля рассеянной волны мы будем обозначать ниже через $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{B}'$. Поле же падающей волны будем обозначать буквами $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ без штриха. Везде в этой главе падающая волна предполагается монохроматической с частотой ω.

Для самого процесса распространения рассеянной волны по среде имело бы место соотношение $\mathbf{D}' = \varepsilon(\omega')\mathbf{E}'$ между индукцией и напряженностью электрического поля (предполагаем рассеивающую среду изотропной). Это соотношение, однако, не содержит в себе явления рассеяния, т. е. возникновения рассеянной волны под влиянием падающей. Для его описания надо учесть в выражении для $\mathbf{D}'$ дополнительные малые члены. В первом приближении такие члены должны быть линейны по полю падающей волны; наиболее общий вид такой зависимости:

$$D'_t = \varepsilon' E'_i + \alpha_{ik} E_k + \beta_{ik} E^*_k. \tag{117.1}$$

[1]) Мы увидим ниже (§ 118), что эффект вынужденного излучения очень мал при температурах $T \ll \hbar(\omega+\omega')$. Он может стать существенным в лишь области радиочастот.

Здесь ε' обозначает $\varepsilon(\omega')$, а α_{ik}, β_{ik} — тензоры, характеризующие рассеивательные свойства среды. В общем случае они не обладают никакими свойствами симметрии, а их компоненты являются функциями как частоты ω' рассеянной волны, так и первоначальной частоты ω. Подчеркнем, что тензорный характер величин α и β, разумеется, не противоречит предполагаемой изотропии среды. Изотропными являются лишь полностью усредненные свойства среды; местные же отклонения от средних свойств, к которым и относятся дополнительные члены в (117.1), не обязаны быть изотропными.

Последний член в (117.1) связан с той частью рассеяния, которая осуществляется элементарными актами вынужденного испускания. Действительно, все члены в правой части равенства (117.1) должны соответствовать той же частоте ω', что и $\mathbf{D}'$ в его левой части равенства. Поскольку $\mathbf{E}^*$ имеет частоту $-\omega$, то частота величин β_{ik} должна быть $\omega+\omega'$, чтобы частота произведений $\beta_{ik}E_k^*$ была ω'. Но $\omega+\omega'$ есть частота, характерная как раз для актов вынужденного излучения. Ввиду упомянутой выше малости этого эффекта пренебрежем соответствующим членом в (117.1) и будем писать ниже

$$D_i' = \varepsilon' E_i' + \alpha_{ik} E_k. \tag{117.2}$$

Аналогичными формулами выражается также и связь между $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{H}'$. Мы, однако, будем пренебрегать магнитными свойствами среды, обычно несущественными для явления рассеяния света, и потому положим $\mathbf{B}' = \mathbf{H}'$.

Уравнения Максвелла для поля рассеянной волны имеют вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}' = i\frac{\omega'}{c}\mathbf{H}', \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}' = -i\frac{\omega'}{c}\mathbf{D}'.$$

Исключив $\mathbf{H}'$ из этих уравнений, найдем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}' = \frac{\omega'^2}{c^2}\mathbf{D}'.$$

Подставив сюда согласно (117.2)

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\varepsilon'}\mathbf{D}' - \frac{1}{\varepsilon'}(\alpha\mathbf{E})$$

(($\alpha\mathbf{E}$ обозначает вектор с составляющими $\alpha_{ik}E_k$) и учитывая, что $\operatorname{div}\mathbf{D}' = 0$, получим следующие уравнение для $\mathbf{D}'$:

$$\Delta\mathbf{D}' + k'^2\mathbf{D}' = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{E}), \tag{117.3}$$

где $k' = \omega'\sqrt{\varepsilon'}/c$ — волновой вектор рассеянной волны.

Для точной формулировки условий, в которых должно быть решено уравнение (117.3), разделим рассеивающую среду на малые участки (размеры которых, однако, велики по сравнению

с молекулярными расстояниями). В силу молекулярного характера процессов рассеяния корреляция между этими процессами в различных точках среды (не кристаллической!) распространяется, вообще говоря, лишь на расстояния порядка молекулярных[1]). Поэтому рассеянный свет, исходящий из различных участков среды, некогерентен. Мы можем, следовательно, рассматривать рассеяние от одного из участков так, как если бы в остальном объеме среды свет распространялся без рассеяния. Поступая таким образом, вычислим поле рассеянной волны на большом расстоянии от рассеивающего участка тела. Воспользовавшись известным приближенным выражением для запаздывающих потенциалов на большом расстоянии от источника (см. II, § 66), можно сразу написать требуемое решение уравнения (117.3):

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{e^{ik'R_0}}{R_0}\int(\alpha\mathbf{E})e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}\,dV. \tag{117.4}$$

Здесь $\mathbf{R}_0$ — радиус-вектор от какой-либо точки внутри рассеивающего объема (по которому производится интегрирование) до точки наблюдения поля, а вектор $\mathbf{k}'$ имеет направление $\mathbf{R}_0$. Стоящий здесь интеграл не зависит от координат точки наблюдения; произведя дифференцирование и сохранив, как обычно, лишь члены с $1/R_0$, получим

$$\mathbf{D}' = -\frac{e^{ik'R_0}}{4\pi R_0}\left[\mathbf{k}'\left[\mathbf{k}'\int(\alpha\mathbf{E})e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}\,dV\right]\right].$$

Поскольку в точке наблюдения мы рассматриваем среду как нерассеивающую, то связь между $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{E}'$ в этой точке дается просто соотношением $\mathbf{D}' = \varepsilon'\mathbf{E}'$. В поле падающей волны выделим пространственный периодический множитель, представив напряженность в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = E_0\mathbf{e}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}; \tag{117.5}$$

во втором выражении комплексная амплитуда $\mathbf{E}_0$ записана как $E_0\mathbf{e}$, где E_0 — вещественная величина ($E_0^2 \equiv |\mathbf{E}_0|^2$), а $\mathbf{e}$ — единичный комплексный вектор ($\mathbf{e}\mathbf{e}^* = 1$), определяющий поляризацию волны. Введя затем обозначение

$$\mathbf{G} = \int(\alpha\mathbf{e})^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\,dV, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \tag{117.6}$$

[1]) Исключение могут представлять особые случаи рассеяния, о которых будет идти речь в § 120. В этих случаях размеры рассеивающих участков должны предполагаться большими также и по сравнению с длиной волны света или еще бóльшими.

напишем

$$\mathbf{E}' = -e^{ik'R_0}\frac{E_0}{4\pi R_0\varepsilon'}[\mathbf{k}'[\mathbf{k}'\mathbf{G}]] = e^{ik'R_0}\frac{E_0 k'^2}{4\pi R_0\varepsilon'}\mathbf{G}_\perp. \tag{117.7}$$

Вектор $\mathbf{E}'$ перпендикулярен к направлению $\mathbf{k}'$ рассеянной волны и определяется перпендикулярной к $\mathbf{k}'$ проекцией $\mathbf{G}_\perp$.

Определив таким образом неусредненное поле рассеянной волны, мы можем теперь перейти к исследованию интенсивности и поляризации рассеянного света. Для этого надо образовать тензор

$$I_{ik} = \langle E'_i E'^*_k\rangle, \tag{117.8}$$

где угловые скобки означают не производящееся до сих пор окончательное усреднение по движению частиц в теле; усреднение квадратичного выражения дает, естественно, отличный от нуля результат. Поскольку $\mathbf{E}' \perp \mathbf{k}'$, то тензор I_{ik} имеет отличные от нуля компоненты лишь в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{k}'$; эти компоненты составляют (в этой плоскости) двумерный тензор $I_{\alpha\beta}$ (греческими буквами обозначаем индексы, пробегающие два значения). Тензор $I_{\alpha\beta}$, по определению, эрмитов: $I_{\beta\alpha} = I^*_{\alpha\beta}$. Он может быть приведен к главным осям, причем отношение его двух главных значений дает степень деполяризации, а их сумма пропорциональна полной интенсивности света [1]).

В произведения $E'_i E'^*_k$ входят произведения интегралов G_i; они-то и должны быть подвергнуты усреднению. Написав произведение двух интегралов в виде двойного интеграла, имеем

$$\langle G_i G^*_k\rangle = e_l e^*_m \iint \langle \alpha^{(1)}_{il}\alpha^{(2)*}_{km}\rangle e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}\,dV_1\,dV_2. \tag{117.9}$$

Верхние индексы (1), (2) указывают, что значения α берутся в двух различных точках пространства.

При усреднении подынтегрального выражения надо учесть, что корреляция между значениями α в разных точках тела распространяется, вообще говоря, лишь на расстояния порядка молекулярных. Это значит, что после усреднения подынтегральное выражение будет существенно отлично от нуля лишь при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \sim a$, где a — порядок величины молекулярных расстояний. Показатель степени в экспоненциальном множителе $\sim a/\lambda$,

---

[1]) См. II, § 50. Приведение эрмитова тензора к главным осям означает представление его в виде

$$I_{ik} = \lambda_1 n_{1i}n^*_{1k} + \lambda_2 n_{2i}n^*_{2k},$$

где $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ — в общем случае комплексные единичные взаимно ортогональные векторы:

$$\mathbf{n}_1\mathbf{n}^*_1 = \mathbf{n}_2\mathbf{n}^*_2 = 1, \quad \mathbf{n}_1\mathbf{n}^*_2 = 0.$$

Главные значения λ_1, λ_2 зрмитова тензора вещественны.

где λ — длина рассеиваемой волны; но $a/\lambda \ll 1$ уже в силу необходимого условия применимости макроскопической теории вообще. Мы можем, следовательно, заменить экспоненциальный множитель единицей [1]).

Далее, интегрирование по координатам $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ можно заменить интегрированием по $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Поскольку подынтегральное выражение зависит (после усреднения) только от $\mathbf{r}$, то

$$\langle G_i G_k^* \rangle = V e_i e_m^* \int \langle \alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*} \rangle \, dV, \qquad (117.10)$$

где V — объем рассеивающего участка тела; тот факт, что рассеяние должно быть пропорциональным V, очевиден и заранее. Отметим, что из формулы (117.10), а потому и из всех следующих ниже формул выпадает направление волнового вектора $\mathbf{k}$ падающей волны.

Стоящие в (117.10) интегралы образуют тензор четвертого ранга, зависящий только от свойств рассеивающей среды. Ввиду изотропии среды этот тензор может выражаться только через единичный тензор δ_{ik} (и скалярные постоянные). Прежде чем написать соответствующее выражение, заметим, что тензор α_{ik}, как и всякий тензор второго ранга, можно представить в общем случае в виде суммы трех независимых частей:

$$\alpha_{ik} = \alpha \delta_{ik} + s_{ik} + a_{ik}, \qquad (117.11)$$

где α — скаляр, s_{ik} — неприводимый (т. е. с равным нулю следом) симметричный тензор, a_{ik} — антисимметричный тензор:

$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha_{ii}, \quad s_{ik} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - \frac{2}{3}\alpha_{ll}\delta_{ik}\right), \quad a_{ik} = \frac{1}{2}(\alpha_{ik} - \alpha_{ki}). \qquad (117.12)$$

При усреднении произведения $\alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*}$ могут оказаться отличными от нуля только произведения компонент каждой из указанных трех частей тензора α_{ik} по отдельности; ясно, что с помощью единичного тензора нельзя составить выражение, которое по своим свойствам симметрии могло бы соответствовать перекрестным произведениям. Эти соображения позволяют написать искомый тензор четвертого ранга в виде

$$\int \langle \alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*} \rangle \, dV = G_0 \delta_{il}\delta_{km} + \frac{1}{10} G_s \left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{kl} - \frac{2}{3}\delta_{il}\delta_{km}\right) + \\ + \frac{1}{6} G_a (\delta_{ik}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{kl}), \qquad (117.13)$$

где три члена по своей симметрии как раз отвечают произведениям скалярных, симметричных и антисимметричных частей

[1]) Допустимость этого пренебрежения требует, однако, специальных оговорок при так называемом рэлеевском рассеянии (см. § 120).

тензоров $\alpha_{il}^{(1)}$ и $\alpha_{km}^{(2)}$. Упрощая это выражение по различным парам индексов, получим три равенства, из которых выясняется смысл коэффициентов в (117.13):

$$G_0 = \int \langle \alpha^{(1)}\alpha^{(2)*}\rangle\, dV, \quad G_s = \int \langle s_{ik}^{(1)} s_{ik}^{(2)*}\rangle\, dV, \quad G_a = \int \langle a_{ik}^{(1)} a_{ik}^{(2)*}\rangle\, dV. \tag{117.14}$$

Эти величины вещественны и положительны [1]).

Таким образом, тензор I_{ik} принимает вид

$$I_{ik} = \text{const}\cdot\left[G_0 e_i e_k^* + \frac{1}{10}G_s\left(\delta_{ik} + e_i^* e_k - \frac{2}{3}e_i e_k^*\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}G_a(\delta_{ik} - e_i^* e_k)\right], \tag{117.15}$$

где const не зависит от направления рассеяния и от поляризации падающей волны. Этот тензор, разумеется, еще не поперечен направлению $\mathbf{k}'$. Искомый же тензор $I_{\alpha\beta}$ получится путем проецирования тензора (117.15) на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{k}'$ (для чего достаточно выбрать систему координат с одной из осей вдоль $\mathbf{k}'$ и взять компоненты тензора по двум другим осям).

Обратим внимание на то, что в общем случае рассеяние может быть представлено в виде наложения трех независимых процессов — рассеяний *скалярного*, *симметричного* и *антисимметричного* типов, которым отвечают три члена в (117.15) [2]).

Если не интересоваться этим разбиением, может оказаться удобным представить выражение (117.15) в другом виде, приведя в нем подобные члены:

$$I_{ik} = \text{const}\cdot\left\{\frac{a+c}{2}e_i e_k^* + \frac{a-c}{2}e_i^* e_k + b\delta_{ik}\right\}, \tag{117.16}$$

[1]) Вещественность тензора (117.13), а тем самым и коэффициентов в нем, видна уже из того, что этот тензор автоматически оказывается симметричным относительно перестановки пары индексов il с парой km, а такая перестановка равнозначна переходу к комплексно-сопряженной величине (ввиду эквивалентности точек 1 и 2). Положительность коэффициентов следует из того, что они могут быть представлены в виде квадрата модуля (или суммы квадратов модулей) путем преобразования, обратного тому, которое было произведено при переходе от (117.9) к (117.10). Так,

$$G_0 = \frac{1}{V}\left\langle \left| \int \alpha^{(1)}\, dV \right|^2 \right\rangle.$$

[2]) Формула (117.15) и последующие выводы из нее отличаются лишь определением величин G_0, G_s, G_a от формул квантовой теории Плачека рассеяния на отдельных свободно ориентирующихся молекулах, изложенной в IV, § 60.

где

$$a = G_0 + \frac{1}{30}G_s - \frac{1}{6}G_a, \quad b = \frac{1}{10}G_s + \frac{1}{6}G_a, \quad c = G_0 - \frac{1}{6}G_s + \frac{1}{6}G_a. \tag{117.17}$$

Формула (117.15) или (117.16) определяет угловое распределение и поляризационные свойства рассеянного света. В частности, спроецировав этот тензор на некоторый поляризационный вектор $\mathbf{e}'$ (определяющий направление $\mathbf{E}'$), мы получим интенсивность определенным образом поляризованной компоненты рассеянного света, которая могла бы быть выделена соответствующим поляризационным анализатором:

$$I_{ik}e_i'^* e_k' = \text{const} \cdot \left\{ G_0|\mathbf{ee}'^*|^2 + \frac{1}{10}G_s\left(1 + |\mathbf{ee}'|^2 - \frac{2}{3}|\mathbf{ee}'^*|^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}G_a(1 - |\mathbf{ee}'|^2) \right\} \tag{117.18}$$

или

$$I_{ik}e_i'^* e_k' = \text{const} \cdot \left\{ \frac{a+c}{2}|\mathbf{ee}'^*|^2 + \frac{a-c}{2}|\mathbf{ee}'|^2 + b \right\}. \tag{117.19}$$

Рассмотрим рассеяние линейно поляризованной волны. Такой поляризации отвечает вещественный вектор $\mathbf{e}$ (см. II, § 48, 50). Вместе с ним будут вещественны и все компоненты тензора $I_{\alpha\beta}$ рассеянного света. Это значит, что рассеянный свет частично поляризован, причем он может быть разложен на две независимые (некогерентные) волны, каждая из которых линейно поляризована. Ввиду наличия в перпендикулярной к $\mathbf{k}'$ плоскости всего одного избранного направления (выделяемого проекцией вектора $\mathbf{e}$ на эту плоскость), заранее очевидно, что одна из этих волн поляризована с вектором $\mathbf{e}'$ в плоскости $\mathbf{ek}'$ (ее интенсивность обозначим через I_1), а другая — перпендикулярно к этой плоскости (интенсивность I_2) [1]).

При вещественном $\mathbf{e}$ выражение (117.16) сводится к

$$I_{ik} = \text{const} \cdot (ae_ie_k + b\delta_{ik}). \tag{117.20}$$

Сразу же отметим, что оно содержит всего две, а не три независимые постоянные. Соответственно, имеем

$$I_{ik}e_i'e_k' = \text{const} \cdot (a(\mathbf{ee}')^2 + b)$$

и, взяв $\mathbf{e}'$ в двух указанных выше направлениях, найдем угловые распределения двух некогерентных составляющих рассеянного

[1]) Подчеркнем лишний раз необходимость отличать поляризационное состояние рассеянного света как такового от поляризации $\mathbf{e}'$, выделяемой детектором!

света:

$$I_1 = \text{const} \cdot (a \sin^2 \theta + b), \quad I_2 = \text{const} \cdot b, \tag{117.21}$$

где θ — угол между $\mathbf{e}$ и направлением рассеяния $\mathbf{k}'$. Отметим, что второе из распределений оказывается изотропным.

При прохождении через среду естественного света рассеянный свет будет частично поляризован. Соответствующий тензор I_{ik} получается из (117.16) усреднением по всем направлениям $\mathbf{e}$ в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{k}$. Оно осуществляется формулой

$$\overline{e_i e_k^*} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k) \tag{117.22}$$

($\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$); это — тензор второго ранга, зависящий только от направления $\mathbf{n}$, обращающийся в 1 при упрощении и удовлетворяющий условию

$$n_i \overline{e_i e_k^*} = \overline{(\mathbf{ne}) e_k^*} = 0.$$

Таким образом, при рассеянии естественного света

$$I_{ik} = \text{const} \cdot \left\{ \frac{a}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k) + b\delta_{ik} \right\}. \tag{117.23}$$

Из соображений симметрии очевидно, что две некогерентные компоненты рассеянного света будут линейно поляризованы с вектором $\mathbf{e}'$ в плоскости $\mathbf{kk}'$ (плоскость рассеяния) и перпендикулярно к ней; обозначим интенсивности этих компонент соответственно как $I_{\parallel}$ и $I_{\perp}$. Из формулы

$$I_{ik} e'_i e'_k = \text{const} \cdot \left\{ \frac{a}{2}[1 - (\mathbf{ne}')^2] + b \right\}$$

получим

$$I_{\parallel} = \text{const} \cdot \left(\frac{a}{2} \cos^2 \vartheta + b \right), \quad I_{\perp} = \text{const} \cdot \left(\frac{a}{2} + b \right), \tag{117.24}$$

где ϑ — угол рассеяния (угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$).

Выпишем еще формулы для углового распределения и поляризационных свойств каждого из трех типов рассеяния по отдельности. Они получаются из (117.21) и (117.24) просто путем подстановки в них для a и b соответствующих членов из (117.17).

При скалярном рассеянии линейно поляризованного света рассеянный свет тоже полностью поляризован, а угловое распределение интенсивности дается формулой

$$I = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \tag{117.25}$$

(здесь и ниже выражения для I нормированы так, что их усредненное по направлениям значение равно 1). При рассеянии же

естественного света угловое распределение интенсивности и коэффициент деполяризации (отношение меньшего из $I_{\|}$, $I_{\perp}$ к большему) даются формулами [1])

$$I = I_{\perp} + I_{\|} = \frac{3}{4}(1+\cos^2\vartheta), \quad \frac{I_{\|}}{I_{\perp}} = \cos^2\vartheta. \tag{117.26}$$

Для симметричного рассеяния поляризованного света имеем

$$I = I_1 + I_2 = \frac{3}{20}(6+\sin^2\theta), \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{3+\sin^2\theta}, \tag{117.27}$$

а при рассеянии естественного света:

$$I = \frac{3}{40}(13+\cos^2\vartheta), \quad \frac{I_{\|}}{I_{\perp}} = \frac{1}{7}(6+\cos^2\vartheta). \tag{117.28}$$

Наконец, для антисимметричного рассеяния поляризованного света

$$I = \frac{3}{4}(1+\cos^2\theta), \quad \frac{I_1}{I_2} = \cos^2\theta, \tag{117.29}$$

а при рассеянии естественного света:

$$I = \frac{3}{8}(2+\sin^2\vartheta), \quad \frac{I_{\perp}}{I_{\|}} = \frac{1}{1+\sin^2\vartheta}. \tag{117.20}$$

§ 118. Принцип детального равновесия при рассеянии

Общий квантовомеханический принцип детального равновесия (см. III, § 144) позволяет получить определенное соотношение, связывающее между собой интенсивности различных процессов рассеяния.

Обозначим через dw_{21} вероятность (на единице пути) процесса рассеяния кванта $\hbar\omega_1$ с возникновением кванта $\hbar\omega_2$, распространяющегося в элементе телесного угла do_2 [2]), через dw_{12} обозначим вероятность обратного процесса рассеяния кванта $\hbar\omega_2$ с возникновением кванта $\hbar\omega_1$ в телесном угле do_1. Принцип детального равновесия устанавливает следующую связь между этими

---

[1]) Переход от формул для $I(\theta)$ к формулам для $I(\vartheta)$ отвечает усреднению согласно

$$\overline{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}(1+\cos^2\vartheta)$$

(ср. переход от (92.3) к (92.6)).

[2]) Имеются в виду также и определенные поляризации обоих квантов; поляризационные индексы для краткости не выписываем. Порядок расположения индексов в обозначении dw_{21} соответствует принятому в квантовой механике: справа налево от начального состояния к конечному.

двумя вероятностями:

$$\frac{dw_{21}}{k_2^2\,do_2} = \frac{dw_{12}}{k_1^2\,do_1},$$

где k_1, k_2 — волновые векторы обоих квантов. Подставив $k_1^2 = \varepsilon_1\omega_1^2/c^2$, $k_2^2 = \varepsilon_2\omega_2^2/c^2$ (где $\varepsilon_1 = \varepsilon(\omega_1)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon(\omega_2)$), получим

$$\varepsilon_1\omega_1^2\frac{dw_{21}}{do_2} = \varepsilon_2\omega_2^2\frac{dw_{12}}{do_1}. \tag{118.1}$$

В этом соотношении предполагается, что начальное и конечное состояния рассеивающей системы соответствуют дискретным уровням энергии E_1 и E_2, связанным друг с другом равенством

$$E_1 + \hbar\omega_1 = E_2 + \hbar\omega_2.$$

Такая постановка вопроса не вполне соответствует реальному положению вещей, поскольку спектр уровней энергии макроскопического тела чрезвычайно густ и должен рассматриваться как квазинепрерывный.

Поэтому вместо вероятности dw_{21} рассеяния со строго определенным изменением частоты надо ввести вероятность рассеяния в интервале частот $d\omega_2$, т. е. с переходом тела в состояние с энергией в интервале $dE_2 = \hbar d\omega_2$. Обозначив эту вероятность (снова на 1 см пути) как dh_{21}, имеем

$$dh_{21} = d\omega_{21}\,d\Gamma_2 = dw_{21}\frac{d\Gamma_2}{dE_2}\hbar\,d\omega_2,$$

где $d\Gamma_2$ — число квантовых состояний тела в интервале энергий dE_2. Вместо (118.1) получим теперь

$$\frac{d\Gamma_1}{dE_1}\varepsilon_1\omega_1^2\frac{dh_{21}}{do_2\,d\omega_2} = \frac{d\Gamma_2}{dE_2}\varepsilon_2\omega_2^2\frac{dh_{12}}{do_1\,d\omega_1}.$$

Но согласно известной связи между статистическим весом макроскопического состояния тела и его энтропией $\mathfrak{S}$ производная $d\Gamma/dE$ в основном совпадает с $\exp\mathfrak{S}$, так что отношение

$$\frac{d\Gamma_1/dE_1}{d\Gamma_2/dE_2} = \exp\left(\mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_2\right).$$

Поскольку изменение энергии тела в результате рассеяния одного кванта ничтожно мало по сравнению с самой энергией, то относительно мало также и изменение энтропии, которое можно поэтому положить равным

$$\mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_2 = \frac{d\mathscr{S}}{dE}(E_1 - E_2) = \frac{\hbar}{T}(\omega_2 - \omega_1).$$

Учитывая это обстоятельство, напишем окончательно выражение принципа детального равновесия для рассеяния в следующем виде:

$$e^{-\hbar\omega_1/T}\varepsilon_1\omega_1^2\frac{dh_{21}}{do_2\,d\omega_2} = e^{-\hbar\omega_2/T}\varepsilon_2\omega_2^2\frac{dh_{12}}{do_1\,d\omega_1}. \tag{118.2}$$

Величину dh_{21} (имеющую размерность см$^{-1}$) называют *дифференциальным коэффициентом экстинкции* света при рассеянии. Его определение можно сформулировать также и следующим образом: это есть отношение числа квантов, рассеянных (в элемент телесных углов do_2, в интервале частот $d\omega_2$) в единицу времени в единице объема среды, к плотности потока фотонов в падающем свете. Проинтегрировав dh по всем направлениям и всем частотам рассеянного света, мы получим *полный коэффициент экстинкции*, который представляет собой декремент затухания плотности потока фотонов при его распространении в рассеивающей среде.

Пусть $\omega_2 < \omega_1$. Соотношение (118.2) связывает между собой интенсивности (коэффициенты экстинкции) стоксова (*1* $\to$ *2*) и обратного, антистоксова (*2* $\to$ *1*) рассеяний. Мы видим, что вторая, вообще говоря, меньше первой, в основном в отношении множителя

$$\exp\left(-\frac{\hbar(\omega_1-\omega_2)}{T}\right).$$

Это обстоятельство имеет довольно общий характер и соответствует тому, что передача энергии от тела к электромагнитному полю затрудняет процесс, ослабляя его в отношении $\exp(-\Delta E/T)$, где ΔE — передаваемая энергия. В частности, по этой причине обычно весьма слабым является эффект вынужденного испускания, при котором тело отдает в единичном акте рассеяния энергию $\hbar(\omega_1+\omega_2)$. Вероятность такого процесса при $\hbar(\omega_1+\omega_2) \gg T$ содержит малый множитель

$$\exp\left(-\frac{\hbar(\omega_1+\omega_2)}{T}\right).$$

Общее соотношение (118.2) сильно упрощается в важном случае рассеяния с относительно малым изменением частоты. Обозначим ω_1 просто как ω, а малую разность $\omega_2 - \omega_1$ как Ω ($|\Omega| \ll \omega$). Кроме того, введем обозначение

$$\frac{dh_{21}}{do_2\,d\omega_2} = I(\omega, \Omega). \tag{118.3}$$

В неэкспоненциальных множителях $\varepsilon\omega^2$ в (118.2) можно пренебречь разностью Ω, после чего они сокращаются в обеих сторонах равенства, так что остается

$$I(\omega,\Omega)e^{-\hbar\omega/T} = I(\omega+\Omega,-\Omega)e^{-\hbar(\omega+\Omega)/T}.$$

В первом из аргументов функции $I(\omega+\Omega,-\Omega)$, указывающем начальную частоту света, можно пренебречь Ω, т. е. относить интенсивность рассеяния к несколько смещенному значению частоты падающего света. Тогда

$$I(\omega,\Omega)=I(\omega,-\Omega)e^{-\hbar\Omega/T}. \tag{118.4}$$

В этом приближении I в обеих частях равенства относится к одинаковой частоте падающего света. Другими словами, соотношение (118.4) устанавливает простую связь между стоксовым и антистоксовым рассеянием одного и того же света с одинаковыми абсолютными значениями сдвига частоты Ω.

Задача

Связать интенсивность вынужденного комбинационного рассеяния (см. § 112) с интенсивностью обычного (*спонтанного*) рассеяния.

Решение. Вероятность вынужденного рассеяния получается из вероятности спонтанного рассеяния умножением на $N_{\mathbf{k}_2}$ — число фотонов в квантовом состоянии с волновым вектором $\mathbf{k}_2$. Для того чтобы связать это число с напряженностью поля $\mathbf{E}_2$ рассеянной волны, надо рассматривать последнюю как почти монохроматическую и приравнять друг другу выражения энергии поля (в единице объема) через число квантов или через напряженность:

$$\int \hbar\omega_2 N_{\mathbf{k}_2}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}=\frac{c\sqrt{\varepsilon_2}}{8\pi}\frac{dk_2}{d\omega_2}|\mathbf{E}_2|^2 \tag{1}$$

(правая часть написана согласно (83.9)). В левой части можно вынести из-под знака интеграла множители, мало меняющиеся в узком интервале частот, предварительно заменив

$$d^3k_2=k_2^2\frac{dk_2}{d\omega_2}\,do_2\,d\omega_2=\frac{\varepsilon_2\omega_2^2}{c^2}\frac{dk_2}{d\omega_2}\,do_2\,d\omega_2.$$

Тогда

$$\int \hbar\omega_2 N_{\mathbf{k}_2}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}=\frac{\hbar\omega_2^3\sqrt{\varepsilon_2}}{8\pi^3c^2}\frac{dk_2}{d\omega_2}\int N_{\mathbf{k}_2}\,d\omega_2\,do_2$$

и из (1) имеем

$$\int N_{\mathbf{k}_2}\,d\omega_2\,do_2=|\mathbf{E}_2|^2\frac{\pi^2c^3}{\hbar\omega_2^3\sqrt{\varepsilon_2}}.$$

Плотность же потока падающих фотонов есть (см. (83.11)):

$$\frac{1}{\hbar\omega_1}\overline{S}_1=\frac{c\sqrt{\varepsilon_1}}{8\pi\hbar\omega_1}|\mathbf{E}_1|^2.$$

Таким образом, энергия, передаваемая полю $\mathbf{E}_2$ за счет вынужденного рассеяния фотонов $\hbar\omega_1$, есть (вводим обозначение (118.3)):

$$\frac{d\overline{U}_2}{dt}=\hbar\omega_2\frac{\overline{S}_1}{\hbar\omega_1}I(\omega_1,\Omega)\int N_{\mathbf{k}_2}\,d\omega_2\,do_2=\frac{\pi c^4\sqrt{\varepsilon_1}}{8\hbar\omega_1\omega_2^2\sqrt{\varepsilon_2}}|\mathbf{E}_1|^2|\mathbf{E}_2|^2I(\omega_1,\Omega) \tag{2}$$

($\Omega=\omega_2-\omega_1$). Но в то же время поле $\mathbf{E}_2$ теряет энергию за счет вынужденного рассеяния фотонов $\hbar\omega_2$ с их превращением в фотоны $\hbar\omega_1$. Энергия,

получаемая путем этих процессов полем $\mathbf{E}_1$, дается формулой, отличающейся от (2) лишь перестановкой индексов *1* и *2*. Энергия же, отдаваемая полем $\mathbf{E}_2$, получится отсюда еще умножением на $-\omega_2/\omega_1$ (ср. с 112.8)) и равна

$$-\frac{\pi c^4\sqrt{\varepsilon_2}}{8\hbar\omega_1^3\sqrt{\varepsilon_1}}|\mathbf{E}_1|^2|\mathbf{E}_2|^2 I(\omega_2,-\Omega). \tag{3}$$

Сложив оба выражения и выразив $I(\omega_2,-\Omega)$ через $I(\omega_1,\Omega)$ с помощью (118.2), получим суммарное изменение энергии поля частоты ω_2:

$$\frac{d\overline{U}_2}{dt}=\frac{\pi c^4}{8\hbar\omega_1\omega_2^2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}(1-e^{\hbar\Omega/T})I(\omega_1,\Omega)|\mathbf{E}_1|^2|\mathbf{E}_2|^2. \tag{4}$$

Введя инкремент (при $\omega_2<\omega_1$) возрастания интенсивности рассеянного излучения с частотой ω_2 на единице пути

$$q_2=\frac{1}{\overline{S}_2}\frac{d\overline{U}_2}{dt}$$

(величина размерности 1/см), перепишем это соотношение в окончательном виде:

$$q_2=\frac{(2\pi)^3}{k_2^2\hbar\omega_1}(1-e^{\hbar\Omega/T})\overline{S}_1\frac{dh_{21}}{do_2\,d\omega_2}, \tag{5}$$

где $k_2=\omega_2\sqrt{\varepsilon_2}/c$, а $\overline{S}_1$ — плотность потока энергии падающего света с частотой ω_1.

§ 119. Рассеяние с малым изменением частоты

Развитая в § 117 теория обладает полной общностью и применима ко всем случаям рассеяния в изотропной среде вне зависимости от их конкретного механизма. Естественно, однако, что при такой степени общности вычисления могут быть продвинуты лишь сравнительно недалеко, и дальнейшее исследование явления рассеяния возможно лишь при более частных предположениях.

Рассеяние света сопровождается обычно относительно малым изменением частоты $\Omega=\omega'-\omega$. Следующие ниже вычисления относятся именно к таким случаям, причем, помимо условия $|\Omega|\ll\omega$, мы будем также предполагать, что изменение коэффициента преломления среды в интервале частот Ω относительно мало. Последнее условие означает, что частота ω не должна быть расположена слишком близко к какой-либо из областей (или линий) поглощения рассеивающей среды.

Если ω относится к оптической области спектра, то микроскопический механизм рассеяния с малыми Ω может быть связан с различного рода движениями атомов и молекул как таковых (т. е. с перемещением атомных ядер в противоположность чисто

электронным движениям, ответственным за оптические переходы). Ими могут быть внутримолекулярные колебания атомов, вращения или колебания молекул как целого и т.п. [1]).

Пусть $q = q(t)$ условно обозначает совокупность координат, описывающих движение, ответственное за рассеяние (для простоты проводим рассуждения сначала с классической точки зрения). Относительная медленность этого движения позволяет подойти к макроскопическому описанию рассеяния по-новому. Именно, можно ввести тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ik}(q)$, компоненты которого (в каждый момент времени) зависят как от параметров лишь от значений координат q в этот же момент времени. Последнее связано именно с предполагаемой относительной медленностью изменения ε. Введенная таким образом диэлектрическая проницаемость относится к полю, усредненному по электронному движению при заданном расположении ядер. Для полностью усредненного (в том числе и по движению ядер) поля диэлектрическая проницаемость сводится к скаляру $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. Отклонение ε_{ik} от этого значения обозначим как $\delta\varepsilon_{ik}$:

$$\varepsilon_{ik}(q) = \varepsilon\delta_{ik} + \delta\varepsilon_{ik}(q). \tag{119.1}$$

Тензором ε_{ik} определяется связь между напряженностью и индукцией поля как функциями времени. Подчеркнем, что падающая волна по-прежнему предполагается монохроматической (с частотой ω), но поле $\mathbf{E}'$ рассеянной волны рассматривается теперь как функция времени, не разложенная на монохроматические компоненты. Полное поле складывается из поля $\mathbf{E}$ падающей и поля $\mathbf{E}'$ рассеянной волн; таким образом,

$$D_i + D_i' = \varepsilon_{ik}(E_k + E_k').$$

Сократив, по определению, члены $\mathbf{D}$ и $\varepsilon\mathbf{E}$ и опустив член $\delta\varepsilon_{ik}E_k'$ как малый второго порядка, получим

$$D_i' = \varepsilon E_i' + \delta\varepsilon_{ik}(q)E_k. \tag{119.2}$$

Соотношение (119.2) того же вида, что и формула (117.2). Разница, однако, заключается в том, что при изложенном подходе к вопросу ясно, что в данном случае тензор $\alpha_{ik} = \delta\varepsilon_{ik}$ симметричен. Это следует непосредственно из общей теоремы о симметричности тензора диэлектрической проницаемости. Кроме того, в соответствии с вещественностью диэлектрической проницаемости прозрачной среды можно утверждать, что тензор $\delta\varepsilon_{ik}$ веществен.

---

[1]) При этом предполагается, что соответствующие значения Ω малы по сравнению с частотами электронных переходов. Это условие может нарушиться в газе, состоящем из молекул с вырожденным основным электронным состоянием.

Отсутствие у тензора α_{ik} антисимметричной части означает, что из указанных в § 117 трех видов рассеяния один (антисимметричный) при рассеянии с малым изменением частоты отсутствует.

Вычислим полную (со всеми сдвигами частот $\Omega \equiv \omega' - \omega \ll \omega$) интенсивность рассеяния. В рассматриваемом случае это легко сделать следующим образом. В уравнении (117.3) для рассеянной волны можно заменить k' на $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$ (а также взять значение $\alpha_{ik} \equiv \delta\varepsilon_{ik}$ при $\omega' = \omega$), после чего оно вообще не будет содержать ω', т. е. будет одинаковым для всех спектральных компонент поля. Поэтому то же уравнение будет справедливым и для не разложенного по Фурье поля рассеянной волны, которое мы обозначаем здесь той же буквой $\mathbf{E}'$. Воспользовавшись решением уравнения в форме (117.7), получим

$$\langle|\mathbf{E}'|^2\rangle = \frac{E_0^2 k^4 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon^2 R_0^2}\langle|\mathbf{G}|^2\rangle = \frac{E_0^2\omega^4 \sin^2\theta}{16\pi^2 c^4 R_0^2}\langle|\mathbf{G}|^2\rangle,$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{G}$, а угловые скобки обозначают, как и в § 117, окончательное усреднение по движению частиц.

Введем коэффициент экстинкции h как отношение полной интенсивности света, рассеянного по всем направлениям в единице объема среды, к плотности потока падающего света[1]):

$$h = \frac{1}{V|\mathbf{E}|^2}\int \langle|\mathbf{E}'|^2\rangle R_0^2\, do' \tag{119.3}$$

(здесь уже положено $\varepsilon(\omega') \approx \varepsilon(\omega)$).

По указанной уже в § 117 причине заменим при вычислении среднего значения $\langle|\mathbf{G}|^2\rangle$ экспоненциальный множитель в подынтегральном выражении $\mathbf{G}$ единицей; тогда

$$\langle|\mathbf{G}|^2\rangle = V e_i e_m^* \int \langle\delta\varepsilon_{il}^{(1)}\delta\varepsilon_{im}^{(2)}\rangle\, dV$$

(ср. (117.9), (117.10)). Выражение в угловых скобках представляет собой тензор второго ранга и ввиду изотропии среды дает после усреднения:

$$\langle\delta\varepsilon_{il}^{(1)}\delta\varepsilon_{im}^{(2)}\rangle = \frac{1}{3}\delta_{lm}\langle\delta\varepsilon_{ik}^{(1)}\delta\varepsilon_{ik}^{(2)}\rangle.$$

Тогда средний квадрат

$$\langle|\mathbf{G}|^2\rangle = \frac{V}{3}\int \langle\delta\varepsilon_{ik}^{(1)}\delta\varepsilon_{ik}^{(2)}\rangle\, dV$$

[1]) Это определение отличается от данного в § 118 определения по числу квантов множителем ω'/ω. В данном случае этот множитель можно считать равным единице, и тогда оба определения эквивалентны.

не зависит от направления рассеяния и интегрирование в (119.3) приводит к результату

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4} \int \langle \delta\varepsilon_{ik}^{(1)} \delta\varepsilon_{ik}^{(2)} \rangle \, dV. \tag{119.4}$$

Подынтегральное выражение здесь — корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости в различных точках среды $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ в один и тот же момент времени; интегрирование производится по разности координат $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Если перейти обратно к интегрированию по dV_1 и dV_2, то формула (119.4) запишется в виде

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4} V \langle \delta\varepsilon_{ik}^2 \rangle_V, \tag{119.5}$$

где символ $\langle \ldots \rangle_V$ означает средний квадрат флуктуации в объеме V. Отметим, что полный коэффициент экстинкции не зависит от поляризации падающего света.

Полученные формулы позволяют рассматривать рассеяние с макроскопической точки зрения как происходящее на флуктуационных неоднородностях среды. В такой трактовке угловое распределение и спектральный состав рассеянного света определяются пространственно-временными характеристиками флуктуаций — корреляционной функцией [1])

$$\langle \delta\varepsilon_{il}(t_1, \mathbf{r}_1) \delta\varepsilon_{km}(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$$

между флуктуациями в различных точках пространства в различные моменты времени.

Чтобы убедиться в этом, разложим зависящие от времени величины $\delta\varepsilon_{ik}$ в интеграл Фурье:

$$\delta\varepsilon_{ik}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varepsilon_{ik\Omega} e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}, \quad \delta\varepsilon_{ik\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varepsilon_{ik}(t) e^{i\Omega t} \, dt.$$

Каждая из компонент $\delta\varepsilon_{ik\Omega} e^{-i\Omega t}$ будет теперь играть роль величин α_{ik} в связи (117.2) между монохроматическими компонентами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}'$, причем $\omega' = \omega + \Omega$. Представляя теперь квадратичные по полю выражения в виде двойных интегралов (аналогично (117.9)), без труда получаем для дифференциального по частотам и направлению коэффициента экстинкции:

$$dh = \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^4} \left\{ e_i'^* e_k' e_l e_m^* (\delta\varepsilon_i \delta\varepsilon_{km})_{\Omega\mathbf{q}} \right\} do' \frac{d\Omega}{2\pi}, \tag{119.6}$$

[1]) Эта функция зависит, конечно, только от разности $t = t_1 - t_2$. Вторую стадию усреднения (обозначаемую угловыми скобками) в применении к стоящему здесь произведению флуктуаций можно понимать как усреднение по «начальному» моменту времени t_2 при заданном t.

где (в соответствии с обозначениями, принятыми в IX, гл. 8, 9) введена компонента пространственно-временного фурье-разложения корреляционной функции

$$(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\Omega\mathbf{q}} = \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle\delta\varepsilon_{il}(t_1,\mathbf{r}_1)\delta\varepsilon_{km}(t_2,\mathbf{r}_2)\rangle e^{i(\Omega t-\mathbf{qr})}\,dt\,dV \quad (119.7)$$

($t = t_1 - t_2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$). Формула (119.6) относится к регистрируемой поляризационным анализатором компоненте рассеянного света с поляризацией $\mathbf{e}'$. Говоря о спектральном распределении, мы имеем в виду сильную зависимость от Ω внутри линии рассеяния; медленно же меняющийся множитель ω'^4 заменен на ω^4. В подынтегральном выражении (119.6) оставлен множитель $e^{-i\mathbf{qr}}$. Замена его единицей в формуле для спектрального распределения может оказаться недопустимой, даже если это допустимо для интегрального по частотам рассеяния (см. следующий параграф).

До сих пор изложение велось в терминах классической механики. При переходе к квантовому описанию координаты q, а с ними и величины $\delta\varepsilon_{ik}$, заменяются соответствующими квантовомеханическими операторами в гейзенберговском представлении. Можно показать (см. конец параграфа), что при этом формула (119.6) остается справедливой, если под $(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\Omega\mathbf{q}}$ понимать величину

$$(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\Omega\mathbf{q}} = \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle\delta\widehat{\varepsilon}_{km}(t_2,\mathbf{r}_2)\delta\widehat{\varepsilon}_{il}(t_1,\mathbf{r}_1)\rangle e^{i(\Omega t-\mathbf{qr})}\,dt\,dV. \quad (119.8)$$

Теперь угловые скобки означают полное (как квантовомеханическое, так и статистическое) усреднение по состоянию среды. Ввиду некоммутативности операторов $\delta\widehat{\varepsilon}_{ik}$ в разные моменты времени в разных точках среды, порядок следования операторов в (119.8) существен. Именно с этой некоммутативностью связана выражаемая соотношением (118.4) зависимость интенсивности рассеяния от знака Ω; в классическом пределе эта зависимость исчезает. Квантовая же формула удовлетворяет указанному соотношению автоматически.

Интегральный по частотам коэффициент экстинкции получается интегрированием по Ω; ввиду быстрой сходимости вне линии поглощения интегрирование может быть распространено от $-\infty$ до ∞ (напомним, что Ω есть разность $\omega' - \omega$ и потому ее положительные и отрицательные значения физически различны). Интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega t}\frac{d\Omega}{2\pi} = \delta(t),$$

после чего δ-функция устраняется интегрированием по t и разновременная корреляционная функция становится одновременной. Дифференциальный по направлениям коэффициент экстинкции дается формулой

$$dh = \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^4} \left\{ e_i'^* e_k' e_l e_m^* (\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}} \right\} do', \tag{119.9}$$

где

$$(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}} = \int \langle \delta\varepsilon_{il}^{(1)} \delta\varepsilon_{km}^{(2)} \rangle e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, dV \tag{119.10}$$

— фурье-компонента одновременной корреляционной функции. При $\mathbf{q} = 0$ угловое распределение связано лишь с поляризационными множителями, и мы возвращаемся к уже известным нам формулам.

Сохранение в интеграле (119.10) отличного от единицы множителя $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ существенно усложняет угловое распределение и поляризационные свойства рассеянного света [1]). В частности, несправедливо разделение рассеяния на две части (скалярную и симметричную), которые давались бы двумя первыми членами в (117.18). Существенно при этом, что тензор $(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}}$ уже не обязательно является истинным тензором, как это автоматически имеет место при $\mathbf{q} = 0$; в нем могут присутствовать псевдотензорные слагаемые (см. задачу 2). Эти слагаемые допустимы, если изотропная среда состоит из право-левосимметричных молекул и потому не инвариантна относительно инверсии.

В заключение остановимся кратко на квантовомеханическом выводе формул (119.6), (119.8).

Роль оператора возмущения в гамильтониане системы «среда + поле» играет интеграл

$$\widehat{V} = -\int \delta\widehat{\varepsilon}_{ik} \frac{\widehat{E}_i \widehat{E}_k}{8\pi}\, dV, \tag{119.11}$$

где $\widehat{\mathbf{E}}$ — оператор квантованного электромагнитного поля (после усреднения по стационарным состояниям системы и статистического усреднения по распределению Гиббса оператор (119.11) дает изменение $\delta\mathscr{F}$ свободной энергии при медленном изменении диэлектрической проницаемости — см. (101.24)).

Оператор $\widehat{\mathbf{E}}$ выражается через операторы уничтожения и рождения фотонов в состояниях ω, $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}$:

$$\widehat{\mathbf{E}} = i \sum_{\mathbf{ke}} \left(\frac{2\pi\hbar\omega u}{c\sqrt{\varepsilon}} \right)^{1/2} \left\{ \widehat{c}_{\mathbf{ke}} \mathbf{e} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + \widehat{c}_{\mathbf{ke}}^{+} \mathbf{e}^* e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)} \right\}, \tag{119.12}$$

---

[1]) В § 121–123 мы встретимся со случаями, когда полагать $\mathbf{q} = 0$ в (119.10) нельзя даже для интегрального по частотам рассеяния.

где $u = d\omega/dk$ (нормировочный объем полагаем равным 1). Это выражение отличается от такового для поля в пустоте (см. IV, § 2) множителем $(u/\sqrt{\varepsilon})^{1/2}$ в нормировочных коэффициентах; его происхождение связано со множителем $\sqrt{\varepsilon}/u$ в плотности энергии (83.9) плоской электромагнитной волны в среде [1]).

Вероятность перехода с поглощением фотона $\mathbf{k}$ и испусканием фотона $\mathbf{k}'$, причем среда переходит из некоторого заданного начального состояния (отметим его индексом n) в любое конечное состояние (f), дается формулой (ср. III, (40.5))

$$dw = \sum_f \left| \frac{1}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{k}' f | V | \mathbf{k} n \rangle \, dt \right|^2 \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}, \tag{119.13}$$

где матричный элемент

$$\langle \mathbf{k}' f | V | \mathbf{k} n \rangle = \frac{2\pi\hbar\omega u}{c\sqrt{\varepsilon}} \int (\delta\varepsilon_{ik})_{fn} \frac{e_i'^* e_k}{4\pi} e^{i(\Omega t - \mathbf{qr})} \, dV,$$
$$\Omega = \omega' - \omega, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}.$$

Интеграл в (119.13) пишем в виде двойного интеграла по $dV_1\, dV_2\, dt_1\, dt_2$ и замечаем, что

$$\sum_f (\delta\varepsilon_{il}^{(1)})_{fn} (\delta\varepsilon_{km}^{(2)})^*_{fn} = (\delta\varepsilon_{km}^{(2)} \delta\varepsilon_{il}^{(1)})_{nn}.$$

Подынтегральное выражение зависит только от разностей $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $t_1 - t_2$. Поэтому вероятность dw содержит множитель t — полное время наблюдения. Искомый коэффициент экстинкции определяется как $dh = dw/tu$. После окончательного статистического усреднения по состояниям среды получим требуемый результат.

Задачи

1. Найти общий вид поляризационной зависимости рассеяния в изотропной среде с учетом передаваемого среде импульса $\mathbf{q}$ (*Б.Я. Зельдович*, 1972).

Решение. Задача сводится к нахождению всех независимых тензорных четвертого ранга комбинаций, обладающих симметрией тензора $(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\Omega\mathbf{q}}$, которые можно составить из единичного тензора δ_{ik}, единичного антисимметричного тензора e_{ikl} и компонент вектора $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{q}/q$; они должны быть симметричны по каждой из пар индексов il и km и инвариантны

---

[1]) Нормировочный коэффициент в (119.12) получается из условия, что собственные значения оператора плотности энергии поля должны быть равны $\sum (N_{\mathbf{ke}} + 1/2)\hbar\omega$, где $N_{\mathbf{ke}}$ — числа заполнения квантовых состояний фотона. Энергия фотона в среде есть $\hbar\omega$, а импульс $\hbar\mathbf{k}$ ($k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$): эти величины фигурируют в показателях экспоненциальных множителей в (119.12). Во избежание недоразумений подчеркнем, что импульс $\hbar\mathbf{k}$ включает в себя не только вклад от поля как такового, но и импульс, приобретаемый средой в процессе излучения фотона.

по отношению к перестановке пары il с парой km (эквивалентной перестановке точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ и тем самым изменению знака $\mathbf{r}$) при одновременном изменении знака $\boldsymbol{\nu}$.

Этим требованиям удовлетворяют комбинации:

$$\begin{array}{ll} 1)\ \delta_{il}\delta_{km}, & 2)\ \delta_{ik}\delta_{lm}+\delta_{lk}\delta_{im}, \\ 3)\ \delta_{il}\nu_k\nu_m+\delta_{km}\nu_i\nu_l, & 4)\ \delta_{ik}\nu_l\nu_m+\ldots, \\ 5)\ \nu_i\nu_k\nu_l\nu_m, & 6)\ \nu_p e_{pik}\delta_{lm}+\ldots, \\ 7)\ \nu_p e_{pik}\nu_l\nu_m+\ldots & \end{array}$$

(в 4, 6, 7 опущено по три члена, получающихся симметризацией написанного члена). Совокупности этих комбинаций отвечает угловое распределение вида

$$\begin{gathered} f_1|\mathbf{e}\mathbf{e}'^*|^2+f_2\{1+|\mathbf{e}\mathbf{e}'|^2\}+f_3\{(\mathbf{e}\mathbf{e}'^*)(\boldsymbol{\nu}\mathbf{e}^*)(\nu e')+\text{к. с.}\}+ \\ +f_4\{|\boldsymbol{\nu}\mathbf{e}|^2+|\boldsymbol{\nu}\mathbf{e}'|^2+((\mathbf{e}\mathbf{e}')(\nu\mathbf{e}^*)+\text{к. с.})\}+f_5|(\nu\mathbf{e})(\boldsymbol{\nu}\mathbf{e}')|^2+ \\ +if_6\boldsymbol{\nu}\{[\mathbf{e}\mathbf{e}^*]+[\mathbf{e}'^*\mathbf{e}']+([\mathbf{e}\mathbf{e}'](\mathbf{e}^*\mathbf{e}'^*)-\text{к. с.})\}+ \\ +if_7\boldsymbol{\nu}\{[\mathbf{e}'^*\mathbf{e}'](\boldsymbol{\nu}\mathbf{e})(\boldsymbol{\nu}\mathbf{e}^*)+[\mathbf{e}\mathbf{e}^*](\boldsymbol{\nu}\mathbf{e}')(\boldsymbol{\nu}\mathbf{e}'^*)+([\mathbf{e}\mathbf{e}'](\boldsymbol{\nu}\mathbf{e}^*)(\boldsymbol{\nu}\mathbf{e}'^*)+\text{к. с.})\}. \end{gathered}$$

($f_1, \ldots, f_7$ — вещественные функции Ω и q). В среде, допускающей инверсию, имеются только первые пять членов (первые два из них эквивалентны первым двум членам в (117.18)). В среде без центра инверсии существуют также и два последних члена; они, однако, обращаются в нуль, если обе поляризации $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ — линейные. Если пренебречь в $\mathbf{q}$ разницей в частотах ω и ω', то будет $\boldsymbol{\nu}=(\mathbf{n}'-\mathbf{n})/|\mathbf{n}'-\mathbf{n}|$, где $\mathbf{n}=\mathbf{k}/k$, $\mathbf{n}'=\mathbf{k}'/k$. В этом приближении член с f_7 обращается тождественно в нуль (убедиться в этом можно путем довольно длинного вычисления, разложив каждый из векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ на две компоненты — в плоскости рассеяния и перпендикулярную к ней).

2. Определить излучение при движении быстрой частицы со скоростью, меньшей скорости света, в рассеивающей свет среде (*С.П. Капица*, 1960).

Р е ш е н и е. Излучение в этом случае можно рассматривать как рассеяние поля частицы на флуктуациях диэлектрической проницаемости среды. Запишем энергию, излучаемую в единицу времени из единицы объема, для монохроматического рассеиваемого поля как

$$W=h\overline{S}=\frac{hc\sqrt{\varepsilon}}{8\pi}|\mathbf{E}|^2$$

($\overline{S}$ из (83.11)); h — коэффициент экстинкции света). В таком виде эта формула годится для поля $\mathbf{E}$ любого происхождения.

Поле движущейся частицы имеет непрерывный частотный спектр. Поэтому, чтобы получить излучение в интервале частот $d\omega$ (из единицы объема, но за полное время пролета), надо заменить

$$|\mathbf{E}|^2\to 2|\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})|^2\frac{d\omega}{2\pi}$$

(см. II, § 66), где $\mathbf{E}_\omega$ — временная фурье-компонента поля. Интегрируя по объему, получим спектральное распределение полного излучения:

$$dW_\omega=d\omega\frac{hc\sqrt{\varepsilon}}{8\pi^2}\int|\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})|^2\,dV.$$

Для применимости этой формулы нужно, чтобы поле мало менялось на атомных расстояниях, точнее — на радиусе корреляции флуктуаций

проницаемости ε среды. Кроме того, для пренебрежения сдвигом частоты при рассеянии скорость молекул среды должна была мала по сравнению со скоростью частицы v.

Поле движущейся частицы дается формулами (114.7), (114.8). Имеем

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E_k} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Но частота поля при движении частицы есть $\omega = vk_x$. Поэтому $d^3k = dk_x\, d^2q = v^{-1}\, d\omega\, d^2q$, так что

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \frac{1}{v}\int \mathbf{E_k} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^2q}{(2\pi)^2},$$

причем $\mathbf{kr} = \omega x/v + \mathbf{qr}$. Отсюда

$$\int |\mathbf{E}_\omega|^2\, dV = \frac{1}{v^2}\int \mathbf{E_k}\mathbf{E_{k'}} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\mathbf{r}} \frac{d^2q\, d^2q'}{(2\pi)^4}\, dV.$$

Интеграл по dx дает просто длину пути частицы l, а интеграл по $dy\, dz$ — δ-функцию $(2\pi)^2\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$. Таким образом,

$$\int |\mathbf{E}_\omega|^2\, dV = \frac{l}{v^2}\int |\mathbf{E_k}|^2 \frac{d^2q}{(2\pi)^2}.$$

В этом интеграле существенна область сравнительно больших значений q:

$$\omega\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2} \ll q \ll \frac{1}{a}$$

(a — атомные размеры). Действительно, в этой области выражение для $\mathbf{E_k}$ сводится к

$$\mathbf{E_k} \approx -i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k} \approx -i\mathbf{q}\frac{4\pi e}{\varepsilon q^2}e^{-i\omega t}$$

и интеграл логарифмически расходится. С логарифмической точностью интеграл следует обрезать на пределах, отвечающих границам указанной области. В результате получим следующее окончательное выражение для спектрального распределения интенсивности ($dF = dW/l$) излучения с единицы пути:

$$dF = \frac{he^2c}{\pi v^2\varepsilon^{3/2}} \ln \frac{vc}{a\omega(c^2 - \varepsilon v^2)^{1/2}} \tag{1}$$

с коэффициентом экстинкции из (119.5).

Рассмотренное излучение аналогично переходному в том смысле, что не зависит от массы частицы. При сопоставимых значениях скорости (находящихся, однако, по разные стороны от граничного значения $c/\sqrt{\varepsilon}$) интенсивность этого излучения мала по сравнению с интенсивностью черенковского излучения. Так, для газов при $v \sim c$, сравнив выражения (1) и (115.3), в грубой оценке находим, что

$$\frac{dF}{dF_{\text{чер}}} \sim \frac{\alpha^2}{\lambda^3 d^3} \sim \frac{a^6}{\lambda^3 d^3},$$

где d — межмолекулярные расстояния; $\lambda \sim \omega/c$ (для h использовано выражение (120.4), в котором положено $n-1 \sim N\alpha$, где $\alpha \sim a^3$ — поляризуемость молекулы). Оценку для жидкости можно получить, положив $d \sim a$; тогда $dF/dF_{\text{чер}} \sim (a/\lambda)^3$.

§ 120. Рэлеевское рассеяние в газах и жидкостях

По характеру изменения частоты света различают два типа рассеяния: 1) *комбинационное рассеяние* (*эффект Рамана–Ландсберга–Мандельштама*), приводящее к возникновению в рассеянном свете линий, смещенных (по частоте) относительно возбуждающего света, и 2) *рэлеевское рассеяние*, происходящее без существенного изменения частоты.

Механизм комбинационного рассеяния в газах заключается в изменении под влиянием падающего света колебательного, вращательного или электронного состояния молекулы. Рэлеевское же рассеяние не связано ни с каким изменением внутреннего состояния молекулы. В предельном случае разреженного газа (длина пробега молекул l велика по сравнению с длиной волны света λ) рассеяние происходит независимо на каждой молекуле; это явление может рассматриваться чисто микроскопическим, квантовомеханическим образом.

Мы будем рассматривать здесь обратный случай, когда $l \ll \lambda$[1]. В этом случае рэлеевское рассеяние в газе можно разделить на две части. Одна из них связана с нерегулярностями в ориентации молекул (*флуктуации анизотропии*). Другая же представляет собой рассеяние на флуктуациях плотности газа. Ориентация молекулы полностью изменяется в результате нескольких столкновений, т. е. за время порядка величины свободного пробега τ. Поэтому рассеяние на флуктуациях анизотропии приводит к возникновению сравнительно размытой линии с максимумом при $\omega' = \omega$ и шириной $\sim \hbar/\tau$. Рассеяние же на флуктуациях плотности приводит к появлению на этом фоне значительно более резкой линии. Как мы увидим ниже, для рассеяния света с длиной волны λ существенны флуктуации плотности, происходящие в объемах λ^3. Ввиду большой величины этих объемов изменение флуктуаций в них происходит сравнительно медленно, с чем и связана узость соответствующей линии рассеяния. Мы условимся называть ниже *несмещенной* именно эту резкую линию.

Рассеяние на флуктуациях плотности относится к скалярному типу; поскольку плотность ρ есть скалярная величина, то скалярным будет и связанное с изменением ρ изменение диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon$. Изменение же диэлектрической проницаемости при флуктуациях анизотропии описывается симметричным тензором $\delta\varepsilon_{ik}$ с равным нулю следом; последнее ясно из того, что при усреднении по всем направлениям этот

---

[1]) Точнее, необходимое условие гласит $l \ll \lambda \sin(\vartheta/2)$, где ϑ — угол рассеяния. Дело в том, что в интеграл (119.7) частота света входит лишь в комбинации q (120.5) с углом рассеяния.

эффект должен вообще исчезать. Таким образом, рассеяние на флуктуациях анизотропии относится к симметричному типу.

В жидкостях ситуация более сложна. Комбинационное рассеяние здесь может быть связано лишь с изменением колебательного (или электронного) состояния молекул. Вращательных же комбинационных линий при рассеянии в жидкости не возникает. Дело в том, что ввиду сильного взаимодействия молекул в жидкости не существует их свободного вращения, которое обладало бы дискретными уровнями энергии. Поэтому вращение молекул, как и всякое другое движение с изменением их взаимного расположения, вносит в жидкости свой вклад лишь в создание общей сравнительно широкой линии рассеяния вокруг $\omega' = \omega$, которую целиком в этом случае естественно назвать рэлеевской. Время релаксации указанных движений связано с вязкостью жидкости.

Возможность выделения из общего рэлеевского рассеяния в жидкости части, связанной с термодинамическими флуктуациями (плотности, температуры), зависит от величины различных времен релаксации. Необходимо, чтобы времена релаксации всех процессов установления равновесия в жидкости были малы по сравнению со временем изменения указанных флуктуаций. В таких условиях будет наблюдаться узкая несмещенная линия, окруженная более размытым фоном (его называют *крылом* линии Рэлея). Рассеяние, приводящее к несмещенной линии, скалярно. Что же касается крыла, то при рассеянии в жидкостях (в отличие от газов) нельзя, вообще говоря, утверждать, что оно будет чисто симметричным, без примеси скалярной части.

Угловое распределение в несмещенной линии дается общими формулами (117.25), (117.26), относящимися к скалярному рассеянию. Поэтому достаточно вычислить полный коэффициент экстинкции. Положив в формуле (119.5) $\delta\varepsilon_{ik} = \delta\varepsilon\delta_{ik}$, находим

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} V \langle \delta\varepsilon^2 \rangle_V. \tag{120.1}$$

Если $\delta\rho$ и δT — изменения плотности и температуры, то

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \delta\rho + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \delta T.$$

Согласно известным формулам (см. V, § 112), флуктуации плотности и температуры статистически независимы ($\langle \delta\rho\delta T \rangle = 0$), а средние квадраты каждой из них:

$$\langle (\delta T)^2 \rangle_V = \frac{T^2}{\rho c_v V}, \quad \langle (\delta\rho)^2 \rangle_V = \frac{\rho T}{V} \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T$$

(c_v — теплоемкость единицы массы среды). Таким образом, на-

ходим формулу

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\left[\rho T \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 + \frac{T^2}{\rho c_v}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho^2\right]; \qquad (120.2)$$

она была впервые получена *Эйнштейном* (1910).

Эту формулу можно представить и в другом виде, выразив ее через другие термодинамические производные. Выбрав в качестве независимых переменных другую пару статистически независимых величин — давление P и энтропию s (отнесенную к единице массы), — запишем

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_s \delta P + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\right)_P \delta s$$

и используем известные выражения для флуктуаций этих величин:

$$\langle(\delta s)^2\rangle_V = \frac{c_p}{\rho V}, \quad \langle(\delta P)^2\rangle_V = \frac{\rho T u^2}{V}$$

(u — адиабатическая скорость звука в среде: $u^2 = (\partial P/\partial\rho)_s$). Заменив также

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\right)_P = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_P = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s \frac{1}{u^2},$$

получим формулу Эйнштейна в виде

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\left[\frac{T^2}{\rho c_p}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P^2 + \frac{\rho T}{u^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s^2\right]. \qquad (120.3)$$

Для газов формула (120.3) сильно упрощается. Диэлектрическая проницаемость газа (в оптической области частот) почти не зависит от температуры; поэтому первым членом в квадратных скобках можно пренебречь. Зависимость же от плотности сводится к прямой пропорциональности между $\varepsilon - 1$ и ρ; поэтому

$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \approx \varepsilon - 1 \approx 2(n-1)$$

($n = \sqrt{\varepsilon}$ — коэффициент преломления). Учитывая также, что согласно уравнению состояния идеального газа

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{NT}$$

(N — число частиц в 1 см^3), получим

$$h = \frac{2\omega^4}{3\pi c^4}\frac{(n-1)^2}{N}. \qquad (120.4)$$

Эта формула была впервые получена *Рэлеем* (1881).

Далее перейдем к вопросу о тонкой структуре несмещенной линии. Для этого надо рассмотреть временно́й ход флуктуаций. В этом отношении термодинамические флуктуации делятся на две категории. Адиабатические флуктуации давления в жидкости (или газе) распространяются в виде незатухающих волн со скоростью звука u (от поглощения звука мы здесь отвлекаемся, так как оно приводит лишь к некоторому уширению линии; см. ниже). Флуктуации же энтропии при постоянном давлении вообще не распространяются относительно жидкости (затухая лишь постепенно под влиянием теплопроводности).

В силу волнового характера распространения звуковых возмущений временной ход флуктуаций давления коррелирован даже на расстояниях, больших по сравнению с межмолекулярными. Это обстоятельство было несущественно при вычислении полной (интегральной по частотам) интенсивности линии рассеяния: она определяется корреляцией между флуктуациями в различных точках пространства в один и тот же момент времени, а такая корреляция простирается лишь на близкие расстояния. Спектральное же распределение интенсивности рассеяния определяется разновременной корреляционной функцией флуктуаций, и наличие дальней корреляции делает необходимым сохранение множителя $e^{-i\mathbf{qr}}$ в (119.7).

В незатухающей звуковой волне частота Ω и волновой вектор $\mathbf{q}$ связаны соотношением $\Omega^2 = u^2\mathbf{q}^2$. Соответственно этому спектральное разложение корреляционной функции флуктуаций давления (а тем самым и соответствующих флуктуаций проницаемости) будет состоять из двух резких линий при частотах

$$\boldsymbol{\Omega} = \pm qu.$$

Но величина вектора $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$, отвечающего рассеянию света, связана с углом рассеяния ϑ (угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$) равенством

$$q = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| \approx 2n\frac{\omega}{c}\sin\frac{\vartheta}{2} \tag{120.5}$$

(ввиду малости разности $\Omega = \omega' - \omega$ здесь положено $\omega' \approx \omega$). Обозначая соответствующее значение Ω как Ω_0, имеем, следовательно,

$$\Omega_0 = \pm 2n\omega\frac{u}{c}\sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{120.6}$$

Таким образом, рассеяние на флуктуациях давления приводит к возникновению дублета с расстоянием между компонентами $2|\Omega_0|$, зависящим от угла рассеяния — так называемый

дублет Мандельштама–Бриллюэна (*Л.И. Мандельштам*, 1918; *L. Brillouin*, 1922) [1]).

Флуктуации же энтропии обладают, в соответствии со сказанным, нулевой частотой. Поэтому рассеяние на них приводит к возникновению еще одной, центральной линии с $\Omega = 0$ (*Л.Д. Ландау*, *G. Placzek*, 1933) [2]).

Выясним, как распределяется интенсивность несмещенного рассеяния между дублетом и центральной линией. Под интенсивностью дублета будем понимать сумму интенсивностей обеих его компонент, т. е. удвоенную интенсивность каждой из них [3]). Тогда полный коэффициент экстинкции, даваемый формулой (120.2) или (120.3), $h = h_{\text{дубл}} + h_{\text{ц. л}}$.

Поскольку линии дублета обусловлены рассеянием на адиабатических флуктуациях давления, то их интенсивность дается вторым членом в (120.3), обязанным как раз этим флуктуациям. Адиабатическую производную $(\partial\varepsilon/\partial\rho)_s$ можно связать с изотермической производной, преобразовав ее к переменным ρ, T:

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T + \frac{T}{c_v\rho^2}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho .$$

Если пренебречь изменением ε с температурой при неизменной плотности, то $(\partial\varepsilon/\partial\rho)_s = (\partial\varepsilon/\partial\rho)_T$. С этой же точностью в полной интенсивности, представленной в виде (120.2), можно пренебречь вторым членом (вычисление, свободное от этих пренебрежений, — см. задачу 1). Наконец, воспользовавшись известной термодинамической формулой для отношений адиабатической и изотермической сжимаемостей (см. V, (16.14))

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \frac{c_v}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T, \tag{120.7}$$

получим *формулу Ландау–Плачека* для приходящейся на дублет

---

[1]) Укажем, для иллюстрации, что при типичных значениях $u = 1{,}5 \cdot 10^5$ см/с, $n = 1{,}5$, длине волны рассеиваемого света $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см, угле рассеяния $\vartheta = 90^\circ$ имеем для ширины дублета $\Omega_0/(2\pi c) = 0{,}05$ см$^{-1}$. Ширина же крыла линии Рэлея достигает 200–150 см$^{-1}$.

[2]) В сверхтекучем жидком гелии (изотоп ^{4}He) возмущения энтропии распространяются в виде слабозатухающих колебаний — волн второго звука, скорость u_2 которого, однако, существенно меньше скорости обычного звука. Поэтому центральная линия рассеяния в сверхтекучем гелии в свою очередь расщепляется в узкий дублет; его ширина дается той же формулой (120.6) с u_2 вместо u (*В.Л. Гинзбург*, 1943).

[3]) Разница в интенсивностях обеих компонент согласно формуле (118.4) обычно совершенно несущественна, поскольку $\hbar\Omega_0 \ll T$.

доли полной интенсивности несмещенной линии:

$$\frac{h_{\text{дубл}}}{h} = \frac{c_v}{c_p}. \tag{120.8}$$

Для определения формы линий надо рассмотреть разновременную корреляционную функцию с учетом тех диссипативных процессов, которые приводят к затуханию флуктуаций. Для флуктуаций давления это — процессы вязкости и теплопроводности. Фурье-компоненты корреляционной функции адиабатических флуктуаций давления:

$$(\delta P^2)_{\Omega\mathbf{q}} = \frac{\rho T u^3 \gamma}{(\Omega \mp qu)^2 + u^2\gamma^2}, \tag{120.9}$$

где

$$\gamma = \frac{q^2}{2\rho u}\left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right] \tag{120.10}$$

(см. IX, § 89). Величина γ — коэффициент поглощения звука на единице длины; в нем η, ζ — коэффициенты вязкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности среды (см. VI, § 79). Распределение интенсивности в линии (в каждой из компонент дублета) при заданном направлении рассеяния пропорционально выражению (120.9). Пронормировав его на единицу, получим

$$dI = \frac{\Gamma}{2\pi[(\Omega - \Omega_0)^2 + \Gamma^2/4]}\, d\Omega, \tag{120.11}$$

где $\Gamma = 2u\gamma$. Такую форму линии называют *дисперсионной*, а величину Γ — шириной линии. Взяв q из (120.5), находим для этой ширины:

$$\Gamma = \frac{2\omega^2 n^2}{\rho c^2}(1 - \cos\vartheta)\left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right]. \tag{120.12}$$

Изобарические флуктуации энтропии затухают только за счет теплопроводности. Для их корреляционной функции имеем

$$(\delta s^2)_{\Omega\mathbf{q}} = \frac{2c_p}{\rho}\frac{\chi q^2}{\Omega^2 + \chi^2 q^4}, \tag{120.13}$$

где $\chi = \varkappa/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности. Форма центральной линии дается такой же дисперсионной формулой (120.11), где теперь надо положить $\Omega_0 = 0$, а ширина линии

$$\Gamma = 2\chi q^2 = 4\chi\frac{n^2\omega^2}{c^2}(1 - \cos\vartheta). \tag{120.14}$$

Как уже было указано в начале этого параграфа, изложенная здесь теория применима к рассеянию в жидкости при условии,

что все времена релаксации в ней малы по сравнению со временем изменения флуктуаций. Следует иметь в виду, что у всякой жидкости имеются времена релаксации различного порядка величины. Наиболее быстрым релаксационным процессом является, по-видимому, рассасывание упругих напряжений в жидкости. Соответствующее (*максвелловское*) время релаксации $\tau_{\text{M}} \sim \eta/G$, где G — модуль сдвига. Более медленно происходит перераспределение молекул по их ориентациям, т. е. рассасывание флуктуаций анизотропии. Соответствующее (так называемое *дебаевское*) время релаксации $\tau_{\text{D}} \sim \eta a^3/T$, a — размеры молекулы; разница между τ_{M} и τ_{D} особенно велика в жидкостях с большими молекулами. Наконец, возможны различного рода другие медленные релаксационные процессы, приводящие к дисперсии звука (например, химические реакции, замедленная передача энергии в колебательные степени свободы молекулы и др.). Существенны для рассеяния те процессы, для которых $1/\tau$ сравнимо с частотой тех звуковых возмущений, на которых происходит рассеяние. Не вникая в детали, укажем лишь, что при достаточно большой вязкости жидкости, когда $\tau_{\text{M}} \gg 1/(qu)$, жидкость ведет себя в отношении рассеяния света как аморфное твердое тело.

Задачи

1. Найти точную формулу для отношения интенсивностей центральной линии и дублета в несмещенной линии рассеяния (*И.Л. Фабелинский*, 1956).

Решение. Как уже было указано в тексте, второй член в формуле (120.3) дает интенсивность дублета. Первый же член связан с изобарическими флуктуациями энтропии и потому дает интенсивность центральной линии. Таким образом,

$$\frac{h_{\text{ц.л.}}}{h_{\text{дубл}}} = \frac{T}{c_p\rho^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P^2 \Big/ \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s^2 \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s .$$

Из термодинамических соотношений (120.7) и

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T - \frac{T}{c_p\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P^2$$

(см. V, (16.15)) находим

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \frac{c_v}{c_p - c_v}\frac{T}{c_p\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P^2 .$$

Окончательно:

$$\frac{h_{\text{ц.л.}}}{h_{\text{дубл}}} = \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P \Big/ \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P\right]^2 .$$

В приближении Ландау–Плачека выражение в квадратных скобках обращается в единицу.

2. Свет рассеивается в газе из молекул линейной формы с поляризуемостями $\alpha_{\|}$ и $\alpha_{\perp}$ в направлениях соответственно вдоль и поперек оси. Определить интенсивности различных типов рассеяния.

Р е ш е н и е. Полная интенсивность рассеяния (при заданных колебательных и электронных состояниях молекул) включает в себя все рэлеевское и вращательную часть комбинационного рассеяния. Поскольку рассеяние происходит независимо на каждой из молекул газа, то полный коэффициент экстинкции проще всего получить по формуле (92.4), умножив ее на число N частиц в 1 см^3 и заменив квадрат $|\alpha V|^2$ на $(1/3)\alpha_{ik}^2 = (1/3)(\alpha_\parallel^2 + 2\alpha_\perp^2)$:

$$h = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}(\alpha_\parallel^2 + 2\alpha_\perp^2) \tag{1}$$

(определения поляризуемости здесь и в § 92 отличаются множителем V).

Несмещенная рэлеевская линия связана со скалярной частью поляризуемости, т. е. происходит так, как если бы тензор поляризуемости молекулы был равен $(1/3)\alpha_{ll}\delta_{ik}$. По той же формуле (92.4) найдем поэтому

$$h_{\text{несм}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}\frac{(\alpha_\parallel + 2\alpha_\perp)^2}{3}. \tag{2}$$

Разность $h_{\text{полн}} - h_{\text{несм}}$ содержит в себе фон несмещенной линии (рассеяние на флуктуациях анизотропии) и вращательное комбинационное рассеяние. Для того чтобы выделить первое, надо предварительно усреднить тензор поляризуемости молекулы по ее вращению вокруг некоторой определенной оси (перпендикулярной к оси молекулы). Очевидно, что усредненная таким образом поляризуемость вдоль оси вращения совпадает с $\alpha_\perp$, а вдоль любого направления в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, равна $^1/_2(\alpha_\perp + \alpha_\parallel)$. Другими словами, вращающуюся вокруг заданной оси молекулу надо рассматривать как частицу с главными значениями тензора поляризуемости, равными

$$\alpha_\perp, (\alpha_\perp + \alpha_\parallel)/2, (\alpha_\perp + \alpha_\parallel)/2.$$

С их помощью должен быть вычислен симметричный тензор $\alpha_{ik} - (1/3)\alpha_{ll}\delta_{ik}$ с равным нулю следом, после чего вычисление, аналогичное выводу формул (1) и (2), дает

$$h_{\text{фон}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}\frac{(\alpha_\perp - \alpha_\parallel)^2}{6}. \tag{3}$$

Наконец, интенсивность вращательного комбинационного рассеяния получится вычитанием (2) и (3) из (1):

$$h_{\text{комб}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}\frac{(\alpha_\perp - \alpha_\parallel)^2}{2}.$$

§ 121. Критическая опалесценция

Как известно, изотермическая сжимаемость вещества $(\partial\rho/\partial P)_T$ неограниченно возрастает при приближении к критической точке. Вместе с ней возрастает и выражение (120.2) для полной интенсивности рэлеевского рассеяния. Это свидетельствует о резком усилении рассеяния вблизи критической точки (*критическая опалесценция*)[1]. Однако сама формула

---

[1]) Идея о связи этого явления с возрастанием флуктуаций плотности была высказана *Смолуховским* (*M. Smoluchowsky*, 1908). В рамках ван-дер-ваальсовой теории критической точки (см. V, § 152) оно было рассмотрено *Орнштейном* и *Цернике* (*L.S. Ornstein*, *F. Zernicke*, 1914).

(120.2) становится, вообще говоря, неприменимой. Дело в том, что вблизи критической точки одновременная корреляция между флуктуациями плотности (а с нею и диэлектрической проницаемости) в разных точках пространства простирается на расстояния порядка величины корреляционного радиуса r_c, неограниченно возрастающего при приближении к критической точке (см. V, § 152, 153). Поэтому здесь нельзя, вообще говоря, заменять множитель $e^{-i\mathbf{qr}}$ в (119.9) единицей даже при вычислении полной интенсивности рассеяния (а не только его спектральной тонкой структуры).

Такая замена во всей области углов рассеяния допустима лишь при условии

$$kr_c \ll 1, \tag{121.1}$$

где $k = n\omega/c$ — волновой вектор рассеиваемого света. В таком случае можно по-прежнему воспользоваться формулой (120.2) для полного коэффициента экстинкции, причем достаточно оставить в ней только возрастающий первый член (возрастают только флуктуации плотности, но не температуры). При приближении к критической точке по любому направлению в плоскости ρ, T, за исключением критической изотермы $T = T_c$, сжимаемость возрастает по закону [1])

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T \propto |T - T_c|^{-\gamma}, \quad \gamma \approx 1{,}26.$$

Поскольку нет никаких причин для обращения в нуль или в бесконечность производной $(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T$, то по такому же закону будет меняться и интенсивность рассеяния:

$$h \propto |T - T_c|^{-\gamma}. \tag{121.2}$$

Это возрастание связано с увеличением интенсивности не всех компонент тонкой структуры рэлеевской линии, а лишь ее центральной компоненты. Действительно, согласно (120.8) $h_{\text{дубл}} = hc_v/c_p$. Множитель c_p в знаменателе компенсирует множитель $(\partial\rho/\partial P)_T$ в h, поскольку оба возрастают по одинаковому закону. Поэтому интенсивность дублета возрастает лишь как c_v, т. е. по гораздо более медленному закону [2]):

$$h_{\text{дубл}} \propto |T - T_c|^{-\alpha}, \quad \alpha \approx 0{,}1. \tag{121.3}$$

---

[1]) Все используемые в этом параграфе сведения о характере изменения термодинамических величин в окрестности критической точки можно найти в V, § 153. Используются те же, что и там, обозначения для критических индексов.

[2]) Все эти рассуждения подразумевают, конечно, что неравенство (121.1) совместимо с предположением, что вещество находится уже во «флуктуационной области» окрестности критической точки.

В достаточной близости к критической точке неравенство (121.1) при заданном k заведомо нарушится и замена множителя $e^{-i\mathbf{qr}}$ единицей станет недопустимой, — тем позже, чем меньше угол рассеяния [1]). Пусть dh — дифференциальный коэффициент экстинкции для рассеяния в элемент телесного угла do', т. е. для заданного значения $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$. Ограничимся, для определенности, рассеянием естественного света. Учитывая, что угловая зависимость, связанная с поляризационным состоянием света, при рассеянии на скалярных флуктуациях дается множителем I (117.26), имеем

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4}(\delta\varepsilon^2)_{\mathbf{q}} \cdot \frac{3}{4}(1 + \cos^2\vartheta)\frac{do'}{4\pi}, \qquad (121.4)$$

причем

$$(\delta\varepsilon^2)_{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 (\delta\rho^2)_{\mathbf{q}}.$$

В непосредственной близости к критической точке, где

$$kr_c \gg 1, \qquad (121.5)$$

при не слишком малых углах рассеяния будет и $qr_c \gg 1$. В этой области углов в интеграле $(\delta\rho^2)$ существенны расстояния $r \sim 1/q \gg r_c$, где корреляционная функция флуктуаций плотности имеет степенной характер [2]):

$$\langle \delta\rho^{(1)}\delta\rho^{(2)} \rangle \propto r^{-(1+\zeta)}, \quad \zeta \approx 0{,}04.$$

При этом фурье-компонента корреляционной функции

$$(\delta\rho^2)_{\mathbf{q}} \propto q^{-2+\zeta} \qquad (121.6)$$

с не зависящим от температуры коэффициентом. Таким образом, мы приходим к следующей угловой и частотной зависимости коэффициента экстинкции в рассматриваемой области:

$$dh \propto \omega^{2-\zeta} \frac{1 + \cos^2\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)^{1-\zeta/2}}\, do'. \qquad (121.7)$$

Мы видим, что при фиксированном угле рассеяния в области $qr_c \gg 1$ возрастание интенсивности по мере приближения к критической точке прекращается. В самой этой точке формула (121.7) справедлива для всех углов.

---

[1]) Отметим, однако, что рассеяние как таковое имеет смысл рассматривать лишь до углов порядка величины угла дифракции $\sim \lambda/L$, где L — линейные размеры тела.

[2]) См. V, (148.7). В силу формальной эквивалентности задач о критической точке и о фазовых переходах второго рода (с одномерным параметром порядка) эта формула относится и к окрестности критической точки.

§ 122. Рассеяние в жидких кристаллах

Интенсивное рассеяние света, в ряде отношений напоминающее критическую опалесценцию, происходит в жидких кристаллах. Мы ограничимся здесь рассмотрением этого явления в жидких кристаллах нематического типа (*P.G. de Gennes*, 1968).

Такие кристаллы уже упоминались в конце § 17 и там же было написано выражение их тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0(\omega)\delta_{ik} + \varepsilon_a(\omega)d_i d_k; \tag{122.1}$$

коэффициенты ε_0 и ε_a теперь — функции частоты.

Флуктуации проницаемости связаны, в первую очередь, с флуктуациями направления директора $\mathbf{d}$ и являются, таким образом, флуктуациями анизотропии. Одновременный одинаковый поворот направления директора во всем объеме вообще не меняет энергии тела; поэтому длинноволновые флуктуации связаны лишь с малыми энергетическими затратами и потому велики. В свою очередь, большие флуктуации проницаемости приводят к сильному рассеянию света.

Представим флуктуирующую величину $\mathbf{d}$ в виде

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \boldsymbol{\nu}, \tag{122.2}$$

где $\mathbf{d}_0$ — ее постоянное среднее значение, а $\boldsymbol{\nu}$ — малое изменение при флуктуации; поскольку $\mathbf{d}^2 = \mathbf{d}_0^2 = 1$, то ввиду малости $\boldsymbol{\nu}$:

$$\boldsymbol{\nu}\mathbf{d}_0 = 0. \tag{122.3}$$

Изменение диэлектрической проницаемости при флуктуации выражается через $\boldsymbol{\nu}$ согласно

$$\delta\varepsilon_{ik} = \varepsilon_a(d_{0i}\nu_k + d_{0k}\nu_i). \tag{122.4}$$

Влиянием же на $\delta\varepsilon_{ik}$ флуктуаций плотности и температуры можно пренебречь.

С учетом (122.4) выражаем одновременную корреляционную функцию флуктуаций проницаемости через корреляционную функцию флуктуаций директора:

$$(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}} = \varepsilon_a^2\{d_{0i}d_{0k}(\nu_l\nu_m)_{\mathbf{q}} + d_{0i}d_{0m}(\nu_k\nu_l)_{\mathbf{q}} + \\ + d_{0k}d_{0l}(\nu_i\nu_m)_{\mathbf{q}} + d_{0i}d_{0m}(\nu_i\nu_k)_{\mathbf{q}}\}. \tag{122.5}$$

Функция же $(\nu_i\nu_k)_{\mathbf{q}}$ была найдена в V, § 141. В силу (122.3) этот тензор имеет отличные от нуля компоненты только в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{d}_0$. Обозначив тензорные индексы в этой

плоскости буквами α, β, имеем

$$(\nu_\alpha \nu_\beta)_{\mathbf{q}} = a\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q_\perp^2}\right) + b\frac{q_\alpha q_\beta}{q_\perp^2},$$
$$a = \frac{T}{a_2 q_\perp^2 + a_3 q_\parallel^2}, \quad b = \frac{T}{a_1 q_\perp^2 + a_3 q_\parallel^2}, \tag{122.6}$$

где a_1, a_2, a_3 — положительные модули, определяющие зависимость свободной энергии нематического кристалла от производных директора; $q_\parallel$ и $q_\perp$ — проекции $\mathbf{q}$ на направление $\mathbf{d}_0$ и на перпендикулярную к нему плоскость.

Если считать, что анизотропия диэлектрической проницаемости относительно мала, т. е. $|\varepsilon_a| \ll \varepsilon_0$, то можно воспользоваться для дифференциального по направлениям коэффициента экстинкции формулой (119.9), полученной для изотропных сред (при этом нельзя, конечно, полагать $\mathbf{q} = 0$!). Мы не станем выписывать получающейся таким образом громоздкой формулы для углового распределения и поляризационных зависимостей.

Характерным свойством рассматриваемого рассеяния является возрастание его интенсивности при малых углах рассеяния по закону

$$dh \backsim \frac{do'}{q^2}. \tag{122.7}$$

Такое сильное возрастание (как и возрастание по формуле (121.7) в критической точке) связано с медленным — степенным — убыванием корреляционной функции флуктуаций с увеличением расстояния. Интеграл по углам логарифмически расходится на нижнем пределе. Он должен быть обрезан на значениях $q \sim 1/L$, отвечающих дифракции на теле в целом (ср. примеч. на стр. 619), и, таким образом, полная интенсивность рассеяния логарифмически зависит от размеров тела L.

Наконец, отметим, что внешнее магнитное поле ограничивает возрастание корреляционной функции $(\nu_i \nu_k)_{\mathbf{q}}$ при малых $\mathbf{q}$ (см. V, § 141) и тем самым подавляет рассеяние — «просветляет» жидкий кристалл.

§ 123. Рассеяние в аморфных твердых телах

Рэлеевское рассеяние в аморфных твердых телах[1]) существенно отличается от рассеяния в жидкостях и газах. В изотропном твердом теле имеются, как известно, не одна, а две скорости распространения звука — продольная u_l и поперечная u_t. В связи с этим тонкая структура рэлеевской линии содержит не

[1]) Значительно более громоздкая теория рассеяния в твердых кристаллах в этой книге не излагается.

один дублет Мандельштама–Бриллюэна, а два. Они связаны с рассеянием на поперечных и на продольных «звуковых волнах» и отстоят от центра линии соответственно на

$$\Omega_i = \pm u_l q \text{ и } \Omega_t = \pm u_t q.$$

Поскольку всегда $u_l > u_t$, то $|\Omega_l| > |\Omega_t|$. Центральная же компонента линии снова связана с рассеянием на тех флуктуациях, которые не распространяются относительно среды. Среди этих флуктуаций основную роль играют в данном случае флуктуации структуры. В аморфном теле, с его беспорядочным расположением атомов, эти флуктуации сравнительно велики и практически не меняются со временем (ввиду чрезвычайной медленности диффузионных процессов в твердом теле). Рассеяние на них приводит к возникновению интенсивной линии с практически равной нулю шириной. По своей поляризации и угловому распределению это рассеяние представляет собой совокупность скалярного и симметричного типов.

Обратимся к дублетным компонентам рэлеевской линии в аморфных твердых телах. В твердом теле влияние всякой (в данном случае флуктуационной) деформации распространяется на значительные расстояния. Поэтому даже одновременные флуктуации в различных точках тела коррелированы на больших (по сравнению с $1/q$) расстояниях. Таким образом, мы снова имеем дело с ситуацией, когда даже при вычислении полной интенсивности (и поляризации) рассеянного света нельзя положить $\mathbf{q} = 0$ в корреляционной функции флуктуаций.

Поле рассеянной световой волны дается формулой

$$\mathbf{E}' = -\frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0 c^2} E_0[\mathbf{n}'[\mathbf{n}'\mathbf{G}]], \tag{123.1}$$

где

$$G_i = \int \delta\varepsilon_{ik} e^{-i\mathbf{qr}}\, dV \cdot e_k, \tag{123.2}$$

а $\mathbf{n}'$ — единичный вектор в направлении рассеяния. Изменение диэлектрической проницаемости при деформации изотропного тела дается формулой

$$\delta\varepsilon_{ik} = a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll}\delta_{ik}, \tag{123.3}$$

где u_{ik} — тензор деформации (см. (102.1)). Поскольку интеграл (123.2) выделяет из $\delta\varepsilon_{ik}$ пространственную компоненту Фурье с волновым вектором $\mathbf{q}$, то и в (123.3) надо понимать под u_{ik} деформацию в звуковой волне с этим волновым вектором. Поэтому запишем вектор смещения при деформации в виде

$$\mathbf{u} = \mathrm{Re}\{\mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{qr}}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{qr}} + \mathbf{u}_0^* e^{-i\mathbf{qr}}), \tag{123.4}$$

откуда тензор деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}(u_{0i}q_k + u_{0k}q_i)e^{i\mathbf{qr}}\right\},$$

а интеграл по объему

$$\int u_{ik}e^{-i\mathbf{qr}}\,dV = \frac{iV}{4}(u_{0i}q_k + u_{0k}q_i). \tag{123.5}$$

Рассмотрим сначала рассеяние на поперечных звуковых волнах. Поскольку в поперечной волне $\mathbf{u} \perp \mathbf{q}$ и $u_{ll} = 0$, то

$$\delta\varepsilon_{ik} = a_1 u_{ik}.$$

Используя (123.5), находим поэтому

$$\mathbf{G} = \frac{iVa_1}{4}\{\mathbf{u}_0(\mathbf{qe}) + \mathbf{q}(\mathbf{u}_0\mathbf{e})\}. \tag{123.6}$$

Поперечная звуковая волна может иметь два независимых направления поляризации: вектор $\mathbf{u}$ может лежать в плоскости $\mathbf{kk}'$ или перпендикулярно к ней. Учитывая также, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, легко видеть, что в первом случае проекция $\mathbf{G}$ на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{k}'$, равна нулю. Таким образом, поперечные звуковые волны, поляризованные в плоскости $\mathbf{kk}'$, вообще не рассеивают свет.

Если же вектор смещения $\mathbf{u}$ перпендикулярен к плоскости $\mathbf{kk}'$, то простое вычисление с помощью (123.1) и (123.6) дает для поля рассеянной волны следующие выражения:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= e^{ikR_0}\frac{\omega^2 E_0}{4\pi R_0 c^2}\frac{a_1 iV}{4}qu_0\cos\frac{\vartheta}{2}e_{\perp}, \\ E'_{\perp} &= e^{ikR_0}\frac{\omega^2 E_0}{4\pi R_0 c^2}\frac{a_1 iV}{4}qu_0\cos\frac{\vartheta}{2}e_{\parallel} \end{aligned} \tag{123.7}$$

(ϑ, как везде, — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, а индексы $\parallel$ и $\perp$ обозначают составляющие векторов в плоскости рассеяния и перпендикулярно к ней). Коэффициенты пропорциональности в обеих этих формулах содержат одну и ту же флуктуирующую величину u_0. Это значит, что при рассеянии не происходит деполяризации — линейно поляризованный свет остается линейно поляризованным (хотя и в другой плоскости).

Ввиду полного совпадения коэффициентов в формулах (123.7) коэффициент экстинкции dh не зависит от состояния поляризации падающего света и равен

$$dh = \left(\frac{q\omega^2 a_1}{16\pi c^2}\right)^2 V|u_0|^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}\,do. \tag{123.8}$$

Остается определить средний квадрат амплитуды флуктуационного смещения u_0.

С точки зрения общей теории термодинамических флуктуаций, звуковую волну (123.4) можно рассматривать как совокупность двух (вóлны, распространяющиеся вправо и влево) классических осцилляторов, каждый из которых должен обладать средней кинетической энергией $T/2$. Поскольку частота колебаний в данном случае есть $\Omega = u_t q$, то средняя кинетическая энергия

$$\frac{1}{2}V\langle\rho\dot{\mathbf{u}}^2\rangle = \frac{1}{4}V\rho(u_t q)^2\langle|u_0|^2\rangle.$$

Приравняв это выражение $2\cdot T/2$, получим

$$\langle|u_0|^2\rangle = \frac{4T}{V\rho u_t^2 q^2}. \tag{123.9}$$

Наконец, подставив (123.9) в (123.8), получим окончательно:

$$dh = \frac{a_1^2\omega^4 T}{64\pi^2 c^4 u_t^2\rho}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\,do. \tag{123.10}$$

Обратим внимание на своеобразную угловую зависимость рассеяния, совершенно отличную от той, которую мы имели в жидкостях и газах.

Перейдем к рассеянию на продольных звуковых волнах. В этих волнах $\mathbf{u} \parallel \mathbf{q}$, и с помощью (123.3) и (123.4) находим

$$\mathbf{G} = \frac{iV}{2}u_0 q\left\{a_1\frac{\mathbf{q}(\mathbf{qe})}{q^2} + a_2\mathbf{e}\right\}E_0.$$

Простое вычисление дает для поля рассеянной волны:

$$\begin{gathered} E_\perp = \frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0 c^2}\frac{iVu_0q}{2}a_2E_0e_\perp, \\ E_\parallel = \frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0 c^2}\frac{iVu_0q}{2}\left[\frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} + a_2\right)\cos\vartheta\right]E_0e_\parallel. \end{gathered} \tag{123.11}$$

И в этом случае при рассеянии нет деполяризации. Но угловое распределение и величина коэффициента экстинкции зависят от состояния и направления поляризации падающего света. Мы не станем выписывать здесь соответствующих, довольно громоздких формул; вычисления аналогичны произведенным выше, причем выражение для $\langle|u_0|^2\rangle$ отличается лишь заменой u_t на u_l в (123.9).

ГЛАВА XVI

ДИФРАКЦИЯ РЕНТГЕНОВЫХ ЛУЧЕЙ В КРИСТАЛЛАХ

§ 124. Общая теория дифракции рентгеновых лучей

Явление дифракции рентгеновых лучей в кристаллах занимает особое место в электродинамике материальных сред, так как их длина волны сравнима с междуатомными расстояниями. По этой причине обычный макроскопический подход к веществу как сплошной среде здесь совершенно неприменим, и мы должны исходить из рассмотрения рассеяния на отдельных заряженных частицах (электронах) [1]).

Частоты движения электронов в атоме порядка величины $\omega_0 \sim v/a$, где v — их скорость, а a — атомные размеры. Если $\lambda \sim a$, то ввиду $v \ll c$ эти частоты малы по сравнению с частотой рентгеновых лучей $\omega \sim c/\lambda$. Это обстоятельство позволяет написать уравнение движения электрона в поле электромагнитной волны в виде

$$m\dot{\mathbf{v}}' = e\mathbf{E}, \tag{124.1}$$

т. е. рассматривать электроны как свободные (см. § 78).

Из уравнения (124.1) находим для скорости, приобретаемой электроном под влиянием поля волны:

$$\mathbf{v}' = \frac{ie\mathbf{E}}{m\omega}.$$

Обозначим через $n(\mathbf{r})$ плотность числа электронов в кристалле, усредненную по квантовомеханическому электронному состоянию и по статистическому распределению теплового движения ядер в решетке. Подчеркнем, однако, что здесь не производится обычного в макроскопической теории усреднения по физически бесконечно малым элементам объема, т. е. $n(\mathbf{r})$ есть истинная квантовомеханическая электронная плотность в кристаллической решетке. Соответствующая плотность тока, создаваемого полем волны, есть

$$\mathbf{j}' = en\mathbf{v}' = \frac{ie^2 n}{m\omega}\mathbf{E}. \tag{124.2}$$

[1]) Рассеяние на ядрах ввиду большой массы последних, разумеется, несущественно.

Введем этот ток в микроскопические уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}, \tag{124.3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}' = -\frac{i\omega}{c}\left(1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\right)\mathbf{E}. \tag{124.4}$$

Тем самым мы учтем его обратное влияние на поле, т. е. эффект рассеяния. При этом, разумеется, предполагается, что этот эффект мал, т. е. что справедливо неравенство

$$\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2} \ll 1. \tag{124.5}$$

Путем введения обозначения $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, где

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}, \tag{124.6}$$

соответствующего обычному определению индукции, уравнение (124.4) приводится к обычному виду $\operatorname{rot}\mathbf{H} = -(i\omega/c)\mathbf{D}$. В этом смысле выражение (124.6) для диэлектрической проницаемости (ср. (78.1)) может применяться и при длинах волн $\lambda \sim a$. При этом, разумеется, следует помнить, что буквальный смысл фигурирующих здесь величин $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ не совпадает с прежним, поскольку они относятся к полю, не усредненному по физически бесконечно малым объемам. Соответственно, ε является теперь функцией координат.

При рассеянии рентгеновых лучей на тяжелых атомах может иметь место случай, когда условие $\omega \gg \omega_0$ выполняется для внешних электронных оболочек и в то же время не выполняется для внутренних электронов, для которых $\omega \lesssim \omega_0$ и соответственно справедливо неравенство $\lambda \gg a$. В таком случае тоже может быть введено понятие о диэлектрической проницаемости (как коэффициенте пропорциональности между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$), но формулой вида (124.6) определяется при этом лишь вклад в нее со стороны внешних электронов. Вклад же внутренних электронов должен, в принципе, вычисляться путем усреднения по объему этих оболочек. Таким образом, если писать в общем виде $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ с зависящей от координат ε, мы автоматически учтем все возможные случаи. Для определенности мы будем пользоваться ниже везде выражением (124.6).

Произведя в (124.2) усреднение электронной плотности и получив в результате не зависящую от времени функцию $n(\mathbf{r})$, мы тем самым исключаем возможное изменение частоты при рассеянии. Другими словами, мы рассматриваем строго когерентное рассеяние без изменения частоты.

Исключив $\mathbf{H}$ из двух уравнений (124.3) и (121.4), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D}.$$

Подставим сюда

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} + \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\mathbf{E}$$

и раскроем выражение $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}$, учитывая, что $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ (как это следует из (124.4)). Тогда получим

$$\Delta\mathbf{D} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\mathbf{E}. \qquad (124.7)$$

В правой части этого уравнения, уже содержащей малую величину $4\pi e^2 n/(m\omega^2)$, следует понимать под $\mathbf{E}$ заданное поле падающей волны. Найдем решение уравнения (124.7) в пространстве вне рассеивающего кристалла на больших расстояниях от него. Поскольку это уравнение совпадает по форме с уравнением (117.3), то мы можем сразу написать искомое решение по аналогии с (117.4) [1]):

$$\mathbf{E} = \frac{e^2}{m\omega^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}[\mathbf{k}'[\mathbf{k}'\mathbf{E}_0]]\int ne^{-i\mathbf{qr}}\,dV. \qquad (124.8)$$

Здесь R_0 — расстояние от начала координат, расположенного внутри кристалла, до точки наблюдения поля; $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$; $k = k' = \omega/c$; $\mathbf{E}_0$ — амплитуда падающей волны; в левой части равенства мы пишем $\mathbf{E}$ вместо $\mathbf{D}$, так как в пустоте вне тела $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

Для характеристики интенсивности дифракции рентгеновых лучей введем *эффективное сечение* (или просто *сечение*) σ, определяемое как отношение интенсивности излучения, дифрагировавшего в телесный угол do', к плотности потока энергии в падающей волне. Согласно (124.8) имеем

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \left|\int ne^{-i\mathbf{qr}}\,dV\right|^2 do', \qquad (124.9)$$

где θ — угол между $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{k}'$. Если падающие лучи «естественны» (а не поляризованы), то множитель $\sin^2\theta$ в этой формуле заменяется на $(1/2)(1+\cos^2\vartheta)$, где ϑ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ (см.

---

[1]) В § 117 при решении уравнения (117.3) нельзя было рассматривать поле вне тела, так как это потребовало бы учета граничных условий на его поверхности, поскольку левая часть уравнения содержала величину ε', различную внутри и вне тела. Левая же часть уравнения (124.7) не меняет своего вида во всем пространстве.

примеч. на стр. 597):

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta)\left|\int ne^{-i\mathbf{qr}}\,dV\right|^2 do'. \tag{124.10}$$

Ниже мы будем, для определенности, предполагать везде именно этот случай.

Мы видим, что интенсивность лучей, дифрагировавших в заданном направлении, в основном определяется квадратом модуля интеграла

$$\int ne^{-i\mathbf{qr}}\,dV, \tag{124.11}$$

т. е. пространственной компоненты Фурье электронной плотности. При $\mathbf{q} \to 0$ этот интеграл сводится просто к усредненной по объему кристалла (т. е. по его элементарной ячейке) электронной плотности $\overline{n}$. Но если в уравнениях (124.3), (124.4) заменить n на $\overline{n}$, то мы получим обычные макроскопические уравнения Максвелла с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2\overline{n}}{m\omega^2}.$$

Согласно этим уравнениям при прохождении рентгеновых лучей через кристалл произойдет их преломление по обычным законам (с показателем преломления $\sqrt{\varepsilon}$). Таким образом, дифракция на малые углы сводится к не интересующему нас здесь обычному преломлению. Ниже мы будем везде подразумевать, что $\mathbf{q}$ заметно отлично от нуля.

Электронная плотность (как и всякая другая функция точки в кристаллической решетке) может быть разложена в ряд Фурье вида

$$n = \sum_{\mathbf{b}} n_{\mathbf{b}} e^{i\mathbf{br}}, \tag{124.12}$$

где суммирование производится по всем периодам $\mathbf{b}$ обратной решетки (см. V, § 133). При подстановке (124.12) в (124.11) и интегрировании по объему кристалла заметно отличный от нуля результат получается лишь при значениях $\mathbf{q}$, близких к какому-либо из $\mathbf{b}$. В промежутках же между этими значениями интенсивность практически равна нулю. В связи с этим можно рассматривать каждый из дифракционных максимумов отдельно, полагая при этом $n = n_{\mathbf{b}} e^{i\mathbf{br}}$ с заданным значением $\mathbf{b}$. Подставив это выражение в (124.10), получим

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2\left|\int e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{b})\mathbf{r}}\,dV\right|^2 do'. \tag{124.13}$$

Наиболее интенсивные максимумы возникают в направлениях, в которых выполняется точное равенство

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{b} \tag{124.14}$$

(*уравнение Лауэ*); эти максимумы называют *главными*. При заданном $\mathbf{b}$ главный максимум может, однако, осуществляться отнюдь не при произвольном направлении (и частоте) падающих лучей. Написав равенство (124.14) в виде $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{b}$, возведя его в квадрат и учитывая, что $k^2 = k'^2$, получим

$$2\mathbf{bk} = -b^2. \tag{124.15}$$

Этим уравнением определяются те значения волнового вектора $\mathbf{k}$, для которых возможны главные максимумы с заданным значением $\mathbf{b}$. Геометрически (124.15) есть уравнение плоскости в $\mathbf{k}$-пространстве, перпендикулярной к вектору $\mathbf{b}$ и расположенной на расстоянии $b/2$ от начала координат. Мы видим, в частности, что непременно должно быть $k \geqslant b/2$.

Поскольку $|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| = 2k \sin \frac{\vartheta}{2}$, то из (124.14) следует, что

$$2k \sin \frac{\vartheta}{2} = b, \tag{124.16}$$

чем определяется угол дифракции в главном максимуме (*уравнение Брэгга–Вульфа*).

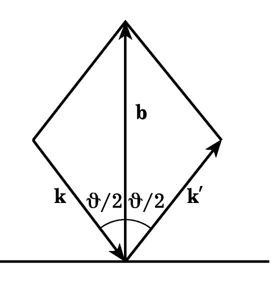


Рис. 64

Как известно, каждый вектор $\mathbf{b}$ обратной решетки определяет семейство кристаллических плоскостей по уравнениям $\mathbf{rb} = 2\pi m$, где число m пробегает целые значения. Эти плоскости перпендикулярны к направлению вектора $\mathbf{b}$, и по отношению к ним векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ (отвечающие условию (124.14)) направлены под одинаковыми углами «падения» и «отражения» (рис. 64). В связи с этим о дифракции в главном максимуме иногда говорят как об отражении от соответствующих кристаллических плоскостей.

Полная интенсивность *бифуркационного пятна* вблизи какого-либо максимума получается интегрированием (124.13) по телесным углам вблизи соответствующего направления $\mathbf{k}'$. Определим полную интенсивность вблизи главного максимума.

Обозначим через $\mathbf{k}'_0$ значение $\mathbf{k}'$, соответствующее точному выполнению условия Лауэ (при заданном $\mathbf{k}$): $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k} + \mathbf{b}$. Введем также $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}'_0$. В области вблизи максимума $\boldsymbol{\varkappa}$ мало, а поскольку $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}'_0$ различаются только направлением, то $\boldsymbol{\varkappa} \perp \mathbf{k}'_0$.

Поэтому элемент телесного угла можно написать в виде

$$do' = \frac{1}{k'^2}\,d\varkappa_x\,d\varkappa_y = \frac{1}{k^2}\,d\varkappa_x\,d\varkappa_y, \tag{124.17}$$

где ось z выбрана в направлении $\mathbf{k}_0$. Таким образом, имеем

$$\sigma = \frac{1}{2k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2\iint d\varkappa_x\,d\varkappa_y\left|\int e^{-i\varkappa\mathbf{r}}\,dV\right|^2.$$

В объемном интеграле можно произвести интегрирование по dz, поскольку $e^{-i\varkappa\mathbf{r}}$ от этой координаты не зависит:

$$\int e^{-i\varkappa\mathbf{r}}\,dV = \int Ze^{-i\varkappa\mathbf{r}}\,df,$$

где $df = dx\,dy$, а $Z = Z(x,y)$ — длина тела в направлении $\mathbf{k}'_0$. Наконец, воспользуемся известной формулой теории интегралов Фурье:

$$\int |\varphi_\varkappa|^2\frac{d\varkappa_x\,d\varkappa_y}{(2\pi)^2} = \int \varphi^2\,dx\,dy, \tag{124.18}$$

где

$$\varphi_\varkappa = \int \varphi(x,y)e^{-i\varkappa\mathbf{r}}\,dx\,dy$$

— компоненты двумерного разложения Фурье. В результате получим следующую окончательную формулу:

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2\int Z^2\,df =$$
$$= \frac{8\pi^2}{b^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cdot(1+\cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2\int Z^2\,df. \tag{124.19}$$

Стоящий здесь интеграл — порядка величины L^4, где L — линейные размеры тела. Таким образом, полное сечение дифракции (или, что то же, полная интенсивность пятна) пропорционально $V^{4/3}$, где V — объем тела. Отметим, что интенсивность в самом максимуме пропорциональна другой степени объема: при $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{b}$ интеграл в (124.13) есть просто V, так что $d\sigma$ пропорционально V^2:

$$\left(\frac{d\sigma}{do'}\right)_{\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2V^2. \tag{124.20}$$

Тот факт, что интенсивность в максимуме пропорциональна более высокой степени V, чем полная интенсивность, наглядно иллюстрирует резкость максимума. Ширина последнего пропорциональна, очевидно, $V^{4/3}/V^2 = V^{-2/3}$.

Развиваемая здесь теория применима лишь при условии, что весь эффект дифракции мал. Это требование налагает, как мы теперь видим, определенное условие на размеры кристалла. Именно, σ должно быть мало по сравнению с геометрической площадью сечения тела ($\sim L^2$), откуда

$$\frac{e^2}{mc^2}\frac{L}{k}|n_{\mathbf{b}}| \ll 1. \qquad (124.21)$$

Если это условие нарушается, то становится неприменимым использованное при выводе (124.8) приближение теории возмущений [1]).

З а д а ч и

1. Определить распределение интенсивности в дифракционном пятне вокруг главного максимума при дифракции на кристалле, имеющем форму прямого параллелепипеда с длинами сторон L_x, L_y, L_z.

Р е ш е н и е. Вводим, как и в тексте, вектор $\varkappa = \mathbf{k}' - \mathbf{k}'_0$, а систему координат выбираем с осями, параллельными ребрам параллелепипеда, и началом в его центре.

Интеграл $\int e^{-i\varkappa\mathbf{r}}\, dV$ разбивается на произведение трех интегралов вида

$$\int\limits_{-L/2}^{L/2} e^{-i\varkappa x}\, dx = \frac{2}{\varkappa}\sin\frac{\varkappa L}{2}.$$

Таким образом,

$$d\sigma = 32\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta)\frac{|n_{\mathbf{b}}|^2}{\varkappa_x^2\varkappa_y^2\varkappa_z^2}\sin^2\frac{\varkappa_x L_x}{2}\sin^2\frac{\varkappa_y L_y}{2}\sin^2\frac{\varkappa_z L_z}{2}\, do'.$$

Следует помнить, что компоненты вектора $\varkappa$ не независимы, а связаны условием $\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{k}'_0 = 0$.

2. То же при дифракции на шарообразном кристалле радиуса a.

Р е ш е н и е. Снова вводим $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}'_0$, а систему координат выбираем с осью z вдоль направления $\boldsymbol{\varkappa}$ (и с началом в центре шара). Имеем

$$\int e^{-i\varkappa z}\, dV = \int\limits_{-a}^{a} \pi(a^2 - z^2)e^{-i\varkappa z}\, dz = \frac{4\pi}{\varkappa^3}(\sin\varkappa a - \varkappa a\cos\varkappa a).$$

Таким образом,

$$d\sigma = 8\pi^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2\frac{1}{\varkappa^6}(\sin\varkappa a - \varkappa a\cos\varkappa a)^2\, do'.$$

3. Определить полную интенсивность дифракционного пятна вокруг побочного максимума.

---

[1]) Изложение свободной от ограничения (124.21) *динамической теории* рассеяния можно найти в книге: *Пинскер З.Г.* Динамическая теория рассеяния рентгеновских лучей в кристаллах. — М.: Наука, 1974. Изложенную же выше теорию называют *кинематической*.

Р е ш е н и е. В данном случае волновой вектор $\mathbf{k}$ падающей волны не удовлетворяет условию (124.15). Как было указано в тексте, (124.15) есть уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{b}$; обозначим малое смещение конца вектора $\mathbf{k}$ от этой плоскости через $\eta\mathbf{b}$, где $\eta \ll 1$. Другими словами, представим $\mathbf{k}$ в виде $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \eta\mathbf{b}$, где $\mathbf{k}_0$ удовлетворяет уравнению (124.15) (рис. 65).

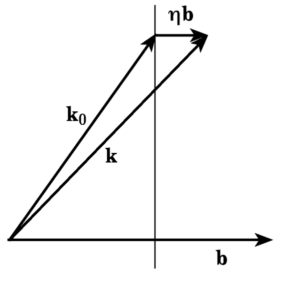


Рис. 65

Максимуму интенсивности в пятне соответствует такое направление $\mathbf{k}'$, при котором разность $\mathbf{k}' - (\mathbf{k} + \mathbf{b})$ имеет минимальное значение (так что интеграл в (124.13) максимален). Но абсолютная величина разности двух векторов (из которых один имеет произвольное направление) достигает наименьшего значения, когда направления этих векторов совпадают. Поэтому имеем (учитывая, что $k' = k$)

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}|_{\min} = k - |\mathbf{k} + \mathbf{b}| = \frac{k^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{b})^2}{k + |\mathbf{k} + \mathbf{b}|}.$$

Поскольку $\mathbf{k}$ близко к $\mathbf{k}_0$ и мы рассматриваем область вблизи максимума, то $\mathbf{k}' \approx \mathbf{k} + \mathbf{b}$ и знаменатель написанного выражения можно заменить на $2k$. В числителе же раскрываем скобки и получаем

$$-2\mathbf{kb} - \mathbf{b}^2 = (-2\mathbf{k}_0\mathbf{b} - \mathbf{b}^2) - 2\eta\mathbf{b}^2 = -2\eta b^2.$$

Таким образом,

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}|_{\min} \approx -\frac{\eta b^2}{\mathbf{k}}.$$

Далее, вводим $\varkappa$ согласно

$$\mathbf{k}' = (\mathbf{k} + \mathbf{b})\left(1 - \frac{\eta b^2}{k^2}\right) + \boldsymbol{\varkappa}$$

и, выбрав ось z вдоль направления $\mathbf{k} + \mathbf{b}$, сводим задачу к вычислению интеграла (ср. вывод формулы (124.19))

$$\int d\varkappa_x\, d\varkappa_y \left|\int \exp\left(i\frac{\eta b^2}{k}z - i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}\right) dV\right|^2 = \\ = \int d\varkappa_x\, d\varkappa_y \left|\int e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}} \frac{\sin(\eta b^2 Z/2k)}{\eta b^2/2k}\, df\right|^2.$$

Наконец, воспользовавшись формулой (124.18), получим окончательно:

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2 \int \frac{\sin^2(\eta b^2 Z/2k)}{(\eta b^2/2k)^2}\, df.$$

При $\eta \to 0$ эта формула переходит в (124.19). Если же $\eta b^2 Z/2k \gg 1$ (что не противоречит условию $\eta \ll 1$), то квадрат синуса заменяется его средним значением $1/2$ и получается

$$\sigma = 4\pi^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2\vartheta}{\eta^2 b^4}|n_{\mathbf{b}}|^2 S,$$

где S — площадь проекции («тени») тела на плоскость xy.

§ 125. Интегральная интенсивность

Формулы, полученные в предыдущем параграфе, определяют интенсивность дифракции при падении на кристалл строго монохроматической и строго плоской волны. Рассмотрим теперь ряд случаев, в которых эти условия не выполнены.

Начнем со случая, когда падающая волна является плоской, но не монохроматической [1]. Другими словами, ее спектральное разложение содержит волны с волновыми векторами $\mathbf{k}$, одинаковыми по направлениям, но различными по величине $k = \omega/c$. Обозначим через $\rho(k)$ плотность распределения интенсивности падающего излучения по частотам, нормированную на единицу условием $\int \rho(k)\,dk = 1$.

Полная интенсивность дифракционного пятна определяется сечением, получающимся интегрированием выражения (124.13) по do' и по $\rho(k)\,dk$:

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2 \iint \left|\int e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{b})\mathbf{r}}\,dV\right|^2 (1+\cos^2\vartheta)\rho(k)\,do'\,dk. \tag{125.1}$$

Введем временно обозначение $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}$ и напишем квадрат модуля в виде двойного интеграла:

$$\left|\int e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}}\,dV\right|^2 = \iint e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}\,dV_1\,dV_2.$$

Введя вместо $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ переменные $(1/2)(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и произведя интегрирование по первым по объему тела, получим

$$\left|\int e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}\,dV\right|^2 = V\int e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}\,dV.$$

В оставшемся интеграле можно теперь производить интегрирование по всем переменным в бесконечных пределах [2], в результате чего находим

$$\left|\int e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}\,dV\right|^2 = (2\pi)^3 V\delta(\mathbf{K}). \tag{125.2}$$

Подставив этот результат в формулу (125.1), переписываем последнюю в виде

$$\sigma = 4\pi^3\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2 V(1+\cos^2\vartheta_0)\iint \delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{b})\rho(k)\,do'\,dk; \tag{125.3}$$

[1] Этот случай соответствует известному *методу Лауэ* рентгеноструктурного анализа кристаллов.

[2] Это можно сделать постольку, поскольку мы имеем целью вычислить лишь полную интенсивность дифракционного пятна, а не его ширину.

ввиду наличия δ-функции в подынтегральном выражении мы вынесли множитель $1+\cos^2\vartheta$, заменив его значением при $\vartheta=\vartheta_0$, где ϑ_0 — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, удовлетворяющими условиям Лауэ (обозначим их как $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}_0'=\mathbf{k}_0+\mathbf{b}$).

Интегрирование по do' удобно произвести, заметив, что оно эквивалентно интегрированию по

$$d^3k' = k'^2\,dk'\,do' = \frac{1}{2}k'\,d(k'^2)\,do'$$

при условии введения в подынтегральное выражение дополнительного множителя $(2/k)\delta(k'^2-k^2)$. Таким образом, интеграл в (125.3) заменяется на

$$\iint \frac{2}{k}\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{b})\delta(k'^2-k^2)\rho(k)\,d^3k'\,dk.$$

Произведя интегрирование по d^3k' с помощью первой δ-функции, мы должны заменить во второй k'^2 на $(\mathbf{k}+\mathbf{b})^2$, в результате чего получаем

$$\sigma = (2\pi)^3\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|n_\mathbf{b}|^2V(1+\cos^2\vartheta_0)\int\frac{1}{k}\delta(2\mathbf{bk}+b^2)\rho(k)\,dk. \tag{125.4}$$

Наконец, произведем последнее интегрирование по dk (при заданном направлении $\mathbf{n}=\mathbf{k}/k$). Аргумент δ-функции обращается в нуль при $k=k_0$, и интеграл равен

$$\frac{\rho(k_0)}{2k_0}\frac{1}{|\mathbf{bn}|} = \frac{\rho(k_0)}{2|\mathbf{bk}_0|} = \frac{\rho(k_0)}{b^2}.$$

Таким образом, получаем окончательно:

$$\sigma = (2\pi)^3\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|n_\mathbf{b}|^2V(1+\cos^2\vartheta_0)\frac{\rho(k_0)}{b^2}. \tag{125.5}$$

Рассмотрим теперь другой случай, в котором падающая волна монохроматична, но содержит компоненты с различными направлениями $\mathbf{k}$, получающимися друг из друга вращением вокруг некоторой оси [1]). Единичный вектор вдоль направления последней обозначим через $\mathbf{l}$, а угол поворота вокруг нее через ψ. Пусть функция $\rho(\psi)$ дает распределение интенсивности падающего излучения по углам, нормированное на единицу:

$$\int_0^{2\pi}\rho(\psi)\,d\psi = 1.$$

[1]) Этот случай соответствует известному *методу Брэгга* (или *методу вращения*) рентгеноструктурного анализа, причем фактически речь идет не о повороте направления $\mathbf{k}$, а о вращении самого кристалла вокруг оси $\mathbf{l}$.

Все вычисления, приведшие к формуле (125.4), полностью относятся и к этому случаю, с той лишь разницей, что интегрирование по $\rho(k)\,dk$ надо заменить интегрированием по $\rho(\psi)\,d\psi$:

$$\sigma = (2\pi)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2 V(1+\cos^2\vartheta_0) \int \frac{1}{k}\delta(2\mathbf{bk}+b^2)\rho(\psi)\,d\psi. \tag{125.6}$$

Снова обозначим через $\mathbf{k}_0$ значение $\mathbf{k}$, для которого обращается в нуль аргумент δ-функции, и будем отсчитывать ψ от плоскости $\mathbf{l}$, $\mathbf{k}_0$. Для малых ψ имеем

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + [\mathbf{lk}_0]\psi.$$

Тогда интеграл в (125.6) принимает вид

$$\int \frac{1}{k}\delta(2\mathbf{b}[\mathbf{lk}_0]\psi)\rho(\psi)\,d\psi = \frac{\rho(0)}{2k|\mathbf{b}[\mathbf{lk}_0]|} = \frac{\rho(0)}{2k^2|\mathbf{b}[\mathbf{ln}_0]|} = \frac{2\rho(0)\sin^2(\vartheta_0/2)}{b^2|\mathbf{b}[\mathbf{ln}_0]|}.$$

Таким образом,

$$\sigma = \frac{2(2\pi)^3}{b^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\cdot(1+\cos^2\vartheta_0)|n_{\mathbf{b}}|^2 V\frac{\rho(0)}{|\mathbf{b}[\mathbf{ln}_0]|}. \tag{125.7}$$

Наконец, рассмотрим дифракцию монохроматической плоской волны от тела, представляющего собой совокупность хаотически ориентированных кристалликов [1]).

Обозначим через $\mathbf{k}'_0$ и $\mathbf{b}_0$ векторы $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{b}$, направленные так, чтобы удовлетворялось условие Лауэ $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k} + \mathbf{b}_0$. Направления $\mathbf{k}'_0$ и $\mathbf{b}_0$ неоднозначны, так как условие Лауэ, разумеется, продолжает выполняться при любом повороте треугольника $\mathbf{kb}_0\mathbf{k}'_0$ вокруг направления $\mathbf{k}$. Таким образом, главному максимуму отвечают направления $\mathbf{k}'$, заполняющие коническую поверхность с углом $2\vartheta_0$ при вершине; вместо дифракционного пятна мы будем иметь теперь дифракционное кольцо.

Искомое полное сечение определится формулой, отличающейся от (125.4) лишь заменой интегрирования по $\rho(k)\,dk$ усреднением по направлениям $\mathbf{b}$:

$$\sigma = (2\pi)^3 V\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2(1+\cos^2\vartheta_0)\int\frac{1}{k}\delta(2\mathbf{bk}+b^2)\frac{do_{\mathbf{b}}}{4\pi} \tag{125.8}$$

($do_{\mathbf{b}}$ — элемент телесного угла в направлении $\mathbf{b}$). Обозначив угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}$ через α, запишем интеграл в (125.8) в виде

$$\int\frac{1}{k}\delta(2bk\cos\alpha+b^2)\frac{2\pi d\cos\alpha}{4\pi} = \frac{1}{4bk^2} = \frac{1}{b^3}\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}.$$

[1]) Этот случай соответствует рентгеноструктурному *методу порошков* (*метод Дебая–Шеррера*).

Таким образом,

$$\sigma = (2\pi)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2 \frac{V}{b^3}(1+\cos^2\vartheta_0)\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}. \qquad (125.9)$$

Каждый из трех рассмотренных случаев соответствует определенному способу усреднения дифракционной картины. Отметим, что зависимость полной усредненной интенсивности дифракции от объема тела сводится при этом, как и следовало ожидать, к простой пропорциональности. Напомним, что в неусредненной картине зависимость интенсивности и ее распределения по пятну от объема более резкая.

§ 126. Диффузное тепловое рассеяние рентгеновых лучей

В двух предыдущих параграфах мы понимали под $n(x,y,z)$ электронную плотность в кристалле, усредненную по времени. Тем самым из нее выпадали вызываемые различными причинами колебания плотности, а с ними и соответствующая (некогерентная) часть рассеяния рентгеновых лучей. Одним из источников некогерентного рассеяния являются тепловые флуктуации плотности. Это рассеяние диффузно распределено по всем направлениям, но его характерной особенностью является сравнительно большая интенсивность вблизи направлений, соответствующих резким линиям структурного рассеяния, рассмотренного в предыдущих параграфах. Мы рассмотрим теперь именно эти максимумы теплового рассеяния (*W.H. Zachariasen*, 1940).

Тепловые колебания кристаллической решетки будем представлять разложенными на отдельные звуковые волны. Как будет видно из дальнейшего, в создании интересующих нас максимумов теплового рассеяния участвуют волны с большими (по сравнению с постоянной решетки) длинами. Вызываемое такой волной изменение электронной плотности можно рассматривать в каждой точке пространства как результат простого сдвига решетки на величину, равную местному значению вектора смещения $\mathbf{u}$ в волне. Таким образом, изменение плотности (не усредненной по времени!) при прохождении заданной звуковой волны можно выразить через среднюю плотность с помощью соотношения

$$\delta n = n(\mathbf{r}-\mathbf{u}) - n(\mathbf{r}) \approx -\mathbf{u}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}.$$

Рассматривая диффузное рассеяние вблизи определенной линии, надо заменить n^2 на $n_{\mathbf{b}}e^{i\mathbf{br}}$ с заданным $\mathbf{b}$, так что

$$\delta n = -i(\mathbf{bu})n_{\mathbf{b}}e^{i\mathbf{br}}. \qquad (126.1)$$

Рассеяние на флуктуациях плотности, разумеется, некогерентно с рассеянием на средней плотности и потому не интерферирует с ним. Поэтому сечение диффузного рассеяния можно найти по формуле (124.10), подставив в нее δn вместо n и произведя затем статистическое усреднение по флуктуациям:

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_\mathbf{b}|^2(1+\cos^2\vartheta)\left\langle\left|\int(\mathbf{ub})e^{-i\mathbf{Kr}}\,dV\right|^2\right\rangle do', \tag{126.2}$$

где введено обозначение $\mathbf{K} = \mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{b}$. Интенсивность рассеяния велика в тех направлениях, для которых вектор $\mathbf{K}$ мал ($K \ll b$).

Интеграл $\int \mathbf{u}e^{-i\mathbf{Kr}}\,dV$ выделяет из $\mathbf{u}$ пространственную компоненту Фурье с волновым вектором $\mathbf{K}$; поэтому мы можем понимать под $\mathbf{u}$ просто вектор смещения в звуковой волне с этим волновым вектором. Неравенство $K \ll b$ означает, следовательно, что длина рассеивающей звуковой волны велика по сравнению с размерами элементарной ячейки кристалла.

Таким образом, имеем

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{Kr}} + \mathbf{u}_0^* e^{-i\mathbf{Kr}}), \tag{126.3}$$

так что

$$\int(\mathbf{bu})e^{-i\mathbf{Kr}}\,dV = \frac{1}{2}V\mathbf{bu}_0$$

и сечение

$$d\sigma = \frac{1}{8}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_\mathbf{b}|^2(1+\cos^2\vartheta)b_i b_k\langle u_{0i}u_{0k}^*\rangle V^2\,do'. \tag{126.4}$$

Усреднение произведений компонент $\mathbf{u}_0$ производится аналогично тому, как это было сделано в § 123 для звуковой волны в изотропном теле. Упругая энергия единицы объема деформированного кристалла дается выражением

$$\frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm},$$

где u_{ik} — тензор деформации, а λ_{iklm} — тензор модулей упругости (см. VII, § 10). Поэтому средняя упругая энергия всего кристалла равна

$$\frac{1}{2}V_{iklm}\langle u_{ik}u_{lm}\rangle.$$

Подставим сюда

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{(iK_k u_{0i} + iK_i u_{0k})e^{i\mathbf{Kr}}\right\}.$$

Члены с множителями $e^{\pm 2i\mathbf{Kr}}$ при усреднении обращаются в нуль. Учитывая также свойства симметрии тензора λ_{iklm} (сим-

метрия по индексам ik и lm и по перестановке пары ik с парой lm), получим

$$\frac{V}{4}\lambda_{iklm}K_kK_m\langle u_{0i}u_{0l}^*\rangle = \frac{V}{4}g_{ik}\langle u_{0i}u_{0k}^*\rangle,$$

где введено обозначение

$$g_{ik} = \lambda_{ilkm}K_lK_m. \tag{126.5}$$

Согласно общей теории термодинамических флуктуаций, можно теперь сразу написать для искомых средних значений [1])

$$\langle u_{0i}u_{0k}^*\rangle = \frac{4T}{V}g_{ik}^{-1} \tag{126.6}$$

(g_{ik}^{-1} — тензор, обратный тензору g_{ik}), а для сечения рассеяния окончательно имеем

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 TV|n_{\mathbf{b}}|^2(1+\cos^2\vartheta)b_ib_kg_{ik}^{-1}\cdot do'. \tag{126.7}$$

Таким образом, интенсивность диффузного рассеяния, как и следовало ожидать, пропорциональна объему кристалла. Характерной особенностью этого рассеяния является распределение его интенсивности по площади пятна. Отвлекаясь от множителя $(1+\cos^2\vartheta)$, практически постоянного для заданного пятна, мы видим, что распределение интенсивности определяется выражением $g_{ik}^{-1}b_ib_k$. Последнее представляет собой произведение K^{-2} на довольно сложную функцию направления вектора $\mathbf{K}$ относительно кристаллографических осей. При рассеянии вблизи главного максимума интенсивность диффузного рассеяния тоже максимальна в точке $\mathbf{K}=0$ (само выражение (126.7), обращающееся при $\mathbf{K}=0$ в бесконечность, разумеется, становится при этом неприменимым). Если же условие (124.15) $2\mathbf{bk}=-b^2$ не выполняется, то равенство $\mathbf{K}=0$ невозможно и максимум интенсивности диффузного рассеяния расположен при некотором отличном от нуля $\mathbf{K}$, вообще говоря, не совпадающем с положением максимума структурного рассеяния. В обоих случаях диффузное рассеяние создает фон, интенсивность которого спадает в основном как $1/K^2$, т. е. значительно медленнее, чем интенсивность в более резкой линии структурного рассеяния, которую он окружает.

---

[1]) См. V, § 111. Если распределение вероятностей для флуктуирующих величин x_1, x_2, ... имеет вид

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_{ik}x_ix_k\right\},$$

то $\overline{x_ix_k} = \lambda_{ik}^{-1}$. Лишний множитель 2 в формуле (126.6) связан с тем, что каждое из комплексных u_{0i} представляет собой совокупность двух независимых величин.

В заключение параграфа остановимся на вопросе о рассеянии рентгеновых лучей в жидкости. Поскольку жидкость в среднем однородна, когерентное рассеяние в этом случае, разумеется, отсутствует. Для вычисления же некогерентного рассеяния следует снова подставить δn вместо n в (124.10) и усреднить по флуктуациям. В результате получаем

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)(1+\cos\vartheta) < |\delta n_{\mathbf{q}}|^2 > d\sigma', \qquad (126.8)$$

где $\delta n_{\mathbf{q}} = \int \delta n\, e^{i\mathbf{qr}}\, dV$. Среднее $\langle|\delta n_{\mathbf{q}}|^2\rangle$ выражается через компоненту Фурье корреляционной функции флуктуаций электронной плотности. С учетом однородности жидкости имеем

$$\langle|\delta n_{\mathbf{q}}|^2\rangle = V\int \langle\delta n^{(1)}\delta n^{(2)}\rangle e^{i\mathbf{qr}}\, dV, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

(Ср. вывод формулы V, (116.13).)

Интересными особенностями обладает рассеяние рентгеновых лучей на двумерных кристаллических пленках. Как было показано в V, § 138, тепловые флуктуации «размывают» кристаллический порядок в таких системах. Поэтому когерентное рассеяние отсутствует. Вместе с тем, корреляционные функции флуктуаций убывают с расстоянием в таких системах по медленному степенному закону. Это приводит к тому, что диффузное рассеяние имеет резкие максимумы в тех направлениях, в которых при $T = 0$ лежали бы максимумы упругого рассеяния на «неразмытой» структуре. (См. задачу к этому параграфу.) Аналогичные особенности имеют место при рассеянии на слоистых смектических жидких кристаллах, структура которых также размывается тепловыми флуктуациями. (См. V, § 139.)

Задача

Определить угловое распределение рассеяния на двумерной кристаллической пленке при $\mathbf{q} \approx \mathbf{b}$ ($\mathbf{b}$ — вектор обратной решетки при $T = 0$).

Р е ш е н и е. Корреляционную функцию флуктуаций электронной плотности $\langle\delta n(\mathbf{r}_1)\delta n(\mathbf{r}_2)\rangle$ двумерной системы можно определить так же, как это было сделано в V, § 138 для корреляционной функции флуктуаций плотности. Член, ответственный за рассеякие с $\mathbf{q} \approx \mathbf{b}$, имеет вид

$$\frac{|n_{\mathbf{b}}|^2}{r^{T\alpha_{\mathbf{b}}}}\cos\mathbf{br}, \qquad (1)$$

где $n_{\mathbf{b}}$ — компонента Фурье электронной плотности при $T = 0$, $\alpha_{\mathbf{b}}$ — показатель, зависящий от упругих модулей кристалла (см. V, (138.7)). Вычисляя фурье-компоненту функции (1), находим для среднего квадрата флуктуаций

$$\langle|\delta n_{\mathbf{b}}|^2\rangle \sim \frac{|n_{\mathbf{b}}|^2}{\varkappa_{\|}^{2-T\alpha_{\mathbf{b}}}}, \qquad (2)$$

где $\varkappa_{\|}$ — проекция вектора $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{q} - \mathbf{b}$ на плоскости пленки. Формула (2) решает поставленную задачу.

§ 127. Температурная зависимость сечения дифракции

Обратимся теперь к выяснению температурной зависимости сечения когерентного рассеяния рентгеновых лучей. Вопрос сводится к определению температурной зависимости микроскопической электронной плотности в кристалле, усредненной с учетом теплового движения атомов.

Будем считать атомы достаточно тяжелыми, так что бóльшая часть их электронов локализована в неперекрывающихся оболочках, которые лишь слабо деформируются при колебаниях решетки. Будем также считать, что решетка состоит из атомов лишь одного сорта, по одному в элементарной ячейке; подчеркнем, что это последнее предположение не имеет принципиального характера и делается исключительно для упрощения записи формул.

Тогда можно точную (не усредненную) микроскопическую электронную плотность представить в виде

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} F(\mathbf{r} - \mathbf{r_n}) = \sum_{\mathbf{n}} F(\mathbf{r} - \mathbf{r_{n0}} - \mathbf{u_n}), \tag{127.1}$$

где $F(\mathbf{r})$ — плотность электронов в отдельном атоме (*атомный формфактор*); суммирование производится по всем атомам в решетке, $\mathbf{r_n}$ — радиус-векторы атомных ядер, нумеруемых векторным (с целочисленными компонентами) индексом $\mathbf{n}$. Обозначив радиус-векторы равновесных положений ядер (т. е. узлов решетки) как $\mathbf{r_{n0}}$, а векторы смещений атомов из этих положений посредством $\mathbf{u_n}$, имеем $\mathbf{r_n} = \mathbf{r_{n0}} + \mathbf{u_n}$, что и использовано в последнем равенстве (127.1).

Разложив плотность (127.1) в ряд Фурье (124.12) в объеме V решетки, представим коэффициенты разложения в виде

$$n_{\mathbf{b}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{n}} e^{-i(\mathbf{r_{n0}} + \mathbf{u_n})\mathbf{b}} F_{\mathbf{b}},$$

где

$$F_{\mathbf{b}} = \int F(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{br}}\, dV \tag{127.2}$$

— фурье-компоненты атомного формфактора. Все произведения $\mathbf{r_{n0}b}$ равны целым кратным от 2π. Поэтому все множители $\exp(-i\mathbf{r_{n_0}b}) = 1$, так что

$$n_{\mathbf{b}} = \frac{F_{\mathbf{b}}}{V} \sum_{\mathbf{n}} e^{-i\mathbf{u_n b}}. \tag{127.3}$$

Усредним это выражение по движению атомов. Очевидно, что средние значения членов суммы не зависят от номера $\mathbf{n}$. Поэтому

$$\langle n_{\mathbf{b}} \rangle = \frac{F_{\mathbf{b}}}{v} \langle e^{-i\mathbf{bu}} \rangle, \tag{127.4}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор смещения атома (безразлично какого), а $v = V/N$ — объем элементарной ячейки (N — число ячеек в объеме V).

Усреднение в (127.4) следует понимать как полное статистическое усреднение, т. е. усреднение по волновым функциям стационарных состояний с последующим усреднением по распределению Гиббса.

Для выполнения этого усреднения следует рассматривать $\mathbf{u}$ как квантовомеханический оператор

$$\widehat{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left(\frac{\hbar}{2MN\omega_\alpha(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \left\{ \widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mathbf{n}} + \widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{e}^{*}_{\mathbf{k}\alpha} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mathbf{n}} \right\} \qquad (127.5)$$

(см. V, § 72). Суммирование производится по всем значениям волнового вектора $\mathbf{k}$ фононов (в объеме V) и по их независимым поляризациям, нумеруемым индексом $\alpha = 1, 2, 3$; $\omega_\alpha(\mathbf{k})$ — частоты фононов, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}$ — их поляризационные векторы; M — масса атома. Операторы $\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$ — операторы уничтожения и рождения фононов в состояниях $\mathbf{k}\alpha$.

Для операторов вида (127.5) выполняется теорема Вика, согласно которой среднее от произведения любого четного числа операторов равно сумме всевозможных произведений попарных средних (среднее же от произведений нечетного числа операторов равно нулю) [1]). Здесь будет существенно равенство

$$\langle e^{\widehat{L}} \rangle = \exp\left(\frac{1}{2} \langle \widehat{L}^2 \rangle \right), \qquad (127.6)$$

справедливое для всякого оператора $\widehat{L}$, удовлетворяющего этой теореме; в его справедливости легко убедиться, разложив $\exp \widehat{L}$ в ряд и усредняя каждый член разложения [2]).

Применив (127.6) к (127.4), получим

$$\langle n_\mathbf{b} \rangle = \frac{F_\mathbf{b}}{v} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \langle (\mathbf{b}\mathbf{u})^2 \rangle \right\}.$$

Сечение дифракции пропорционально квадрату этой величины и потому его температурная зависимость отделяется в виде множителя

$$D = \exp\{ -\langle (\mathbf{b}\mathbf{u})^2 \rangle \}. \qquad (127.7)$$

Его называют *множителем Дебая–Валлера* (*P. Debye*, 1912; *I. Waller*, 1925).

---

[1]) Доказательство теоремы в «макроскопическом пределе» ($N \to \infty$), соответствующем ее применению в статистике, — см. IX, § 13.

[2]) Произведение четного числа $2n$ множителей $\widehat{L}$ можно разбить на пары $(2n-1)(2n-3)\ldots 1$ способами (выбрав один из $2n$ множителей, можно «спарить» его с любым из $2n-1$ остальных множителей; выбрав каждый раз один из остающихся $2n-2$ операторов, можно спарить его $2n-3$ способами, и т. д.). Поэтому

$$\langle \widehat{L}^{2n} \rangle = [(2n-1)(2n-3)\ldots 1] \langle \widehat{L}^2 \rangle^n.$$

Остается вычислить средний квадрат $\langle(\mathbf{bu})^2\rangle$. Из всех попарных произведений операторов $\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\widehat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}$ имеют отличные от нуля средние значения лишь

$$\left\langle\widehat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\right\rangle = N_{\mathbf{k}\alpha}, \quad \left\langle\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}\right\rangle = N_{\mathbf{k}\alpha} + 1,$$

где $N_{\mathbf{k}\alpha}$ — средние числа заполнения фононных состояний в равновесии. Поэтому

$$\langle(\mathbf{bu})^2\rangle = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{\hbar}{2MN\omega_\alpha(\mathbf{k})}|\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{b}|^2\left\langle\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha} + \widehat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\right\rangle =$$
$$= \sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{\hbar}{MN\omega_\alpha(\mathbf{k})}|\mathbf{b}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}|^2\left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right). \quad (127.8)$$

При этом числа $N_{\mathbf{k}\alpha}$ даются распределением Бозе

$$N_{\mathbf{k}\alpha} = \left[\exp\frac{\hbar\omega_a(\mathbf{k})}{T} - 1\right]^{-1}.$$

При подстановке в (127.7) член с нулевыми колебаниями дает не зависящий от температуры множитель, который следует опустить (точнее — включить в определение $F_{\mathbf{b}}$). Наконец, перейдя от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию по $V\,d^3R/(2\pi)^3$, получим окончательно

$$D = \exp\left\{-\frac{\hbar v}{M}\sum_\alpha\int\frac{|\mathbf{b}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}|^2}{\omega_\alpha(\mathbf{k})}N_{\mathbf{k}\alpha}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\right\}. \quad (127.9)$$

При $T \to 0$ функция $N_{\mathbf{k}\alpha}$ обращается в нуль и соответственно D — в единицу; с увеличением температуры D убывает. Отметим, что влияние температуры сводится к общему понижению интенсивности линии рассеяния без изменения ее формы (в том числе ширины).

Среднее тепловое смещение атомов от узлов кристаллической решетки обычно (даже при высоких температурах) мало по сравнению с постоянной решетки. Тогда показатель экспоненты в D для линий рассеяния с небольшими значениями $\mathbf{b}$ мал по сравнению с единицей и температурный эффект представляет собой малую поправку. Подавление интенсивности становится однако значительным для линий рассеяния, отвечающих большим значениям $\mathbf{b}$.

При высоких (по сравнению с дебаевской) температурах средний квадрат $\langle\mathbf{u}^2\rangle \propto T$ и вместе с ним пропорционален T показатель экспоненты в D. При низких температурах тепловые фононы относятся в основном к акустическим ветвям спектра, для которых частота $\omega \propto k$; интегрирование по ω в (127.9) может быть распространено в этом случае до ∞ и показатель экспоненты оказывается пропорциональным T^2.

Отметим, наконец, что при низких температурах, когда существенны лишь длинноволновые фононы, для справедливости формул (127.7)–(127.9) не обязательна возможность представить плотность $n(\mathbf{r})$ в виде суммы по атомам (127.1): как уже было отмечено в начале предыдущего параграфа, в длинноволновых колебаниях большие участки решетки смещаются как целое со своими значениями электронной плотности, что только и важно для вывода указанных формул.

З а д а ч а

Определить интенсивность диффузионного рассеяния вблизи линии структурного рассеяния с учетом квантовых флуктуаций плотности.

Р е ш е н и е. Классическая формула (126.6) для средних значений произведений компонент вектора смещения справедлива при условии

$$T \gg \hbar c K, \tag{1}$$

где c — порядка величины скорости звука в кристалле. Если это условие не выполняется, то следует считать амплитуду $\mathbf{u}_0$ оператором и вычислять средние по формулам настоящего параграфа. Сравнивая определение (126.3) с (127.5) и собирая члены с волновым вектором $\mathbf{K}$, находим

$$u_0 = \sum_\alpha \left(\frac{2\hbar}{MN\omega_\alpha(\mathbf{K})}\right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{K}\alpha}(\hat{c}_{\mathbf{K}\alpha} + \hat{c}^+_{-\mathbf{K}\alpha}).$$

Усреднение производится, как при выводе (127.8). Имеем

$$b_i b_k \langle u_{0i} u_{0k}\rangle = \sum_\alpha \frac{4\hbar}{MN\omega_\alpha(\mathbf{K})} |\mathbf{b}\mathbf{e}_{\mathbf{K}\alpha}|^2 \left(N_{\mathbf{K}\alpha} + \frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

Подстановка (2) в (126.4) решает задачу.

При $T = 0$ в (2) остается только член с нулевыми колебаниями. Для малых K сечение оказывается пропорциональным $1/\omega_\alpha(\mathbf{K}) \sim 1/K$. В обратном предельном случае, при условии (1), можно приближенно положить

$$N_{\mathbf{K}\alpha} + \frac{1}{2} \approx \frac{T}{\hbar\omega_\alpha(\mathbf{K})},$$

так что правая часть (2) переходит в

$$\frac{4T}{MN} \sum_\alpha \frac{|\mathbf{b}\mathbf{e}_{\alpha\mathbf{K}}|^2}{\omega^2_\alpha(\mathbf{K})}.$$

Теперь воспользуемся уравнением распространения колебаний теории упругости VII, (23.1), которое для плоских волн можно переписать в виде

$$\frac{1}{\omega^2_\alpha(\mathbf{K})} \mathbf{e}_{\alpha\mathbf{K}i} = g^{-1}_{il} \mathbf{e}_{\alpha\mathbf{K}l},$$

причем векторы поляризации e_α можно считать вещественными. Окончательно с помощью тождества

$$\sum_\alpha e_{\alpha i} e_{\alpha k} = \delta_{ik}, \tag{3}$$

справедливого для трех взаимно-перпендикулярных единичных векторов, приводим (2) к виду, соответствующему формуле (126.6).

ПРИЛОЖЕНИЕ

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Ниже приведен для справок ряд формул, относящихся к векторным операциям в криволинейных координатах в общем и в некоторых специальных случаях.

В произвольной ортогональной системе криволинейных координат u_1, u_2, u_3 квадрат элемента длины имеет вид

$$dl^2 = h_1^2\,du_1^2 + h_2^2\,du_2^2 + h_3^2\,du_3^2,$$

где h_i — функции координат. Элемент объема в тех же координатах

$$dV = h_1 h_2 h_3\,du_1\,du_2\,du_3.$$

Различные векторные операции выражаются с помощью функций h_i по нижеследующим формулам. Векторные операции со скаляром:

$$(\mathrm{grad}\,f)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u_i}, \qquad \Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right),$$

где суммирование производится по круговым перестановкам индексов 1, 2, 3. Векторные операции с вектором:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum \frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1),$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 A_2)\right]$$

(остальные компоненты $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ получаются круговой перестановкой индексов).

Цилиндрические координаты r, φ, z. Элемент длины:

$$dl^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + dz^2, \qquad h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1.$$

Векторные операции:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi},$$

$$(\Delta\mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$(\Delta\mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}, \quad (\Delta\mathbf{A})_z = \Delta A_z.$$

В выражениях для компонент вектора $\Delta\mathbf{A}$ под ΔA_i понимается результат действия оператора Δ на величину A_i, рассматриваемую при этом как скаляр.

Сферические координаты r, θ, φ. Элемент длины:

$$dl^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2,$$
$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\sin\theta.$$

Векторные операции:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},$$
$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right],$$
$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi),$$
$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right],$$
$$(\Delta\mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2}\left[A_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot A_\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$
$$(\Delta\mathbf{A})_\theta = \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$
$$(\Delta\mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{2\sin\theta}\right].$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1]

[1] Этот указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. В указатель включены термины и понятия, непосредственно не отраженные в оглавлении.

Учебное издание

ЛАНДАУ Лев Давидович
ЛИФШИЦ Евгений Михайлович

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

(Серия: «Теоретическая физика», том VIII)

Редактор: *Д. А. Миртова*
Оригинал-макет: *Ст. Ю. Мельников*

ЛР №071930 от 06.07.99
Подписано в печать 14.01.05. Формат $60\times90^1/_{16}$
Бумага офсетная №1. Печать офсетная
Усл. печ. л. 41,0. Уч.-изд. л. 40,4. Заказ №

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная ул., 90
E-mail: fizmat@maik.ru; http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист».
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.
E-mail: form.pfp@votel.ru http://www.vologda/~pfpv

